HSC 2023

উচ্চতর গণিত ১ম পত্র প্রশ্নব্যাংক

(শর্ট সিলেবাস)





উদ্ভাস

একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

উদ্ভাসিত আলোর মাঝে
দেখো তোমার মুখ;
জীবন মানে সংগ্রাম
আর বিজয় মানে সুখ।

HSC 2023

উচ্চতর গণিত ১ম পত্র প্রশ্নব্যাংক

সার্বিক ব্যবস্থাপনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

প্রচ্ছদ
মোঃ রাকিব হোসেন

অক্ষর বিন্যাস
আলাউদ্দিন, তপু, আরিফ ও সাইফুল

অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতায়
মাহমুদুল হাসান সোহাগ
মুহাম্মদ আবুল হাসান লিটন

কৃতজ্ঞতা
উদ্ভাস-উন্মেষ-উত্তরণ
শিক্ষা পরিবারের সকল সদস্য

প্রকাশনায়
উদ্ভাস একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

প্রকাশকাল
মার্চ, ২০২৩ ইং

অনলাইন পরিবেশক
rokomari.com

Fixed Price
425/-
(Four Hundred Twenty Five tk Only)

উৎসর্গ

উন্মুক্ত সুতার প্রান্তে তীক্ষ্ণ চোখের পাহারা। কাপড়ে কাপড়ে জোড়া দেওয়ার মতোই বিশ্বের সঙ্গে বাংলাদেশকে জুড়ে দিচ্ছে তারা। শৈল্পিক হাতের ছোঁয়ায় বিচ্ছিন্ন কাপড়গুলো ক্রমেই হয়ে ওঠে আমাদের আব্রু। কখনো কলেজ পড়ুয়া ছাত্রের গায়ের উদ্যমী গেঞ্জি, আবার কখনো ছোট্ট শিশুর তুলতুলে সোয়েটার-এ চলছে সেই সেলাইযুদ্ধ। অন্নহীন হয়ে বাইরে বের হওয়া সম্ভব, কিন্তু বস্ত্রহীনভাবে নয়।

বস্ত্রের কারিগর সকল গার্মেন্টস শ্রমিকের প্রতি পরম শ্রদ্ধা...

সূচিপত্র

শর্ট সিলেবাস ২০২৩

Gmail

পারস্পরিক সহযোগিতা-ই পারে পৃথিবীকে আরও সুন্দর করতে...

সুপ্রিয় শিক্ষার্থী,

আশা করি এবারের "HSC 2023 প্রশ্নব্যাংক" তোমাদের কাছে অতীতের চেয়ে আরো বেশি উপকারী হিসেবে বিবেচিত হবে ইনশাআল্লাহ্। বইটি সম্পূর্ণ ত্রুটিমুক্ত রাখতে আমরা চেষ্টার কোনো ত্রুটি করি নাই। তবুও কারো দৃষ্টিতে কোন ভুল ধরা পড়লে নিম্নে উল্লেখিত ই-মেইল এ অবহিত করলে কৃতজ্ঞ থাকবো এবং আমরা তা পরবর্তী সংস্করণে সংশোধন করে নিব ইনশাআল্লাহ্।

Email : solution.udvash@gmail.com

Email-এ নিম্নলিখিত বিষয়গুলো উল্লেখ করতে হবে:

(i) "HSC 2023 প্রশ্নব্যাংক" এর বিষয়ের নাম, ভার্সন (বাংলা/ইংলিশ), (ii) পৃষ্ঠা নম্বর (iii) প্রশ্ন নম্বর (iv) ভুলটা কী (v) কী হওয়া উচিৎ বলে তোমার মনে হয়

উদাহরণ : "HSC 2023 প্রশ্নব্যাংক" Math 1st Paper, Chapter-01, Page-09, Question-09, দেওয়া আছে, 5 কিন্তু হবে 2.

ভুল ছাড়াও মান উন্নয়নে যেকোন পরামর্শ আন্তরিকভাবে গ্রহণ করা হবে। পরিশেষে মহান আল্লাহর নিকট তোমাদের সাফল্য কামনা করছি।

শুভ কামনায়

উদ্ভাস ম্যাথ টিম

উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্নের বিশ্লেষণ

বোর্ড	অধ্যায়	২০২২				২০২১				২০১৯				২০১৮				২০১৭			
		CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ
		a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c	
ঢাকা	০১	2	2	2	3	2	2	2	5	1	1	1	2	1	1	1	3	1	1	1	4
	০২									1	1	1			1		1	1			2
	০৩	1	1	1	5	2	2	2	7	1	1	1	3	1	2	1	8		1	1	4
	০৪	1	1	1	4					1	1	1	3	1		1	3	1	1	1	3
	০৫												2	1		1	2	1	1	1	3
	০৬												2		1	1	1	1	1	1	
	০৭	2	2	2	4					1	1	1	3	2	1	1		1	1	1	3
	০৮									1	1	1	3				3				2
	০৯	2	1	1	5	2	2	2	6	1	1	1	4	2	1	1	2	1	1	1	2
	১০		1	1	4	2	2	2	7	1	1	1	3		1	1	2	1	1	1	2
রাজশাহী	০১	2	2	2	4	2	2	2	7	1	1	1	3					1	1		4
	০২									1	1		2					1	1	1	2
	০৩	1	1	1	6	2	2	2	8	1	1	1	5					1	1	1	3
	০৪	1	1	1	3						1		2					1	1	1	4
	০৫									1		2	2								2
	০৬									1	1	1	1					1	1	1	1
	০৭	2	2	2	2					1	1	1	3								2
	০৮												2							1	3
	০৯	2	1	1	5	2	2	2	5	1	1	1	2					2	1	1	3
	১০		1	1	5	2	2	2	5	1	1	1	3					1	2	2	1
চট্টগ্রাম	০১	2	3	3	4	2	2	2	6	1	1	1	3						1	1	3
	০২									1			2								2
	০৩	1			5	2	2	2	5			2	3					1	1	1	4
	০৪	1	1	1	2						1		2					1	1	1	2
	০৫									1	1	1	2					1	1	1	3
	০৬									1	1	1	2							1	3
	০৭	1	1	1	4					1	1	1	3					2	2	1	
	০৮									1	1		2					1			3
	০৯	2	2	1	6	2	2	2	6	1	1	1	3					1	1	1	3
	১০	1	1	2	4	2	2	2	8	1	1	1	3					1	1	1	2
সিলেট	০১	2	2	2	5	2	2	2	5	1	1	1	2	সকল বোর্ড				1	1	1	3
	০২									1			2					1	1	1	3
	০৩	1	1	1	4	2	2	2	9		1		4					1	1	1	3
	০৪	1	1	1	4					1	1	2	2								3
	০৫									1	1	1	2							1	1
	০৬									1	1	1						1	1	1	2
	০৭	2	2	2	4					1	1	1	5					1	1	1	3
	০৮												3					1	1		4
	০৯	1	1	1	4	2	2	2	5	2	1		2					1	1	1	3
	১০	1	1	1	4	2	2	2	6		1	2	3					1	1	1	
বরিশাল	০১	1	1	1	4	2	2	2	7	1	1	1	2					1	1	1	3
	০২									1			3							1	2
	০৩	1	3	1	5	2	2	2	5		1	1	5					1	1	1	4
	০৪	2		2	5						1	1	2					1	1		2
	০৫									1			2					1	1		2
	০৬									2	1	1	2					1	1	1	1
	০৭	1	1	1	3					1	1	1							1		3
	০৮										1	1	3							1	2
	০৯	1	2	2	4	2	2	2	7	1	1	1	5					2	1	1	3
	১০	2	1	1	4	2	2	2	6	1	1	1	1					1	1	2	3

বোর্ড	অধ্যায়	২০২২				২০২১				২০১৯				২০১৮				২০১৭			
		CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ
		a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c		a	b	c	
যশোর	০১	2	2	2	4	2	2	2	5	1	1	1	3					1	1	1	2
	০২												2					1			2
	০৩	1	1	1	5	2	2	2	7	1	1	1	3					1	1	1	2
	০৪	1	1	1	4					1	1	1	2						1	1	3
	০৫											1	3						1	1	2
	০৬									1	1		3					1	1	1	
	০৭	1	1	1	4					1	1	1	2					1	1	1	4
	০৮									1	1	1	3					1			4
	০৯	2	1	2	4	2	2	2	7	1	1	1	2					2	2	1	3
	১০	1	2	1	4	2	2	2	6	1	1	1	2							1	3
কুমিল্লা	০১	1	1	1	5	2	2	2	7	1	1	1	3					1	1	1	3
	০২									1			2								3
	০৩	2	2	1	5	2	2	2	6		1		3					2	1	1	4
	০৪	1	1	2	3					1	1	2	2						1	1	2
	০৫									1	1	1	2					1	1	1	2
	০৬									2	1	1	3					1	1	1	1
	০৭	1	1	1	4						1	1	2					1	1	1	2
	০৮												2								5
	০৯	2	2	2	5	2	2	2	6	1	1	1	4					1	1	1	1
	১০	1	1	1	3	2	2	2	6	1	1	1	2					1	1	1	2
দিনাজপুর	০১	1	1	1	4	2	2	2	5	1	1	1	3	সকল বোর্ড				1	1	1	3
	০২									1			2					1	1	1	3
	০৩	2	2	2	3	2	2	2	7	1	1	1	2								4
	০৪	1	1	1	5						1	1	3					1	1	1	3
	০৫										1	1	1					1	1	1	3
	০৬									1	1	1	3					1			1
	০৭	1	1	1	5					1	1	1	2								3
	০৮									1			2						2	2	1
	০৯	1	2	2	6	2	2	2	6	1	1	1	4					2	1	1	3
	১০	2	1	1	2	2	2	2	7	1	1	1	3					1	1	1	1
ময়মনসিংহ	০১	1	1	1	5	2	2	2	5												
	০২																				
	০৩	1	1	1	7	2	2	2	8												
	০৪	2	2	2	1																
	০৫																				
	০৬																				
	০৭	1	1	1	4																
	০৮																				
	০৯	2	2	2	5	2	2	2	6												
	১০	1	1	1	3	2	2	2	6												

বি.দ্র.- ২০২০ সালে বোর্ড পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয় নাই এবং ২০১৮ সালে সকল বোর্ডে অভিন্ন প্রশ্ন পদ্ধতিতে পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয়।

অধ্যায় ০১ ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক

এই অধ্যায়ের বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্নের বিশ্লেষণ:

বোর্ড	২০২২				২০২১				২০১৯				২০১৮				২০১৭			
	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ
	ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ	
ঢাকা	2	2	2	3	3	3	3	4	1	1	1	2	1	1	1	3	1	1	1	4
রাজশাহী	2	2	2	5	2	2	2	7	1	1	1	3	সকল বোর্ড				1	1	1	8
চট্টগ্রাম		2	2	4	2	2	2	6	1	1	1	3					1	1	1	3
সিলেট	2	2	2	4	2	2	2	5	1	1	1	2					1	1	1	2
বরিশাল	1	1	1	3	2	2	2	7	1	1	1	3					1	1	1	3
যশোর	1	1	1	5	2	2	2	5	1	1	1	2					1	1	1	2
কুমিল্লা	1	1	1	4	2	2	2	7				3					1	1	1	3
দিনাজপুর	1	1	1	4	2	2	2	5	1	1	1	3					1	1	1	4
ময়মনসিংহ	1	1	1	5	2	2	2	4												

বি.দ্র.- ২০২০ সালে বোর্ড পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয় নাই এবং ২০১৮ সালে সকল বোর্ডে অভিন্ন প্রশ্ন পদ্ধতিতে পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয়।

গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা ও তথ্যাবলি

◈ ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম:



◈ ম্যাট্রিক্স: কোনো রাশিকে যদি সারি ও কলামে সুবিন্যস্ত করা হয় তখন ঐ সুষম রাশিকে ম্যাট্রিক্স বলে।

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$ একটি (3×4) ক্রমের ম্যাট্রিক্স কেননা এতে 3 টি সারি ও 4 টি কলাম আছে।

অনেক ক্ষেত্রে $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$ আকারেও প্রকাশ করা যায়। সংক্ষেপে $A_{m,n} = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n \\ i,j,m,n\in\mathbb{N}}}$ আকারেও প্রকাশ করা যায়;

যেখানে, a_{ij} ম্যাট্রিক্সটির উপাদান প্রকাশ করে এবং m ম্যাট্রিক্সটির সারি সংখ্যা ও n কলাম সংখ্যা নির্দেশ করে।

◈ দুটি একই আকারের ম্যাট্রিক্স সমান হতে গেলে তাদের অবস্থানের স্ব-স্ব মান সমান হতে হবে। যেমন, $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 4 \\ y & 5 \end{bmatrix}$ হলে অবশ্যই $x = 2$ এবং $y = 3$ হবে।

◈ শূন্য (Zero) ম্যাট্রিক্স: যে ম্যাট্রিক্সের সবগুলো উপাদান শূন্য তাকে নাল (Null) বা বিদেহী বা শূন্য (Zero) ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন: $0_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $0_{3,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

◈ বর্গ ম্যাট্রিক্স: যে ম্যাট্রিক্স-এর সারি ও কলাম সংখ্যা সমান, তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলে। যেমন: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 9 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের কোনো মান নেই

◈ বর্গ ম্যাট্রিক্সকে নির্ণায়ক (Determinant) আকারে প্রকাশ করে সেই নির্ণায়কের মান নির্ণয় করা যায়। যেকোন একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর নির্ণায়ক-কে লেখা হয় $|A|$ বা, $\det(A)$. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ হলে, $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

◈ অনুরাশি: একটি নির্ণায়কে কোনো উপাদান যে সারি ও কলামে অবস্থিত, সেই সারি ও কলামকে বাদ দিয়ে যে নির্ণায়কটি পাওয়া যায়, তাকে ঐ উপাদানের অনুরাশি (Minor) বলে। যেমন- $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটিতে 8 এর অনুরাশি $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$; 7 এর অনুরাশি $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$.

◈ অনুরাশির আগে 'অবস্থান-সূচক চিহ্ন' বসালে যা পাওয়া যায়, তাই উক্ত উপাদানের সহগুণক (Co-factor)। চিহ্ন নির্ণয়ের ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত উপায় অবলম্বন করা যেতে পারে।

$(-1)^{r+c}$ যেখানে, $r =$ উপাদানের সারি নম্বর; $c =$ উপাদানের কলাম নম্বর; $(r + c)$ জোড় সংখ্যা হলে, চিহ্ন ধনাত্মক (+) আর $(r + c)$ বিজোড় সংখ্যা হলে, চিহ্ন ঋণাত্মক (−).

অর্থাৎ, a_{rc} এর সহগুণক $= (-1)^{r+c} \times a_{rc}$ এর অনুরাশি।

যেমন: উপরিউক্ত নির্ণায়কে 8 এর সহগুণক হচ্ছে $= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$; [$\because$ 8 এর জন্য $r = 2, c = 2$

$\therefore r + c = 4$ যা জোড় সংখ্যা]

আবার, 2 এর সহগুণক হচ্ছে $= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; [$\because$ 2 -এর জন্য $r = 2, c = 1$

$\therefore r + c = 3$ যা বিজোড় সংখ্যা]

◈ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3$ যেখানে A_i, B_i, C_i হচ্ছে a_i, b_i, c_i এর সহগুণক $[1 \le i \le 3$ এবং $i \in \mathbb{N}]$.

একইভাবে $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1A_1 + b_1B_1 = a_1b_2 + b_1(-a_2) = a_1b_2 - a_2b_1$

◈ ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স: কোনো ম্যাট্রিক্স-এর সারি ও কলাম পরস্পর interchange করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়, তাকে ট্রান্সপোজ (Transpose) ম্যাট্রিক্স বলে। একে A′ বা A^T দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এর অপর নাম বিম্ব ম্যাট্রিক্স। $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

$\therefore A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$

◈ মুখ্যকর্ণ: কোনো ম্যাট্রিক্স এর যে কর্ণ এমন সব ভুক্তিদের বরাবর যায় যেন ভুক্তিগুলো a_{ij} এর জন্য $i = j$ হয়। তখন তাকে ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণ বলে।

◈ কর্ণ ম্যাট্রিক্স: যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের মুখ্য কর্ণ বাদে বাকি ভুক্তিগুলো শূন্য তাকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলে।

◈ $I = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ $(n \times n)$ আকারের একক অভেদক (Identity) ম্যাট্রিক্স যেন, $IA = AI = A$.

$I_1 = [1]$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ইত্যাদি।

◈ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \vdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ এর মুখ্যকর্ণ বরাবর যোগফল$(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn})$ হচ্ছে এর ট্রেস (Trace).

◈ কিছু বিশেষ ম্যাট্রিক্স:

(i) **লম্ব (Orthogonal) ম্যাট্রিক্স:** একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A লম্ব ম্যাট্রিক্স হবে যদি $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$ হয়।
অর্থাৎ, যদি $A^T = A^{-1}$ হয়।

(ii) **সমঘাতী/একক্ষম (Idempotent) ম্যাট্রিক্স:** কোনো A ম্যাট্রিক্স একক্ষম হবে, যদি $A^2 = A$ হয়।

(iii) **শূন্যঘাতী/অক্ষম বা বিনাশক (Nilpotent) ম্যাট্রিক্স:** p একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, যদি $A^p = 0$ (শূন্য ম্যাট্রিক্স) হয়, তবে A একটি বিনাশক ম্যাট্রিক্স। একে p ক্রমের শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্সও বলে।

(iv) **অভেদঘাতী/উদঘাতিক (Involuntary) ম্যাট্রিক্স:** কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর ক্ষেত্রে $A^2 = I$ হলে, A একটি উদঘাতিক ম্যাট্রিক্স।

(v) **অনুবন্ধী (Conjugate) ম্যাট্রিক্স:** কোন A ম্যাট্রিক্সের ভুক্তি (উপাদান) জটিল সংখ্যা হলে, প্রত্যেক জটিল সংখ্যার স্থানে তার অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা বসিয়ে প্রাপ্ত ম্যাট্রিক্সকে A এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং $\bar{A}$ প্রতীক দ্বারা সূচিত হয়।

$$A = \begin{bmatrix} 1+2i & i & 2-3i \\ 5 & -i & 4 \\ 3-5i & 7 & 5+2i \end{bmatrix} \text{ হলে, } \bar{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & -i & 2+3i \\ 5 & i & 4 \\ 3+5i & 7 & 5-2i \end{bmatrix}$$

(vi) **হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স (Hermitian Matrix):** কোন বর্গ জটিল ম্যাট্রিক্স এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স এর ট্রান্সপোজ যদি প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স এর সমান হয় তবে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সকে বলা হয় হারমিশিয়ান ম্যাট্রিক্স। অর্থাৎ, $A = \overline{A^T}$

(vii) ঊর্ধ্ব ত্রিভুজাকার **Matrix (Upper triangle Matrix):** মুখ্য কর্ণের নিচের সবগুলি ভুক্তি 0 হলে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি হবে ঊর্ধ্ব ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স যেমন- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

(viii) নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স **(Lower triangle Matrix):** মুখ্য কর্ণের উপরের সবগুলো ভুক্তি 0 হলে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স হবে নিম্ন ত্রিভুজাকার ম্যাট্রিক্স যেমন- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

◈ ম্যাট্রিক্স-এর ট্রেস: কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স-এর প্রধান কর্ণ বরাবর ভুক্তিগুলোর যোগফলকে বলা হয় ঐ ম্যাট্রিক্স-এর ট্রেস।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স-এর ট্রেস $= 2 + 3 - 3 = 2$

◈ **Concept:**

(i) দুটি ম্যাট্রিক্স যোগ-বিয়োগ করা যাবে যদি ম্যাট্রিক্স দুটির ক্রম (order) সমান থাকে। দুটি ম্যাট্রিক্সের একই স্থানের ভুক্তিগুলো যোগ বা বিয়োগ করে যেই ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাই যোগফল বা বিয়োগফল।

(ii) একটি ম্যাট্রিক্সের সাথে কোনো সংখ্যা গুণ করা হলে, ম্যাট্রিক্সের সবগুলো ভুক্তির সাথে সংখ্যাটি গুণ হয়ে যাবে।

$$k\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix}$$

(iii) দুটি ম্যাট্রিক্স গুণ করা যাবে যদি প্রথমটির কলাম সংখ্যা দ্বিতীয়টির সারিসংখ্যার সমান হয়। A এর ক্রম $m \times n$ এবং B এর ক্রম $n \times p$ হলে, AB নির্ণয়যোগ্য কিন্তু BA নির্ণয়যোগ্য নয়। AB গুণফল ম্যাট্রিক্সটির ক্রম হবে $= m \times p$

যেমন, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ হলে (AB) সম্ভব কিন্তু (BA) সম্ভব না।

◈ কোনো নির্ণায়কের সারিগুলি এদের অনুরূপ কলামসমূহে পরিবর্তিত হলে এবং কলামগুলো ইহাদের অনুরূপ সারিসমূহে পরিবর্তিত হলে নির্ণায়কের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। অর্থাৎ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ বা, $|A| = |A^T|$

◈ কোনো নির্ণায়কের একটি সারি অথবা কলামের সবগুলো উপাদান শূন্য হলে নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে। যেমন: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

◈ কোনো নির্ণায়কে পাশাপাশি দুইটি সারি অথবা কলাম পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের চিহ্ন বদলে যায়।

যেমন: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; [$r_1$ ও r_2 এর স্থান বিনিময়]

◈ কোনো নির্ণায়কের দুটি সারি অথবা কলামের অনুরূপ উপাদানগুলো অভিন্ন হলে এর মান শূন্য হবে।

অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$ এখানে $r_1 \equiv r_3$, $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$ এখানে $c_1 \equiv c_2$.

◈ কোনো নির্ণায়কের যে কোন সারি অথবা কলামের প্রত্যেক উপাদানকে একই রাশি দ্বারা গুণ করলে নির্ণায়কটির মানও ঐ রাশি দ্বারা গুণ হয়। অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

◈ নির্ণায়কের কোনো সারি অথবা কলামের উপাদানগুলো অপর একটি সারি অথবা কলামের অনুরূপ উপাদানগুলোর সমানুপাতিক হলে নির্ণায়কটির মান শূন্য। অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & b_1 \\ a_2 & ka_2 & b_2 \\ a_3 & ka_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$

◈ নির্ণায়কটির কোন সারি অথবা কলামের প্রতিটি উপাদান দুইটি রাশির সমষ্টি বা অন্তর হিসেবে প্রকাশিত হলে, নির্ণায়কটিকে একই ক্রমের দুটি পৃথক নির্ণায়কের যোগফল বা বিয়োগফল হিসেবে প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 \pm d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

◈ যদি দুইটি নির্ণায়ক এরূপ হয় যে, এদের প্রত্যেকের একটি মাত্র সারি অথবা কলামের উপাদানগুলো ভিন্ন হয়, তবে এই ভিন্ন সারি অথবা কলামের অনুরূপ উপাদানগুলো একত্রে যোগ করে নির্ণায়ক দুটির সমষ্টি পাওয়া যায়। যেমন:

ধরি, $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ও $D_2 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এদের শুধু প্রথম কলাম ভিন্ন। তাহলে, $D_1 + D_2 = \begin{vmatrix} a_1 + d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

◈ কোনো নির্ণায়কের কোন সারি অথবা কলামের উপাদানগুলো একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করে অপর কোন সারি অথবা কলামের অনুরূপ উপাদানগুলোর সাথে যোগ / বিয়োগ করলে, নির্ণায়কটির মানের পরিবর্তন হয় না।

অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \pm xb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm xb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm xb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; $[c_1' = c_1 \pm xc_2]$

$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$; $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$; $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; $D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$; $D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

$\therefore x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$ এবং $z = \frac{D_z}{D}$

- যদি $D = 0$ এবং $D_x/D_y/D_z \neq 0$ হয়, সমীকরণ তিনটির কোন নির্দিষ্ট সমাধান নেই।
- যদি $D = D_x = D_y = D_z = 0$ হতো, তবে সমীকরণের জোটত্রয়ের অসংখ্য সমাধান থাকত।

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি

- (i) $A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$, $|A| \neq 0$
- (ii) $(A^T)^T = A$
- (iii) $(AB)^T = B^T A^T$ যেখানে A ও B এর মাত্রা যথাক্রমে $(m \times n)$ ও $(n \times p)$
- (iv) $IA = AI$
- (v) $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
- (vi) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ যেখানে, A ও B উভয়ই বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $|A|, |B|, |AB| \neq 0$
- (vii) $A(B+C) = AB + AC$, $(B+C)A = BA + CA$
- (viii) সাধারণত $AB \neq BA$; [ম্যাট্রিক্স গুণন বিনিময় বিধি মেনে চলে না]
- (ix) $A(BC) = (AB)C$; [এক্ষেত্রে ম্যাট্রিক্স তিনটির মাত্রা (order) অবশ্যই ম্যাট্রিক্স গুণের শর্ত মেনে চলবে]
- (x) $AX = B$ হলে, $X = A^{-1}B$
- (xi) $A = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n}$ হলে, $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$; [যেখানে A_{ij} হচ্ছে a_{ij} এর সহগুণক]
- (xii) $(n \times n)$ আকারের ম্যাট্রিক্সদ্বয় A ও B হলে, $|AB| = |A||B|$.
- (xiii) ক্রেমারের পদ্ধতি (Cramer's Rule): $\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix}\right\}$

x_1, x_2, x_3, x_n চলকবিশিষ্ট n সংখ্যক সমীকরণজোটের (System of Equations) ক্ষেত্রে,

$$\frac{x_1}{D_{x_1}} = \frac{x_2}{D_{x_2}} = \frac{x_3}{D_{x_3}} = \cdots = \frac{x_n}{D_{x_n}} = \frac{1}{D} \text{ যেখানে, } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left|[a_{ij}]_{1 \le i,j \le n}\right|$$

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots$$

$$D_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

সহজে মনে রাখার কৌশল

- (2×2) ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ এর জন্য A^{-1} নির্ণয় করতে হলে, a ও d স্থান বিনিময় করবে এবং b ও c এর চিহ্ন পরিবর্তন করতে হবে। যদি ধনাত্মক চিহ্ন থাকে তবে ঋণাত্মক চিহ্ন হবে আর যদি ঋণাত্মক চিহ্ন থাকে তবে ধনাত্মক চিহ্ন হবে। একে ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়কের মান, (ad – bc) দ্বারা ভাগ করতে হবে। $\therefore A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.
- n ক্রমের A ম্যাট্রিক্সের জন্য $|(mA)| = m^n|A|$

$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = ?$

(a) $4(a+b+c)^2$ (b) 4abc (c) $4(a+b)(b+c)(c+a)$ (d) $4(a+b)$

উপর্যুক্ত উদাহরণটির উত্তর option (c)। উক্ত MCQ এর প্রশ্নটিতে প্রদত্ত নির্ণায়কটির উপর বিভিন্ন operation করে কাঙ্ক্ষিত উত্তর পাওয়া যায়। তবে এছাড়াও a, b, c এর বিভিন্ন sample মান নিয়ে option verify করেও সঠিক উত্তর নির্ণয় সম্ভব।

যেমন: $a = 1, b = 2, c = 3$ ধরলে, $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 240$

Option a: $4(a+b+c)^2 = 4 \times (6)^2 = 144$

Option b: $4abc = 4 \times 1 \times 2 \times 3 = 24$

Option c: $4(a+b)(b+c)(c+a) = 240$ (সঠিক উত্তর)

Option d: $4(a+b) = 4 \times 3 = 12$

Process টি বড় মনে হলেও Calculator এ Matrix mode-এ Calculation করলে দ্রুত উত্তর নির্ণয় করা যাবে।

$(a, b, c = 0$ বা $a = b = c)$ ধরা হতে বিরত থাকা উচিত।

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও সমাধান

MCQ: বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্ন ও সমাধান

01. A, B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলোর মাত্রা যথাক্রমে $4 \times 3, 3 \times 4$ এবং 7×4 হলে $(B + A^T).C^T$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা কত?

[DB, JB'22; RB, SB'21; BB'19]

(a) 3×4 (b) 3×7 (c) 4×3 (d) 4×7

সমাধান: (b); A ম্যাট্রিক্সের মাত্রা 4×3 হলে, A^T ম্যাট্রিক্সের মাত্রা= 3×4, B ম্যাট্রিক্সের মাত্রা 3×4, C ম্যাট্রিক্সের মাত্রা 7×4 হলে, C^T ম্যাট্রিক্সের মাত্রা $= 4 \times 7$, তাহলে, $B + A^T$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা 3×4

$\therefore (B + A^T)_{3\times4}.C^T_{4\times7}$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা 3×7

02. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ হলে, নিচের কোনটির A^{-1}?

[DB'22; DB, CB, MB'21; DB, Ctg.B, CB'19]

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

সমাধান: (c); $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ হলে,

$|A| = 2(-3) - (-1).5 = -6 + 5 = -1 \neq 0$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

03. $\begin{bmatrix} a-3 & -1 \\ -8 & a+4 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে a =?

[DB, Ctg.B'22; JB, Din.B'21]

(a) 4, −5 (b) −4, 5 (c) −4, −5 (d) 4, 5

সমাধান: (a); $\begin{bmatrix} a-3 & -1 \\ -8 & a+4 \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে,

$(a-3)(a+4) - (-8)(-1) = 0$

$\Rightarrow a^2 + 4a - 3a - 12 - 8 = 0$

$\Rightarrow a^2 + a - 20 = 0 \Rightarrow a^2 + 5a - 4a - 20 = 0$

$\Rightarrow a(a+5) - 4(a+5) = 0 \Rightarrow (a-4)(a+5) = 0$

$\therefore a = 4, -5$ **(Ans.) or, [Use Calculator]**

04. $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স কোনটি?

[RB, Ctg.B, Din.B'22; SB'21; Din.B17]

(a) $\begin{bmatrix} -7 & 8 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

সমাধান: (b); $A^{-1} = \frac{1}{7\times7-8\times6}\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$

05. A, B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলোর আকার যথাক্রমে $m \times n$, $n \times m$ এবং $m \times s$ হলে $(A^T + B)C$ ম্যাট্রিক্সের আকার হবে- **[RB'22] [Ans: d]**

(a) $m \times s$ (b) $s \times n$ (c) $n \times m$ (d) $n \times s$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

$A = \begin{bmatrix} x+4 & 8 \\ 2 & x-2 \end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স।

06. যদি A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হয়, তবে x এর মান নিচের কোনটি? [RB'22] [Ans: d]

(a) $-4, 2$ (b) $-2, 4$ (c) $-4, 6$ (d) $-6, 4$

07. প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সে $x = 3$ হলে A^2 নিচের কোনটি? [RB'22]

(a) $\begin{bmatrix} 65 & 64 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 49 & 46 \\ 41 & 43 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 40 & 48 \\ 52 & 64 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 64 & 49 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

সমাধান: (a); $A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65 & 64 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}$

08. যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ হয়, তবে- [Ctg.B'22] [Ans: c]

(i) A একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স

(ii) $|A| = 15$

(iii) A একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স নয়

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

09. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের (3, 2) তম সহগুণক কোনটি?

[Ctg.B, JB, BB, Din.B'22; DB, RB, SB, Din.B'21 ; All.B'18; DB, Ctg.B'17] [Ans: a]

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

10. বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর ক্ষেত্রে $A^2 = I$ হলে, $A^{-1} = ?$ [SB'22]

(a) 2A (b) A (c) 0 (d) A + I

সমাধান: (b); $A^2 = I \Rightarrow A \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1}$

$\Rightarrow A \cdot I = A^{-1} \therefore A^{-1} = A$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & \lambda+2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 10 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে, λ-এর মান- [SB'22] [Ans: c]

(a) -2 (b) 2 (c) 4 (d) -4

12. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ হলে, $(AB)^{-1}$ এর মান কত? [SB'22]

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

সমাধান: (a); $(AB)^{-1} B^{-1} A^{-1}$ [বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য]

$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

13. A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং K একটি স্কেলার হলে- [SB'22] [Ans: d]

(i) $(A')' = A$ (ii) $(KA)' = KA'$

(iii) যদি $|A| = 0$ হয়, তবে $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e & \pi & \sqrt{3} \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ হলে, $|A| = ?$ [SB'22] [Ans: d]

(a) e (b) π (c) $2(e - \pi + \sqrt{3})$ (d) 0

15. $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ হলে, Adj A = কোনটি? [BB'22]

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$

সমাধান: (d); $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$; adj $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$ হলে, AB এর ক্রম কত? [BB'22]

(a) 2×1 (b) 1×2 (c) 3×1 (d) 2×3

সমাধান: (a); $A \to 2 \times 3$ এবং $B \to 3 \times 1$

$\therefore AB \to 2 \times 1$

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ হলে, Det (A) এর মান কত? [BB'22] [Ans: b]

(a) -48 (b) 0 (c) 48 (d) 60

18. যদি A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $A^2 = I$ হয়, তবে A কে বলে- [JB'22] [Ans: b]

(a) শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স (b) অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স

(c) শূন্য ম্যাট্রিক্স (d) বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স

19. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$ একটি- [JB'22] [Ans: b]

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

(iii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

20. দুটি ম্যাট্রিক্স A ও B এর মাত্রা যথাক্রমে $p \times q$ এবং $n \times r$ হলে AB নির্ণয়ের শর্ত কোনটি? [CB'22] [Ans: d]

(a) p = r (b) p = n (c) q = r (d) q = n

21. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ একটি- **[CB'22]**

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স
(iii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i,ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); (i) A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স

(ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore |A| = 2(12-8) - 3(8-24) + 4(4-18) = 0$

(iii) প্রতিসম নয়

22. নিচের কোনটি সমঘাতী ম্যাট্রিক্স? **[CB'22]**

(a) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

সমাধান: (b); সমঘাতি ম্যাট্রিক্স, $A^2 = A$

ধরি, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

or, [Use Calculator]

23. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ নির্ণায়কটির- **[CB'22]**

(i) মান = 0 (ii) (2, 3) তম ভুক্তির অনুরাশি = 5
(iii) (2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক = 0
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); ধরি, $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

(i) $|A| = 3(-6+6) - 2(0-6) + 4(0-3) = 0$

(ii) (2, 3) তম ভুক্তির অনুরাশি $= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= -3 - 2 = -5$

(iii) (2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক

$= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$

$= (-1)\{(-4) - (-4)\} = 0$

24. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ এর অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স কোনটি?

[CB'22; JB'21; JB;19] [Ans: c]

(a) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

সমাধান: (c); $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \therefore \text{Adj } A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

25. যদি $\begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -5 & 0 & y \\ x & 4 & 0 \end{bmatrix}$ বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে $(x, y) =$?

[Din.B'22]

(a) $(-3,-4)$ (b) $(-3,4)$
(c) $(3,-4)$ (d) $(3,4)$

সমাধান: (c); বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের জন্য, $A^t = -A$

এখানে, $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -5 & 0 & y \\ x & 4 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow -A = -\begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 5 & 0 & -y \\ -x & -4 & 0 \end{bmatrix}$

আবার, $A^t = \begin{bmatrix} 0 & -5 & x \\ 5 & 0 & 4 \\ -3 & y & 0 \end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $-x = -3 \therefore x = 3$ এবং $y = -4$

$\therefore (x, y) \equiv (3, -4)$

26. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & x \\ 6 & 2 & 8 \end{vmatrix}$ এর (1, 1) তম ভুক্তির অনুরাশি -4 হলে x এর মান কত? **[Din.B'22; DB'21; JB'19]**

(a) 6 (b) 2 (c) -2 (d) -6

সমাধান: (c); (1, 1) তম ভুক্তির অনুরাশি $= -4$

$\Rightarrow -8 - 2x = -4 \Rightarrow -2x = 4 \therefore x = -2$ **(Ans.)**

27. $A^2 = A$ হলে A ম্যাট্রিক্সটি- **[MB'22] [Ans: a]**

(a) সমঘাতী (b) ব্যতিক্রমী
(c) প্রতিসম (d) অব্যতিক্রমী

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ একটি নির্ণায়ক।

28. (2,1) তম ভুক্তির অনুরাশি- **[MB'22] [Ans: c]**

(a) -41 (b) -12 (c) 12 (d) 41

29. (3,2) তম ভুক্তির সহগুণক- **[MB'22] [Ans: b]**

(a) -12 (b) -9 (c) 9 (d) 12

30. A, B, C ম্যাট্রিক্সত্রয়ের মাত্রা যথাক্রমে 3×4, 4×5 ও 5×2 হলে, (AB)C এর মাত্রা- **[MB'22] [Ans: b]**

(a) 4×5 (b) 3×2 (c) 2×3 (d) 3×5

31. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি- **[MB'22] [Ans: d]**

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স
(iii) অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

32. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$ হলে, AB এর ক্রম কত? [DB'21]

(a) 2×1 (b) 1×2 (c) 3×1 (d) 1×3

সমাধান: (a); $A_{(2\times3)} \times B_{(3\times1)} = C_{(2\times1)}$

33. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$ একটি- [DB'21]

(i) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (ii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

(iii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); (i) কর্ণ বাদে সব ভুক্তি শূন্য

(ii) সারি ও কলাম পরিবর্তনে একই থাকে

(iii) কর্ণের সব ভুক্তি সমান নয়

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

34. A ম্যাট্রিক্সটি হলো- [RB'21]

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) কর্ণ ম্যাট্রিক্স

(iii) সমঘাতি ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); A বর্গ এবং কর্ণ ম্যাট্রিক্স

(iii) এর ক্ষেত্রে $A = 3I$

$A^2 = 3^2I = 3.3I = 3A \neq A \therefore$ A সমঘাতি ম্যাট্রিক্স নয়।

35. |A| এর মান কত? [RB'21]

(a) 0 (b) 3 (c) 9 (d) 27

সমাধান: (d); $|A| = 3 \times 3 \times 3 = 27$

Note: $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ হলে, $|A| = abc$

36. নিচের কোনটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স? [RB'21]

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

সমাধান: (c); $|A| = 4 \times 3 - 2 = 10 \neq 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

37. AB ম্যাট্রিক্সটি হবে- [RB'21]

(a) $\begin{bmatrix} 28 \\ 22 \\ 40 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 22 \\ 28 \\ 40 \end{bmatrix}$

(c) $[22 \quad 28 \quad 40]$ (d) $[28 \quad 22 \quad 40]$

সমাধান: (b); AB = ক্যালকুলেটরের সাহায্যে = $\begin{bmatrix} 22 \\ 28 \\ 40 \end{bmatrix}$

38. উপরের তথ্যের আলোকে- [RB'21]

(i) $|A| = 0$ (ii) AB এর ক্রম 3×1

(iii) BA নির্ণয়যোগ্য

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); (i) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

$[r_2' = r_2 - r_1, r_3' = r_3 - r_1] = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(ii) $A_{(3\times3)} \times B_{(3\times1)} = C_{(3\times1)}$; (iii) $B_{(3\times1)} \times A_{(3\times3)}$ B এর কলাম সংখ্যা ≠ A এর সারি সংখ্যা

∴ BA অনির্ণেয়

39. $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ হলে, $P^2 - 2I$ এর মান হবে- [Ctg.B'21]

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

সমাধান: (b); $P^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+0 & -1-3 \\ 0+0 & 0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

$\therefore P^2 - 2I = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

40. $A = [a_{ij}]_{3\times2}$ এবং $B = [b_{ij}]_{2\times4}$ হলে, AB ম্যাট্রিক্সটির আকার- [Ctg.B'21]

(a) 3×2 (b) 2×4 (c) 4×3 (d) 3×4

সমাধান: (d); $A_{(3\times2)} \times B_{(2\times4)} = C_{(3\times4)}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

41. C এর ক্ষেত্রে- [Ctg.B'21]

(i) (2, 2) তম অনুরাশি 1 (ii) $|C| = 2$

(iii) $3C = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); (ii) এর ক্ষেত্রে $|C| = -2$

$3C = 3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$

42. C^{-1} এর সমান- [Ctg.B'21]

(a) $\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

সমাধান: (a); $C^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

43. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ y & 6 & x \\ -3 & 7 & -1 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের $(3, 2)$ তম অনুরাশির মান 2 হলে, x ও y এর মধ্যে সম্পর্কটি- [Ctg.B'21]

(a) $2x + 5y = 2$ (b) $3x + y = 2$

(c) $x - 2y = 2$ (d) $x - 2y = 1$

সমাধান: (d); $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ y & x \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow 2x - 4y = 2$

$\therefore x - 2y = 1$

44. $\begin{pmatrix} k & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে, k এর মান- [Ctg.B'21]

(a) -2 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

সমাধান: (c); $4k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

45. $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ হলে, A একটি- [SB'21]

(i) বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (ii) ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

(iii) কর্ণ ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); মুখ্য কর্ণের ভুক্তিগুলো 0 অন্যান্য ভুক্তি অশূন্য। $\therefore$ A কর্ণ ম্যাট্রিক্স নয়।

$|A| = 3(0 + 8) + 2(-12 + 0) = 0$

$\therefore$ A ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স। আবার, $A^T = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -A$ $\therefore$ A বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

46. $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির -4 ভুক্তির অনুরাশি কত? [SB'21]

(a) 24 (b) 6 (c) -6 (d) -24

সমাধান: (b); অনুরাশিটি $= \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6$

47. $A = [1 \quad -2 \quad 3], B = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$ হলে, $3AB =$ কত? [BB'21]

(a) $[-27]$ (b) $[-7]$ (c) $[7]$ (d) $[21]$

সমাধান: (d); $3AB = 3[1 \quad -2 \quad 3]\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$

$= 3[7] = [21]$

48. নিচের কোনটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স? [BB, CB'21]

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

সমাধান: (d); ম্যাট্রিক্স A এর ক্ষেত্রে $|A| = 0$ হলে, সেটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -4$

$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 18$; $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$

49. $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $|A| = 0$ হলে, x এর মান কত? [BB'21; Din.B'19]

(a) -2 (b) 0 (c) $\frac{2}{5}$ (d) 2

সমাধান: (d); শর্তমতে, $x(3 - 2) + 2(-1) = 0$

$\Rightarrow x = 2$

50. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের- [BB'21]

(i) $(2, 3)$ তম ভুক্তির অনুরাশি $+2$

(ii) $(2, 2)$ তম ভুক্তির সহগুণক 3

(iii) নির্ণায়কটির মান -1

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (d); $(2, 3)$ তম ভুক্তির অনুরাশি $= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2$, নির্ণায়কের মান $= 1.(9 - 10) = -1$

আবার, $(2, 2)$ তম ভুক্তির সহগুণক

$= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3$

51. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -d \end{bmatrix}$ এর অনুবন্ধী (Adjoint) ম্যাট্রিক্স কোনটি? [BB'21]

(a) $\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & -a \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -d & b \\ c & a \end{bmatrix}$

সমাধান: (c); 2×2 Matrix এর ক্ষেত্রে $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -d \end{bmatrix}$ এর Adjoint ম্যাট্রিক্স $= \begin{bmatrix} -d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

52. $A + B =$ কত? [BB'21]

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

সমাধান: (c); $A + B = \begin{bmatrix} 1-2 & 2+3 \\ 0-1 & -3+4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

53. $A' - B' =$ কত? [BB'21]

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$

সমাধান: (a); $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}; B' = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore A' - B' = \begin{bmatrix} 1+2 & 0+1 \\ 2-3 & -3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ হলে-

54. M ম্যাট্রিক্সটি- [JB'21]

(a) প্রতিসম (b) শূন্যঘাতি

(c) সমঘাতি (d) অভেদঘাতি

সমাধান: (d); $M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $[A^2 = I]$

$= \begin{bmatrix} 1+0 & 3-3 \\ 0-0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

∴ ম্যাট্রিক্সটি অভেদঘাতি।

55. M^{-1} কোনটি? [JB'21]

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

সমাধান: (d); $\frac{1}{-1} \times \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

56. $\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি একটি- [JB'21]

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) অভেদক ম্যাট্রিক্স

(iii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); $\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ একটি বর্গ এবং স্কেলার ম্যাট্রিক্স

57. A ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে যখন- [CB'21]

(i) A বর্গ (ii) $A^2 = A$ (iii) $A^T = A$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); $A^2 = A$ প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হওয়ার শর্ত নয়।

58. $\begin{vmatrix} x & y+z & 1 \\ y & x+z & 1 \\ z & x+y & 1 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান কোনটি? [CB'21]

(a) $4x^2y^2z^2$ (b) 4xyz

(c) 1 (d) 0

সমাধান: (d); $\begin{vmatrix} x & y+z & 1 \\ y & x+z & 1 \\ z & x+y & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} x+y+z & y+z & 1 \\ x+y+z & x+z & 1 \\ x+y+z & x+y & 1 \end{vmatrix}$

$= (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y+z & 1 \\ 1 & x+z & 1 \\ 1 & x+y & 1 \end{vmatrix} = 0$

59. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & -x & -2 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির (2, 3) তম ভুক্তির সহগুণক 0 হলে, x এর মান কত? [CB, MB'21]

(a) −2 (b) −1 (c) 1 (d) 2

সমাধান: (a); শর্তমতে, $C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -x \end{vmatrix}$

$\Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

60. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ হলে- [CB'21]

(i) Det P = 1 (ii) $P^T = P$ (iii) $P = I_3$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (d); (i) Det (P) $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1 \times 1 \times 1 = 1$

(ii) $P^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P$

(iii) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$

61. নিচের কোনটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স? [CB'21]

(a) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & a \end{bmatrix}$

সমাধান: (c); $A^T = -A$ হলে, এটি বিপ্রতিসম

$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$

62. B একটি 2×2 আকারের ম্যাট্রিক্স এবং $|B| = 5$ হলে, $|3B|$ এর মান কত? **[Din.B'21]**

(a) 5 (b) 15 (c) 20 (d) 45

সমাধান: (d); $|3B| = 3^2|B| = 9 \times 5 = 45$

63. $P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ হলে, $|P|$ এর মান কত? **[Din.B'21]**

(a) 12 (b) 20 (c) 60 (d) 120

সমাধান: (c); $|P| = 3(20 - 0) = 60$

64. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ও $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ হলে- **[Din.B'21]**

(i) $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(ii) A^TB এর মাত্রা 2×3 (iii) AB নির্ণয়যোগ্য

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (c); ম্যাট্রিক্স এর বিয়োগ শুধুমাত্র সম আকারের (ক্রম/মাত্রা সমান) ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে করা যায়। তাই (i) নং অপশনটি ভুল।

(ii) $A^T_{2\times2}\ B_{2\times3} = C$ হলে, (iii) $A_{2\times2}$ এবং $B_{2\times3}$ যেহেতু A এর Column সংখ্যা = B এর Column সংখ্যা।

$\therefore$ AB নির্ণয়যোগ্য।

65. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; A হলো- **[MB'21]**

(i) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (ii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

(iii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); (ii) এর ক্ষেত্রে কর্ণের সব ভুক্তি সমান নয় $\therefore$ A স্কেলার ম্যাট্রিক্স নয়। (iii) এর ক্ষেত্রে $A^T = A$

66. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & x \\ 3 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 8 & 7 \\ 2 & y & -9 \\ z & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 7 \\ 8 & 8 & -18 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ হলে, x, y ও z এর মান কত? **[MB'21]**

(a) $-4, 8, 2$ (b) $14, 12, 4$

(c) $0, 4, -4$ (d) $0, -4, 4$

সমাধান: (c); $x + 7 = 7 \therefore x = 0; 4 + z = 0$

$\therefore z = -4 \therefore (x, y, z) \equiv (0, 4, -4)$

$4 + y = 8 \therefore y = 4$

[বি.দ্র: প্রশ্নে ত্রুটি আছে। $\begin{bmatrix} 2 & 3 & x \\ 3 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 8 & 7 \\ 2 & y & -9 \\ z & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 11 & 7 \\ 5 & 8 & -14 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ হওয়া উচিত।]

67. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ হলে, $IA = ?$ **[MB'21]**

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

সমাধান: (d); $IA = A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

68. কর্ণ ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে- **[DB'19] [Ans: c]**

(i) $a_{ij} \neq 0, i = j$ (ii) $a_{ij} = 0, i > j$

(iii) $a_{ij} = 0,\ i < j$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

69. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ এর A^{-1} কোনটি? **[RB'19; DB'17]**

(a) $\dfrac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}}$ (b) $\frac{1}{24}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $24\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

সমাধান: (d); Shortcut: $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ [কর্ণ ম্যাট্রিক্স]

এর জন্য $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$

$\therefore A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ হলে, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

70. A ম্যাট্রিক্সের $p \times n$ এবং B ম্যাট্রিক্সের ক্রম $n \times m$ হলে, AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম কোনটি? **[RB, Ctg.B'19; DB, RB, SB'17]**

(a) $p \times m$ (b) $n \times p$

(c) $m \times n$ (d) $m \times p$

সমাধান: (a); $A_{p\times n} \times B_{n\times m} = AB_{p\times m}$

71. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির- **[RB'19]**

(i) মান 0

(ii) (2, 3) তম ভুক্তির অনুরাশি 5

(iii) (2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক 0

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (c); (i) নির্ণায়কের মান $= 3(-6+6) + 1(12-12) = 0$

(ii) (2, 3) তম ভুক্তির অনুরাশি $= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$

(iii) (2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক

$= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4+4) = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

72. x এর কোন মানের জন্য $|A| = D$ হবে? [Ctg.B'19]

(a) -5 (b) -1 (c) 1 (d) 5

সমাধান: (d); $|A| = 6 + 4 = 10$

$|D| = x(0+2) = 2x \therefore 2x = 10 \Rightarrow x = 5$

73. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ একটি- [SB'19]

(a) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (b) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

(c) স্কেলার ম্যাট্রিক্স (d) ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

সমাধান: (b); মুখ্য কর্ণের সাপেক্ষে ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম বা $A = A^T$ তাই এটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স। এবং ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়কের মান $= 2(4-0) - 0 + 1(0-2) = 6$

$\therefore$ এটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

74. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} =$ কত? [SB'19]

(a) a (b) ab (c) $-abc$ (d) abc

সমাধান: (d); $a(bc-0) - 0 + 0 = abc$

75. $A + B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $A - B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ হলে, নিচের কোনটি B ম্যাট্রিক্স? [BB'19]

(a) $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

সমাধান: (a); $(A+B) - (A-B)$

$= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow 2B = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$

$\therefore B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

76. $P = [1 \quad 2 \quad 3]$ ও $Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ হলে, PQ এর মান- [JB'19]

(a) [8] (b) [1476]

(c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ (d) $[0 \quad 2 \quad 6]$

সমাধান: (a); $PQ = [0 + 2 + 6] = [8]$

77. $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ হলে, PQ এর ক্রম কত? [CB'19]

(a) 1×2 (b) 2×1 (c) 4×1 (d) 4×4

সমাধান: (b); $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times4}$

এবং $Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{4\times1}$ $\therefore$ PQ এর আকার 2×1

78. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$ একটি- [CB'19]

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

(iii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (c); $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = -32$

$\therefore$ অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স। $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$

$\therefore$ প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

79. k এর মান কত হলে, $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & k \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে? [Din.B'19]

(a) -10 (b) 0 (c) 3 (d) 10

সমাধান: (d); $3k - 30 = 0 \therefore k = 10$

80. $2\begin{vmatrix} 2 & 5 & x \\ 3 & 6 & y \\ 4 & 7 & z \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের সমান কোনটি? [Din.B'19]

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 10 & x \\ 6 & 12 & y \\ 8 & 14 & z \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 4 & 10 & 2x \\ 6 & 12 & 2y \\ 8 & 14 & 2z \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 4 & 7 & x+2 \\ 6 & 8 & y+2 \\ 8 & 9 & z+2 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 2 & 10 & x \\ 3 & 12 & y \\ 4 & 14 & z \end{vmatrix}$

সমাধান: (d); d-এ প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সের শুধুমাত্র C_2 কে 2 দ্বারা গুণ করা হয়েছে।

81. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি একটি- [All.B'18] [Ans: b]

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) অভেদক ম্যাট্রিক্স

(iii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

82. $\begin{bmatrix} p+1 & 6 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে, p এর মান- **[All.B'18]**

(a) -8 (b) -4 (c) 4 (d) 6

সমাধান: (b); ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সের, $\begin{vmatrix} p+1 & 6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8(p+1) - 6 \times 4 = 0$

$\Rightarrow p + 1 = \frac{6\times4}{-8} = -3 \therefore p = -4$

83. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স হলে, A একটি- **[DB'17]**

(i) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (ii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

(iii) কর্ণ ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); A কর্ণ ম্যাট্রিক্স; $A^T = A$ হওয়ায় A প্রতিসম ম্যাট্রিক্স এবং মুখ্য কর্ণের সকল ভুক্তি সমান না হওয়ায় A স্কেলার ম্যাট্রিক্স নয়।

84. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ এবং $AX = B$ হলে, $(x, y) =$ কত? **[RB'17]**

(a) $(2, 0)$ (b) $(2, 2)$

(c) $(2, 4)$ (d) $(4, -3)$

সমাধান: (a); $AX = \begin{bmatrix} 3x + y \\ 2x \end{bmatrix}$; $AX = B$

$\therefore 3x + y = 6 ; 2x = 4 \therefore x = 2; y = 0$

বিকল্প: $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{0-2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore x = 2, y = 0$

85. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ হলে, $A - 2I =?$ **[RB'17]**

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

সমাধান: (b); $A - 2I$

$= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

86. p-এর কোন মানের জন্য $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & p \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে? **[RB'17]**

(a) $-\frac{3}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) -3 (d) 3

সমাধান: (d); ৩য় কলাম বরাবর বিস্তার করলে নির্ণায়কের মান $= 3 \times (4 - 6) - p(4 - 6) = 2p - 6$

প্রশ্নমতে, $2p - 6 = 0 \therefore p = 3$

87. a এর মান কত হলে $\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & a \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হবে? **[Ctg.B'17]**

(a) -4 (b) -2 (c) 0 (d) 4

সমাধান: (d); ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হলে, $\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & a \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -2 & a & 0 \end{bmatrix} \therefore a = 4$

88. $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ হলে, $A^{-1} =$ কত? **[Ctg.B'17]**

(a) $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ (d) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$

সমাধান: (c); 2×2 ম্যাট্রিকের Inverse বের করার সহজ উপায়: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ হলে, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$\therefore A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ হলে, $A^{-1} = \frac{1}{32-30}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

89. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ একটি- **[SB'17] [Ans: b]**

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

(iii) কর্ণ ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

90. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ হলে- **[SB'17]**

(i) |A| এর মান -7

(ii) $(1,2)$ তম ভুক্তির সহগুণক 5

(iii) (2, 1) তম ভুক্তির অনুরাশি 3

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); (i) $|A| = 8 - 15 = -7$

(ii) (1, 2) এর সহগুণক $= (-1)^{1+2}[5] = -5$

(iii) (2, 1) এর অনুরাশি $= 3$

91. যদি I_3 একটি ৩য় ক্রমের ম্যাট্রিক্স হয় তবে $(I_3)^{-1} =?$ **[BB'17]**

(a) 0 (b) I_3 (c) $\frac{1}{3}I_3$ (d) $3I_3$

সমাধান: (b); I একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স হলে, $I^{-1} = I$

92. A ও B দুটো 3×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স হলে, |A–B| = 0 এর সমার্থক– **[BB'17]**

(a) $A = 0_{mat}$ বা $B = 0_{mat}$
(b) $|A| = 0$ বা $|B| = 0$
(c) $|A| = 0$ এবং $|B| = 0$
(d) $A = 0_{mat}$ এবং $B = 0_{mat}$

সমাধান: (d); A ও B উভয়েই শুন্য ম্যাট্রিক্স হলেই $|A - B| = 0$ হতে বাধ্য।

93. নিচের কোন নির্ণায়কের মান শূন্য? **[BB'17]**

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
(c) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

সমাধান: (c); $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

$\left[c_1' = \frac{c_1}{2}\right] = 0$ [∵ 2টি Column একই]

94. $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ এর মান কোনটি? **[JB'17] [Ans: b]**

(a) –3 (b) –2 (c) 2 (d) 3

95. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ একটি– **[JB'17] [Ans: d]**

(i) বর্গ Matrix (ii) কর্ণ Matrix
(iii) স্কেলার Matrix

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

96. $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{N}$ একটি- **[CB'17]**

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স
(iii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) i, (d) i, ii, iii

সমাধান: (d); [Note: ∀ চিহ্নের অর্থ 'for all']
(ii) $|A| = \alpha^2 \neq 0$[∵ $\alpha \in \mathbb{N}$ তাই, $\alpha \neq 0$]

97. $A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \forall s \in \mathbb{R}$ এবং $s \neq 0$ হলে, A^{-1} কোনটি? **[CB'17]**

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{s} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{s} & 0 \\ 0 & -s \end{bmatrix}$

সমাধান: (b); এখানে $A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ হওয়ায়

$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$ ∵ $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ হলে,

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$

98. $A = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & -\beta_2 & \gamma_2 \\ -\alpha_3 & \beta_3 & -\gamma_3 \end{vmatrix}$ এর মান- **[CB'17]**

(i) $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_3 \\ \beta_1 & -\beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & -\gamma_3 \end{vmatrix}$ এর মানের সমান

(ii) $\begin{vmatrix} \alpha_1 + c\alpha_2 & \alpha_2 & -\alpha_3 \\ \beta_1 - c\beta_2 & -\beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 + c\gamma_2 & \gamma_2 & -\gamma_3 \end{vmatrix}$ এর মানের সমান

(iii) $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ -\alpha_3 & \beta_3 & -\gamma_3 \\ \alpha_2 & -\beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ এর মানের সমান

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i (b) ii (c) i, ii (d) i, ii, iii

সমাধান: (c); (i) $r \leftrightarrow c$ করলে নির্ণায়কের মান অপরিবর্তীত থাকে।
(ii) $r \leftrightarrow c$ এর পর $c_1' = c_1 + c\ c_2$ করলে নির্ণায়কের মান অপরিবর্তীত থাকে।
(iii) $r_2 \leftrightarrow r_3$ করলে নির্ণায়কের মাঝের চিহ্ন পরিবর্তীত হয়।

99. $\begin{vmatrix} p & 2 & q+r \\ q & 2 & r+p \\ r & 2 & p+q \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান কত? **[Din.B'17]**

(a) 0 (b) 1
(c) pqr (d) p + q + r

সমাধান: (a); $\begin{vmatrix} p & 2 & q+r \\ q & 2 & r+p \\ r & 2 & p+q \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} p+q+r & 2 & q+r \\ p+q+r & 2 & r+p \\ p+q+r & 2 & p+q \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 + c_3]$

$= 2(p+q+r)\begin{vmatrix} 1 & 1 & q+r \\ 1 & 1 & r+p \\ 1 & 1 & p+q \end{vmatrix} = 0$ $\begin{bmatrix} c_1' = \frac{c_1}{p+q+r} \\ c_2' = \frac{c_2}{2} \end{bmatrix}$

100. (i) প্রত্যেক অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান **[Din.B'17] [Ans: a]**
(ii) A ও B বর্গাকার অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
(iii) কোনো নির্ণায়কের অনুরূপ সারি এবং কলামসমূহ পরস্পর অবস্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের মানের পরিবর্তন হয়

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

MCQ: বিভিন্ন লেখকের মূল বইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

মোঃ কেতাব উদ্দীন স্যার

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

01. p এর কোন মানের জন্য $|A| = B$ হবে?

(a) -5 (b) -1 (c) 1 (d) 5

সমাধান: (d); $|A| = 3 \times 2 - \{2 \times (-2)\}$

$= 6 + 4 = 10$

$B = p \times (0 + 2) = 2p$ অতএব, $2p = 10 \therefore p = 5$

02. A ম্যাট্রিক্সকে বিপ্রতিসম (Skew symmetric) করতে যা করা প্রয়োজন- **[Ans: b]**

(i) 2 এর পরিবর্তে -2

(ii) মুখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলি শূন্য

(iii) 3 এর পরিবর্তে -2

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i (b) ii (c) i, ii (d) ii, iii

03. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & z \\ y & -3 \end{bmatrix}$ হলে, $(x, y, z) =?$

(a) $(3, 3, 4)$ (b) $(3, 4, 3)$

(c) $(3, -3, 4)$ (d) $(1, -3, -1)$

সমাধান: (b); $x = 1 + 2 = 3, y = 2 + 2 = 4$

এবং $z = 2 + 1 = 3 \therefore (x, y, z) = (3, 4, 3)$

04. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ হলে, $A^2 =?$

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

সমাধান: (c); $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\left.\begin{matrix} 2x - 5y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \end{matrix}\right\}$ এবং $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

05. সমীকরণ জোটের সহগ ম্যাট্রিক্স কোনটি? **[Ans: d]**

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

06. $AB =?$

(a) $[2 \quad 5]$ (b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ (d) $[2 \quad 1]$

সমাধান: (c); $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 1 \\ 3 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

07. AB এর ক্রম নিচের কোনটি?

(a) 2×2 (b) 2×3

(c) 3×2 (d) 3×3

সমাধান: (b); $A_{2\times2}.B_{2\times3} = AB_{2\times3}$

08. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর: **[Ans: c]**

(i) A ম্যাট্রিক্সটির ভুক্তির সংখ্যা 4

(ii) B ম্যাট্রিক্সটির ক্রম 3×2 (iii) $|A| = 2$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i (b) iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

09. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ এর মান হবে-

(a) -96 (b) -22 (c) 0 (d) 40

সমাধান: (c); $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ [পাশাপাশি দুটি সারি অথবা কলাম সমান্তর বা গুণোত্তর প্রগমনে থাকলে নির্ণায়ক = 0]

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

10. $A - 2B$ নিচের কোনটি?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

সমাধান: (d); $A - 2B = \begin{bmatrix} 1 - 2 \times 0 & 3 - 2 \times 1 \\ 2 - 2 \times 1 & 0 - 2 \times 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

11. A ও B ম্যাট্রিক্স এর ক্ষেত্রে- **[Ans: a]**

(i) $|A| = -6$

(ii) B একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স

(iii) $2|A| = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i (b) iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

12. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} a-4 & 0 \\ 2 & a+2 \end{bmatrix}$ হলে-

(i) $B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $AB = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -15 & -3 \end{bmatrix}$

(iii) C ব্যতিক্রমীর ক্ষেত্রে $a = -4, 2$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i (b) ii (c) i, ii (d) i, ii, iii

সমাধান: (c); $B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

$\left\{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right.$ হলে, $|A| \neq 0$; $\left.A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right\}$

$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -15 & -3 \end{bmatrix}$ C ব্যতিক্রমী হলে, $|C| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a-4 & 0 \\ 2 & a+2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (a-4)(a+2) = 0 \Rightarrow a = 4, -2$

13. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটিতে- **[Ans: a]**

(i) a এর সহগুণক d (ii) b এর অনুরাশি c

(iii) নির্ণায়কের মান $ad - bc$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

14. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ হলে, (AB)C ম্যাট্রিক্সের ক্রম কত?

(a) 2×3 (b) 2×1
(c) 3×2 (d) 3×1

সমাধান: (b); A এর ক্রম 2×2; B এর ক্রম 2×3

AB এর ক্রম $= 2 \times 3$; C এর ক্রম $= 3 \times 1$

$\therefore$ (AB)C এর ক্রম $= 2 \times 1$

15. $|4(C + I_2)| =$ কত? যেখানে $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

(a) −32 (b) −8 (c) 8 (d) 32

সমাধান: (a); $C + I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \therefore 4[C + I_2] = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$

$|4(C + I_2)| = -4 \times (8) = -32$

16. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = ?$

(a) −8 (b) 0 (c) 8 (d) 12

সমাধান: (b); $2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; [দুটি কলাম একই হলে নির্ণায়কের মান শূন্য।]

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

17. AB = কত?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

সমাধান: (c); $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore A \cdot I = A$; যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

18. $A^T - B^T =$ কত?

(a) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

সমাধান: (d); $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore A^T - B^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 2 & x+y \\ x-y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ হলে, (x, y) কত?

(a) (3, 1) (b) (2, 0) (c) (1, 3) (d) (0, 2)

সমাধান: (a); $x + y = 4$ ……… (i)

এবং $x - y = 2$ ……… (ii)

এখন, (i) + (ii) করে পাই, $2x = 6 \therefore x = 3$

আবার, $y = x - 2 = 3 - 2 = 1 \therefore (x, y) = (3, 1)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

20. A এর ক্ষেত্রে- **[Ans: a]**

(i) (1, 1) তম অনুরাশি 4

(ii) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (iii) $2A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

21. $A^{-1} =$ কত?

(a) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

সমাধান: (c); $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ হলে,

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$\therefore |A| = ad - bc$

22. $A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 6 \\ x+1 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ এবং A = B হলে, x এর মান কত?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9

সমাধান: (a); $x + 1 = 7 \Rightarrow x = 6$

23. $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ হলে, A^T এর ক্রম কত? **[Ans: c]**
(a) 2×3 (b) 3×3 (c) 3×2 (d) 2×2

24. $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ হলে, (1, 2) তম ভুক্তির সহগুণক কোনটি?
(a) $a_2c_3 - a_3c_2$ (b) $a_3c_2 - a_2c_3$
(c) $b_1c_3 - b_3c_1$ (d) $b_3c_1 - b_1c_3$
সমাধান: (b); $(-1)^{1+2}[a_2c_3 - a_3c_2] = a_3c_2 - a_2c_3$

25. $A = \begin{bmatrix}-5 & 2 & -3\\1 & -5 & 6\\3 & -6 & -5\end{bmatrix}$ এবং $B = [-3 \ -2 \ -1]$ হলে, যা নির্ণয়যোগ্য-
(i) AB (ii) BA (iii) A^TB^T
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) i, iii (c) ii, iii (d) iii
সমাধান: (c); A এর ক্রম (3×3) এবং B এর ক্রম (1×3) ∴ AB সম্ভব না কিন্তু BA সম্ভব, কারণ B এর কলাম সংখ্যা = A এর সারি সংখ্যা। অনুরূপভাবে A^TB^Tও সম্ভব।

26. $\left.\begin{matrix}2x - 3y = 2\\2y - x = -1\end{matrix}\right\}$ সমীকরণ জোটের ম্যাট্রিক্স আকার কোনটি? **[Ans: b]**
(a) $\begin{bmatrix}2 & -3\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$
(b) $\begin{bmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$
(d) $\begin{bmatrix}2 & -3\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

27. নিচের কোন ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্সের যোগ্যতা আছে?
(a) $\begin{bmatrix}1 & -2\\-3 & 6\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}-2 & 3\\4 & -6\end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix}-6 & 2\\-3 & 1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}-1 & -2\\-3 & 6\end{bmatrix}$
সমাধান: (d); $|A| \neq 0; \begin{vmatrix}-1 & -2\\-3 & 6\end{vmatrix}$
$= -6 - 6 = -12 \neq 0 \therefore A^{-1}$ বিদ্যমান।

28. যদি $A = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$ হয় তবে, XA^2 হবে-
(a) $\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}x\\-y\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}-y\\-x\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}y\\-x\end{bmatrix}$
সমাধান: (d); $A^2 = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} \therefore A^2 = \begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y\\-x\end{bmatrix}$

29. A একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স এবং $|A| = -7$ হলে, $|(2A)^{-1}|$ এর মান হবে-
(a) $\frac{1}{14}$ (b) $-\frac{1}{56}$ (c) $-\frac{8}{7}$ (d) $-\frac{2}{7}$
সমাধান: (b); $|A| = -7 \therefore |(2A^{-1})|$
$= \frac{1}{2^3 \times |A|} = \frac{1}{8 \times (-7)} = -\frac{1}{56}$

30. A একটি 3×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স এবং I একটি একই ক্রমের ম্যাট্রিক্স হলে AI^3 এর মান কোনটি? **[Ans: b]**
(a) 3A (b) A
(c) 3AI (d) −A

এস ইউ আহাম্মদ স্যার

31. $\begin{vmatrix}a & a & x\\b & b & b\\c & x & c\end{vmatrix} = 0$ হলে, x এর মান–
(a) a, b c (b) a, c (c) b, c (d) a, b
সমাধান: (b); x = a হলে, $\begin{vmatrix}a & a & a\\b & b & b\\c & a & c\end{vmatrix} = 0$ [যে কোন দুটি সারি বা কলাম সমান হলে নির্ণায়ক = 0]
x = c হলে $\begin{vmatrix}a & a & c\\b & b & b\\c & c & c\end{vmatrix} = 0$

32. $A = \begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\0 & -2 & 1\\5 & 1 & 2\end{bmatrix}$ হলে, A এর রূপান্তরিত (Transpose) ম্যাট্রিক্স কোনটি? **[Ans: c]**
(a) $\begin{bmatrix}2 & 0 & 5\\3 & -2 & 1\\-4 & 1 & 2\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}2 & 0 & 5\\3 & -2 & 1\\5 & 1 & 6\end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix}2 & 0 & 5\\3 & -2 & 1\\5 & 1 & 2\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}2 & 0 & 5\\3 & -2 & 1\\5 & 3 & 8\end{bmatrix}$

33. A একটি তৃতীয় পর্যায়ের ম্যাট্রিক্স, যেখানে $|A| = 10$। $5|A| =$ কত? **[Ans: b]**
(a) 15 (b) 50 (c) 30 (d) 20

34. $A = \begin{bmatrix}0 & -1\\5 & 3\end{bmatrix}$ হলে, $AA^{-1} =$ কত? **[Ans: c]**
(a) $\begin{bmatrix}-5 & -3\\15 & 4\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$

35. যদি $\begin{bmatrix}2x - y & 5\\3 & y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 5\\3 & -2\end{bmatrix}$ হয়, তবে x এর মান কত?
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3
সমাধান: (c); $y = -2 \therefore 2x - y = 6$
$\Rightarrow 2x = 6 + y \therefore x = 2$

অসীম কুমার সাহা স্যার

36. $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, A - B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ হলে, $A =$ কত?
(a) $\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -7 & -6 \end{bmatrix}$
সমাধান: (c); $A + B + A - B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$
$\Rightarrow 2A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

37. যদি A এবং B ম্যাট্রিক্স হয় তবে $(AB)^t =$ কত? [Ans: a]
(a) B^tA^t (b) A^tB^t (c) AB (d) BA

38. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$
হলে– [Ans: a]
(i) $A^t = B$ (ii) $A^t = -C$ (iii) $B^{-1} = C$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

39. A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স B হলে– [Ans: d]
(i) $AB = BA = I$ (ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
(iii) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স।

40. কোন শর্তে ম্যাট্রিক্সটি স্কেলার হবে?
(a) $p = q = r$ (b) $p \neq q = r$
(c) $p = q + r$ (d) $p + q = r$
সমাধান: (a); বর্গ ম্যাট্রিক্সের $i \neq j$ অবস্থানে ভুক্তিগুলো 0 এবং $i = j$ অবস্থানে ভুক্তিগুলো সমান হলে তা স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

41. p, q, r এর কোন মানের জন্য ম্যাট্রিক্সটি অভেদক হবে?
(a) $p = q = r$ (b) $p = q = r = 1$
(c) $p = q = r = 0$ (d) $r = p + q$
সমাধান: (b); বর্গ ম্যাট্রিক্স এর $i \neq j$ অবস্থানে ভুক্তিগুলো 0 এবং $i = j$ অবস্থানে ভুক্তিগুলো সমান ও তা 1 হলে অভেদক ম্যাট্রিক্স।

42. $\begin{vmatrix} 2! & 3! & 2! \\ 3! & 2! & 4! \\ 0! & 3! & 2! \end{vmatrix} =$ কত?
(a) −208 (b) −140 (c) 140 (d) −280
সমাধান: (b); $2(4 - 6 \times 24) - 3!(12)$
$+2!(36 - 2) = -140$
এখানে, $0! = 1 \therefore 2!(4 - 6 \times 24) - 3!$
$(12 - 24) + 2!(36 - 2) = -140$

মোঃ রফিকুল ইসলাম স্যার

43. $\begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$ Matrix টির Trace কত? [Ans: c]
(a) $a_{11} + b_{12} + c_{13}$ (b) $a_{11} + a_{21} + a_{31}$
(c) $a_{11} + b_{22} + c_{33}$ (d) $a_{31} + b_{22} + c_{13}$

44. $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 5 \\ -2 & b & -3 \\ -5 & 3 & c \end{bmatrix}$ একটি বক্র প্রতিসম (skew symmetric) ম্যাট্রিক্স হলে a, b, c এর মানগুলো–
(a) −2, −5, 3 (b) 0, 0, 0 (c) 1, 1, 1 (d) 2, 5, 3
সমাধান: (b); বক্র প্রতিসম হলে,
$A^T = -A; \begin{bmatrix} a & -2 & -5 \\ 2 & b & 3 \\ 5 & -3 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -2 & -5 \\ 2 & -b & 3 \\ 5 & -3 & -c \end{bmatrix}$
$a = -a$ হলে, $a = 0 \therefore a = b = c = 0$

45. একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে বর্গ করে যদি একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাহলে A কে বলে– [Ans: c]
(a) শূন্য ম্যাট্রিক্স (b) শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স
(c) অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স (d) উপ ম্যাট্রিক্স

46. যদি ম্যাট্রিক্স $A = [-2 - 1\ 3]$ হয় এবং I একটি 3×3 ইউনিট ম্যাট্রিক্স হয় তাহলে $AI =$?
(a) 0 (b) $[0\ \ 0\ \ 0]$
(c) $[-2 - 1\ 3]$ (d) অসংজ্ঞায়িত
সমাধান: (c); $AI = [-2\ \ -1\ \ 3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$= [-2\ \ -1\ \ 3]$

47. তিনটি ম্যাট্রিক্স $[x\ \ y]\begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ এর গুণফলের মান হবে–
(a) $[x^2a + xyh\ \ \ xyh + y^2b]$
(b) $[x^2a + 2xyh + y^2b]$
(c) $\begin{bmatrix} x^2a + xyh \\ xyh + y^2b \end{bmatrix}$ (d) $[2ax^2 + xyh + 2by^2]$
সমাধান: (b); $[ax + hy\ \ \ hx + by]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
$= [ax^2 + hxy + hxy + by^2]$
$= [ax^2 + 2hxy + by^2]$

48. কোন নির্ণায়কের দুটি সারি বা কলাম একে অপরের গুণিতক হলে, ঐ নির্ণায়কের মান হবে– [Ans: b]
(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) 3

49. নির্ণায়কের দুইটি সারি বা কলাম সদৃশ হলে ঐ নির্ণায়কের মান হবে– [Ans: a]
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

50. নির্ণায়কের কোনো কলাম বা সারির অনুরূপ ভুক্তির একই গুণিতক দ্বারা হ্রাস বা বৃদ্ধি করা হলে নির্ণায়কের মানের– [Ans: b]
(a) পরিবর্তন হয় (b) পরিবর্তন হয় না
(c) গুণিতক হারে হ্রাস-বৃদ্ধি হয় (d) কোনোটিই নয়

51. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2x+7 \\ 2 & 7x & 9+5x \\ 0 & 0 & 2x+5 \end{vmatrix} = 0$ হলে, x এর মান কোনটি?
(a) $-\frac{9}{5}$ (b) $-\frac{7}{2}$ (c) $-\frac{5}{2}$ (d) 0
সমাধান: (c); $(2x+5)(0-6)=0$
$\Rightarrow 2x+5=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{2}$

52. $\begin{pmatrix} k\sqrt{k} & 2 \\ 2 & \sqrt{k} \end{pmatrix}$ একটি বাস্তব ম্যাট্রিক্স। k এর কোন মানের জন্য ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে না?
(a) -2 (b) 2 (c) ± 2 (d) $\sqrt{2}$
সমাধান: (b); $k\sqrt{k} \times \sqrt{k} - 4 = 0 \Rightarrow k^2 = 4$
$\therefore k = \pm 2$ যেহেতু বাস্তব ম্যাট্রিক্স $\sqrt{k} = \sqrt{-2}$ হবে না।
$\therefore k = 2$

53. $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স–
(a) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$
(c) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
সমাধান: (c); বিপরীত ম্যাট্রিক্স $= \frac{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$
$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

54. $\begin{bmatrix} i & i \\ 2i & i \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স কোনটি?
(a) $\begin{bmatrix} i & -i \\ 2i & -i \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -i & 2i \\ i & -i \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} i & 2i \\ i & i \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} i & -i \\ -2i & i \end{bmatrix}$
সমাধান: (d); $= \frac{1}{i^2-2i^2}\begin{bmatrix} i & -i \\ -2i & i \end{bmatrix} = \frac{1}{-1+2}\begin{bmatrix} i & -i \\ -2i & i \end{bmatrix}$

55. কোনটি বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য নয়? [Ans: b]
(a) $(A^{-1})^{-1} = A$ (b) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
(c) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (d) $(BA)A^{-1} = B$

56. $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ এর মান কোনটি?
(a) 4xyz (b) 2xyz (c) -1
(d) $2(x-y)(y-z)(z-x)$
সমাধান: (a); $x=1, y=1, z=1$ হলে,
$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(4-1) - 1(2-1) + 1(1-2)$
$= 6 - 1 - 1 = 4$
$\therefore$ option test করে $4xyz = 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4$

57. (i) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ হলে, $|7A|$ এর মান–
(a) 30 (b) 210 (c) 1470 (d) 10290
সমাধান: (d); (i) $|A| = 3(10-0) = 30$
$\therefore |7A| = 7^3 \times |A| = 343 \times 30 = 10290$

58. (ii) A একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স এবং A এর নির্ণায়ক $|A| = 5$ হলে, $|2A|$ নির্ণায়কের মান–
(a) 10 (b) 20 (c) 30 (d) 40
সমাধান: (d); (ii) $|A| = 5$
$\therefore |2A| = 2^3 \times |A| = 8 \times 5 = 40$

এ.টি.এস.এম. মাসুদুল হাকিম স্যার

59. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & \alpha & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির Trace এর মান 7 হলে, α এর মান কত?
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4
সমাধান: (c); $1 + \alpha + 4 = 7 \therefore \alpha = 2$

60. ম্যাট্রিক্স $M = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ হলে, $M^TI =$ কোনটি? [Ans: b]
(a) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -4 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 7 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

61. ম্যাট্রিক্স গুণনের ক্ষেত্রে, নিচের কোনটি সত্য? [Ans: c]
(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(1\ -1) = (0\ 0)$
(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(1\ -1) = (0\ 0)$
(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(1\ -1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(1\ -1) = (2)$

62. $[1\ \ 3]\begin{bmatrix} y & x \\ 5 & x \end{bmatrix} = [12\ \ 4]$ হলে, (x, y) এর মান কত?
(a) $(-3, -1)$ (b) $(-3, 1)$ [Ans: d]
(c) $(1, 1)$ (d) $(1, -3)$

63. যদি $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ হয়, তবে $A(\text{Adj } A) = ?$ যেখানে Adj A হলো A এর অ্যাডজয়েন্ট (adjoint) ম্যাট্রিক্স।
(a) $\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & -\frac{7}{2} \\ -2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$
সমাধান: (c); $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow A \cdot \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} I$
$\Rightarrow A(\text{Adj } A) = I|A| \therefore |A| = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 28 = 2$
$\therefore A(\text{Adj } A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
বিকল্প: যেকোন দুটি সারি বা কলাম সমান হলে নির্ণায়কের মান শূণ্য। $\therefore P = 3$ হলেই দুটি সারি সমান হবে। $\therefore P = 3$

64. মনে কর $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} x & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
$A = B^{-1}$ হলে, $x =$ কত? [Ans: a]
(a) $\frac{5}{2}$ (b) 1 (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{2}{5}$

MCQ: সম্ভাব্য নমুনা প্রশ্ন ও সমাধান

01. $\begin{bmatrix}1 & 8\\3 & 4\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির ট্রেস হলো-
(a) 5 (b) 11 (c) 9 (d) 7
সমাধান: (a); Trace হল মুখ্য কর্ণের উপাদানগুলোর যোগফল।

02. ম্যাট্রিক্স গঠনকারী সংখ্যাগুলিকে বলা হয়- [Ans: b]
(a) ঘাত (b) ভুক্তি (c) সারি (d) কলাম

03. কোন নির্ণায়কের একটি সারি বা কলামের সকল ভুক্তি 0 হলে, নির্ণায়কটির মান- [Ans: b]
(a) $\frac{1}{2}$ হবে (b) 0 হবে (c) 1 হবে (d) 10 হবে

04. একটি ম্যাট্রিক্সের ক্রম 3×5 হলে, ম্যাট্রিক্সটি নিচের কোনটি হবে? [Ans: c]
(a) কর্ণ (b) বর্গ
(c) আয়তাকার (d) স্কেলার

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A = \begin{pmatrix}5 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$$

05. $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}$ এবং $AX = B$ হলে $x + y =$ কত?
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 7
সমাধান: (c); $AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix}5 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\7\end{bmatrix}$
$\Rightarrow \begin{bmatrix}5x+2y\\3x+4y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\7\end{bmatrix}$
$\therefore 5x + 2y = 7$; $3x + 4y = 7$; $x = 1$
$y = 1 \therefore x + y = 2$

06. A ম্যাট্রিক্সের ক্রম 1×3 এবং B ম্যাট্রিক্সের ক্রম 2×3 হলে নিচের কোন ম্যাট্রিক্স গুণনটি নির্ণয় করা সম্ভব?
(a) AB (b) BA (c) A^TB (d) AB^T
সমাধান: (d); $B^T = 3 \times 2; A = 1 \times 3 \therefore AB^T$ সম্ভব।

07. $A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$ হলে $A^3 - A^2$ এর মান নিচের কোনটি?
(a) I (b) 2I (c) A (d) 2A
সমাধান: (d); $A = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$
$A^2 = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$
$A^3 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 8\end{bmatrix}$
$\therefore A^3 - A^2 = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 8\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & 4\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} = 2A$

08. $\begin{bmatrix}a+5 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}$ একটি–
(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স
(ii) $a = 1$ হলে ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে
(iii) $a = 1$ হলে ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হবে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) i, ii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (b); $a = 1$ হলে $A = \begin{bmatrix}6 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}$
$|A| = 6 - 6 = 0 \therefore$ ব্যতিক্রমী।

09. $A_{2\times3}$ এবং $B_{3\times2}$ ম্যাট্রিক্স হলে- [Ans: b]
(i) AB নির্ণয় সম্ভব (ii) $A + B$ নির্ণয় সম্ভব
(iii) A, B এর গুণফল $C_{2\times2}$ হবে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

10. $A = \begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\-2 & 0 & 4\\-3 & -4 & 0\end{bmatrix}$ এর জন্য-
(i) $\det(A) = 0$ (ii) $A.A^{-1} = I_3$
(iii) $A^T = -A$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (b); $\det(A) = 0 \therefore A^{-1}$ সংজ্ঞায়িত নয়।
$A^T = -A$

11. a এর মান কত হলে $\begin{bmatrix}2 & 3\\0 & a\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতকরণযোগ্য নয়?
(a) $\frac{3}{2}$ (b) $-\frac{3}{2}$ (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$
সমাধান: (c); $a = 0$ হলে $|A| = 0$ হয়।

12. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\x & a & b\\x^2 & a^2 & b^2\end{bmatrix} = 0$ হলে, x এর মান কত?
(a) $a, b - a$ (b) $a, -b$
(c) $-a, b$ (d) $-a, -b$
সমাধান: (a); $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\x & x-a & b\\x^2 & x^2-a^2 & b^2\end{vmatrix} = 0$
$\Rightarrow b(x-a)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\x & 1 & 1\\x^2 & x+a & b\end{vmatrix} = 0$
$\Rightarrow b(x-a)(x-b+a) = 0 \Rightarrow x = a, b-a$

13. একটি 3×2 ক্রম ম্যাট্রিক্সের যে কোন সারিতে কয়টি ভুক্তি আছে?

(a) 2 (b) 3 (c) 6 (d) 9

সমাধান: (a); $A_{3,2} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \\ A_5 & A_6 \end{bmatrix}$

14. $A = (a_{ij})_{m\times m}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে- [Ans: a]

(i) A কে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হয় যদি $A^T = A$ হয়

(ii) A কে বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^T = -A$ হয়

(iii) A কে অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A^n = 0$ হয়

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

15. নিচের কোনটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স?

(a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

সমাধান: (b); $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = A$ ∴ সমঘাতি ম্যাট্রিক্স।

16. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ হয় তাহলে-

(i) $|A^2| = |A|$ (ii) $|A^2| = 2|A|$

(iii) $|A^3| = 8$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); $|A| = 2$; $|A^2| = |A||A| = 4$

$2|A| = 4$; $|A^3| = 2^3 = 8$

17. A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স B হলে- [Ans: d]

(i) $AB = BA = I$ (ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(iii) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

18. $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix}$ এর মান কোনটি?

(a) 1 (b) abc

(c) abc (a + b + c) (d) 0

সমাধান: (d); $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & bc & bc(b+c) \\ abc & ca & ca(c+a) \\ abc & ab & ab(a+b) \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & bc & bc(a+b+c) \\ abc & ca & ca(a+b+c) \\ abc & ab & ab(a+b+c) \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & bc & bc \\ 1 & ca & ca \\ 1 & ab & ab \end{vmatrix} = 0$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের- [Ans: d]

(i) ভুক্তি সংখ্যা 6 (ii) সারি সংখ্যা 2

(iii) কলাম সংখ্যা 3

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

20. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ হলে $(AB)^{-1}$ এর মান কত?

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

সমাধান: (a); $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ -7 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ কী ধরনের ম্যাট্রিক্স? [Ans: d]

(a) কর্ণ (b) স্কেলার

(c) উর্ধ্ব ত্রিভুজাকার (d) নিম্ন ত্রিভুজাকার

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$A = \begin{bmatrix} 51 & 26 \\ 13 & 12 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 26 & 51 \end{bmatrix}$ দুটি ম্যাট্রিক্স।

22. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর:

(i) $(A+B)^T = A + B$

(ii) A হল B এর Transpose

(iii) $|A| = |B|$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); $(A+B)^T = \begin{bmatrix} 63 & 39 \\ 39 & 63 \end{bmatrix}^T = (A+B)$

$B^T = \begin{bmatrix} 12 & 26 \\ 13 & 51 \end{bmatrix} \neq A$; $|A| = \begin{vmatrix} 51 & 26 \\ 13 & 12 \end{vmatrix}$

$= 51 \times 12 - 13 \times 26 = \begin{vmatrix} 12 & 13 \\ 26 & 51 \end{vmatrix} = |B|$

23. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ এটি- [Ans: c]

(i) শূন্যঘাতী ম্যাট্রিক্স (ii) বর্গ ম্যাট্রিক্স
(iii) উদঘাতি ম্যাট্রিক্স
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) ii (c) i, ii (d) i, ii, iii

24. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ এর শূন্যঘাতীর সূচক কত?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

সমাধান: (b); $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ সূচক $= 3$

25. ω এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল এবং $A = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}$ হলে, $A^{100} = ?$

(a) A (b) A^7 (c) A^{10} (d) সবগুলো

সমাধান: (d); $A = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}$

$A^{100} = \begin{bmatrix} \omega^{100} & 0 \\ 0 & \omega^{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}$

অনুরূপভাবে, $A^7 = A^{10} = A = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & z \\ y & -3 \end{bmatrix}$ হলে $(x, y, z) = ?$

(a) $(3, 3, 4)$ (b) $(3, 4, 3)$
(c) $(3, -3, 4)$ (d) $(1, -3, -1)$

সমাধান: (b); $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

$\therefore x = 3; y = 4; z = 3$

27. নিচের কোনটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স? [Ans: a]

(a) $\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} b & -b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & -b \\ -b & b \end{bmatrix}$

28. a এর কোন মানের জন্য $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & a \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি প্রতিসম হবে? [Ans: a]

(a) 4 (b) 0 (c) -1 (d) -4

29. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, B = [3 \quad -2 \quad -1]$ এবং $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ হলে কোনটি নির্ণয়যোগ্য? [Ans: a]

(a) AB (b) B + A (c) A − C (d) CB

30. $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 5 \\ -2 & b & -3 \\ -5 & 3 & c \end{bmatrix}$ একটি বক্র প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে, a, b, c এর মানগুলি–

(a) $-2, -5, 3$ (b) $0, 0, 0$
(c) $1, 1, 1$ (d) $2, 5, 3$

সমাধান: (b); $\begin{bmatrix} a & 2 & 5 \\ -2 & b & -3 \\ -5 & 3 & c \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a & -2 & -5 \\ 2 & b & 3 \\ 5 & -3 & c \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -a & 2 & 5 \\ -2 & -b & -3 \\ -5 & 3 & -c \end{bmatrix} \therefore a = -a \therefore a = 0$

$b = -b \therefore b = 0; c = -c \therefore c = 0$

31. নির্ণায়কের দুইটি সারি বা কলাম সদৃশ হলে ঐ নির্ণায়কের মান হবে- [Ans: a]

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

32. কোন নির্ণায়কের দুটি সারির বা কলামের ভুক্তিগুলি একে অপরের গুণিতক হলে, ঐ নির্ণায়কের মান হবে- [Ans: b]

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) 3

33. যদি I_3 একটি তিন ক্রমের ইউনিট ম্যাট্রিক্স হয়, তবে $|(I_3)^{-1}| = ?$ [Ans: b]

(a) -30 (b) 1 (c) 0 (d) 30

34. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & k \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান 2; k এর মান? [Ans: a]

(a) 9 (b) 8 (c) 7 (d) 6

35. $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স; ম্যাট্রিক্সটি অভেদক হবে, যখন– [Ans: b]

(a) $x = y = z = 0$ (b) $x = y = z = 1$
(c) $x = y + z$ (d) $x = y = z = 2$

সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

◆ CQ: বিগত বছরসমূহের বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান

01. $A = \begin{bmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -2 & x+1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}$ [DB'22]

(ক) দেখাও যে, B একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স। 2

(খ) $|A| = 0$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) $(A^T)^{-1}$ নির্ণয় কর যখন, $x = 0$ হয়। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}$

এখন, $B^2 = B \times B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25-20 & 10-8 \\ -50+40 & -20+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}$

$\therefore B^2 = B$; সুতরাং, B একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স (দেখানো হলো)।

খ. দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -2 & x+1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$

$\therefore |A| = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -2 & x+1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 2 \\ x+2 & x+1 & 3 \\ x+2 & 0 & x \end{vmatrix} [c_1' = c_1 + c_2 + c_3] = (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & x+1 & 3 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}$

$= (x+2)\begin{vmatrix} 0 & -x & -1 \\ 0 & x+1 & 3-x \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} [r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= (x+2)[0+0+1\{(-3x+x^2)+(x+1)\}]$ [১ম কলাম বরাবর বিস্তার করে]

$= (x+2)(x^2-2x+1)$

এখন, $|A| = (x+2)(x-1)^2$

$\therefore |A| = 0$ হলে, $(x+2)(x-1)^2 = 0$

হয়, $x+2=0 \therefore x=-2$ | অথবা, $(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x-1=0 \therefore x=1$

$\therefore |A| = 0$ হলে, $x = 1, -2$

গ. ধরি, $C = A^T$

এখন, $x=0$ হলে, $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \therefore C = A^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$|C| = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(3-2) = 2$

$|C| \neq 0$ অর্থাৎ c^{-1} নির্ণয়যোগ্য।

এখন, $c_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $c_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $c_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-2 = 1$

$c_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -(0-6) = 6$; $c_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0-4 = -4$

$c_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-3+4) = -1$; $c_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0-2 = -2$

$c_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$; $c_{33} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1+2) = 1$

$\therefore C^{-1} = \frac{1}{|C|}\text{Adj}C = \frac{1}{|C|}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & -4 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$

$C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 6 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

02. $M = \begin{bmatrix} p-q-r & 2q & 2r \\ 2p & q-r-p & 2r \\ 2p & 2q & r-p-q \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ এবং $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ **[DB'22]**

(ক) $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 5 & x-2 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে, x এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $|M| = (p+q+r)^3$. 4

(গ) উদ্দীপকে $p = q = r = 1$ হলে, $MX = N$ কে ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে তার নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

$\therefore \begin{vmatrix} x & 3 \\ 5 & x-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(x-2) - 5 \times 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 3x - 15 = 0 \Rightarrow x(x-5) + 3(x-5) = 0 \Rightarrow (x-5)(x+3) = 0$

$\therefore x = 5, -3$ **(Ans.)**

খ. এখানে, $|M| = \begin{vmatrix} p-q-r & 2q & 2r \\ 2p & q-r-p & 2r \\ 2p & 2q & r-p-q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p+q+r & 2q & 2r \\ p+q+r & q-r-p & 2r \\ p+q+r & 2q & r-p-q \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$

$= (p+q+r)\begin{vmatrix} 1 & 2q & 2r \\ 1 & q-r-p & 2r \\ 1 & 2q & r-p-q \end{vmatrix}$

$= (p+q+r)\begin{vmatrix} 0 & p+q+r & 0 \\ 0 & -(p+q+r) & p+q+r \\ 1 & 2q & r-p-q \end{vmatrix}$ $[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$|M| = (p+q+r).1\begin{bmatrix} p+q+r & 0 \\ -(p+q+r) & p+q+r \end{bmatrix}$ [১ম কলাম বরাবর বিস্তার করে]

$= (p+q+r)\{(p+q+r)(p+q+r) - 0\} \therefore |M| = (p+q+r)^3$ (প্রমাণিত)

গ. $p = q = r = 1$ হলে, $M = \begin{bmatrix} 1-1-1 & 2 & 2 \\ 2 & 1-1-1 & 2 \\ 2 & 2 & 1-1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

শর্তমতে, $MX = N \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \therefore \begin{bmatrix} -x+2y+2z \\ 2x-y+2z \\ 2x+2y-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\therefore -x + 2y + 2z = -3 ;\ 2x - y + 2z = 0 ;\ 2x + 2y - z = 3$

এখানে, $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1(1-4) - 2(-2-4) + 2(4+2) = 3 + 12 + 12 = 27 \neq 0$

$\therefore$ সমীকরণ জোটটির সমাধান বিদ্যমান।

$\therefore D_x = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3(1-4) - 2(0-6) + 2(0+3) = 9 + 12 + 6 = 27$

আবার, $D_y = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -1(0-6) + 3(-2-4) + 2(6-0) = 6 - 18 + 12 = 0$

এবং, $D_z = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1(-3-0) - 2(6-0) - 3(4+2) = 3 - 12 - 18 = -27$

$\therefore x = \frac{D_x}{D} = \frac{27}{27} = 1, y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{27} = 0$ এবং $z = \frac{D_z}{D} = -\frac{27}{27} = -1 \therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y, z) = (1, 0, -1)$

03. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ **[RB'22]**

(ক) বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স ব্যাখ্যা কর। 2

(খ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $A^2 - 5A - 14I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স। 4

(গ) উদ্দীপকের আলোকে A^{-1} নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Skew symmetric matrix): একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স A^Tএবং $A = -A^T$ হলে তাকে বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলে। বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে মুখ্যকর্ণের ভুক্তিগুলো শূন্য হয় এবং (i, j) ও (j, i) তম ভুক্তি পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হয় যেখান $i \neq j$

উদাহরণ: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ হলে $A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -A$

অর্থাৎ $A = -A^T$; সুতরাং A ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম।

খ. দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+9+9 & 3+3+9 & 3+9+3 \\ 3+3+9 & 9+1+9 & 9+3+3 \\ 3+9+3 & 9+3+3 & 9+9+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 15 & 15 \\ 15 & 19 & 15 \\ 15 & 15 & 19 \end{bmatrix}$$

প্রদত্ত রাশি $= A^2 - 5A - 14I$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 15 & 15 \\ 15 & 19 & 15 \\ 15 & 15 & 19 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} - 14\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 15 & 15 \\ 15 & 19 & 15 \\ 15 & 15 & 19 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 15 & 15 \\ 15 & 5 & 15 \\ 15 & 15 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 15 & 15 \\ 15 & 19 & 15 \\ 15 & 15 & 19 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 19 & 15 & 15 \\ 15 & 19 & 15 \\ 15 & 15 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19-19 & 15-15 & 15-15 \\ 15-15 & 19-19 & 15-15 \\ 15-15 & 15-15 & 19-19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore A^2 - 5A - 14I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স (প্রমাণিত)।

গ. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$ এখন, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-9) - 3(3-9) + 3(9-3) = -8 + 18 + 18 = 28 \neq 0 \therefore A^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

আবার, $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 9 = -8$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(3-9) = 6$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 3 = 6$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = A_{12} = 6$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = A_{11} = -8$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -(3-9) = 6$; $A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 3 = 6$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = A_{23} = 6$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = A_{11} = -8$

এখন, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}A$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} -8 & 6 & 6 \\ 6 & -8 & 6 \\ 6 & 6 & -8 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} -8 & 6 & 6 \\ 6 & -8 & 6 \\ 6 & 6 & -8 \end{bmatrix} = A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{3}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{3}{14} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{14} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

04. $A = \begin{bmatrix} 3+x & 4 & 1 \\ 4 & 1+x & 3 \\ 1 & 3 & 4+x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2+x & b+x & c+x \\ 2+y & b+y & c+y \\ 4 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$ **[RB'22]**

(ক) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ হলে $B.B^t$ নির্ণয় কর। 2

(খ) দেখাও যে, $\det(B) = (2-b)(b-c)(c-2)(x-y)$ 4

(গ) $\det(A) = 0$ সমীকরণের বাস্তব মূল নিয়ে A এর ট্রেস নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \therefore B^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

এখন, $B.B^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times2+1\times1 & 2\times0+1\times2 \\ 0\times2+2\times1 & 0\times0+2\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & 0+2 \\ 0+2 & 0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

খ. দেওয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} 2+x & b+x & c+x \\ 2+y & b+y & c+y \\ 4 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$

$\therefore \det(B) = \begin{vmatrix} 2+x & b+x & c+x \\ 2+y & b+y & c+y \\ 4 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-b & b-c & c+x \\ 2-b & b-c & c+y \\ 4-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix} [c_1' = c_1 - c_2,\ c_2' = c_2 - c_3]$

$= \begin{vmatrix} 2-b & b-c & c+x \\ 2-b & b-c & c+y \\ (2+b)(2-b) & (b+c)(b-c) & c^2 \end{vmatrix} = (2-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & c+x \\ 1 & 1 & c+y \\ 2+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$

$= (2-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & x-y \\ 1 & 1 & c+y \\ 2+b & b+c & c^2 \end{vmatrix} [r_1' = r_1 - r_2]$

$= (2-b)(b-c)\{0+0+(x-y)(b+c-2-b)\} = (2-b)(b-c)\{(x-y)(c-2)\}$

$\therefore \det(B) = (2-b)(b-c)(c-2)(x-y)$ **(Showed)**

গ. দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 3+x & 4 & 1 \\ 4 & 1+x & 3 \\ 1 & 3 & 4+x \end{bmatrix}$

এখন, $\det(A) = \begin{vmatrix} 3+x & 4 & 1 \\ 4 & 1+x & 3 \\ 1 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+x+4+1 & 4+1+x+3 & 1+3+4+x \\ 4 & 1+x & 3 \\ 1 & 3 & 4+x \end{vmatrix} [r_1' = r_1 + r_2 + r_3]$

$= \begin{vmatrix} x+8 & x+8 & x+8 \\ 4 & 1+x & 3 \\ 1 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = (x+8)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1+x & 3 \\ 1 & 3 & 4+x \end{vmatrix}$

$= (x+8)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3-x & x-2 & 3 \\ -2 & -x-1 & 4+x \end{vmatrix} [c' = c_1 - c_2,\ c_2' = c_2 - c_3]$

$= (x+8)[0+0+1\{(3-x)(-x-1)-(x-2)(-2)\}]$

$\therefore \det(A) = (x+8)(x^2-7)$

$\det(A) = 0$ হলে, $(x+8)(x^2-7) = 0$

হয়, $x+8 = 0 \therefore x = -8$ অথবা, $x^2 - 7 = 0 \Rightarrow x^2 = 7 \therefore x = \pm\sqrt{7}$

আবার, $A = \begin{bmatrix} 3+x & 4 & 1 \\ 4 & 1+x & 3 \\ 1 & 3 & 4+x \end{bmatrix} \therefore \text{Trace}(A) = (3+x)+(1+x)+(4+x) = 8+3x$

$\therefore x = -8$ হলে, $\text{Trace}(A) = 8+3(-8) = -16$

$x = \sqrt{7}$ হলে, $\text{Trace}(A) = 8+3\sqrt{7}$; $x = -\sqrt{7}$ হলে, $\text{Trace}(A) = 8+3(-\sqrt{7}) = 8-3\sqrt{7}$

05. $N = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ **[Ctg.B'22]**

(ক) $\begin{pmatrix} c & -5 & -6 \\ 5 & 2c & 3 \\ a & -3 & c \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম হলে, $c + a = ?$ 2

(খ) $NX = B$ হলে ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে সমীকরণ জোটটি সমাধান কর। 4

(গ) $MN = I_3$ (অভেদক ম্যাট্রিক্স) হলে M ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\begin{bmatrix} c & -5 & -6 \\ 5 & 2c & 3 \\ a & -3 & c \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম।

অর্থাৎ, $c = 0, a = -(-6) = 6 \therefore c + a = 0 + 6 = 6$ **(Ans.)**

খ. 02 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

গ. দেওয়া আছে, $MN = I_3$; M ম্যাট্রিক্স টি N ম্যাট্রিক্স এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স।

$N = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; $|N| = 1(-1-4) + 2(-2+4) + 2(4+2) = 11 \neq 0 \therefore$ M ম্যাট্রিক্স নির্ণয়যোগ্য।

এখন, $N_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5$; $N_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -(-2+4) = -2$

$N_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (4+2) = 6$; $N_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(2-4) = 2$

$N_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 = 3$; $N_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -(2-4) = 2$

$N_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-4-2) = -6$; $N_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2-4) = 2$

$N_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5 \therefore M = N^{-1} = \frac{Adj(N)}{|N|} = \frac{\begin{bmatrix} -5 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ -6 & 2 & 5 \end{bmatrix}^t}{11} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -5 & 2 & -6 \\ -2 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

06. $A = \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ a^4 - 2a & b^4 - 2b & c^4 - 2c \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = 5x^2 - 11x$. **[Ctg.B'22]**

(খ) $f(p) + 6I_2$ নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $det(A) = abc(abc-2)(a-b)(b-c)(c-a)$. 4

সমাধান

খ. $f(x) = 5x^2 - 11x$

এখন, $P = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \therefore P^2 = \begin{bmatrix} 15 & -8 \\ -12 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow 5P^2 = \begin{bmatrix} 75 & -40 \\ -60 & 35 \end{bmatrix}$

$\therefore f(P) + 6I_2 = 5P^2 - 11P + 6I_2 = \begin{bmatrix} 75 & -40 \\ -60 & 35 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -33 & 22 \\ 33 & -11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 114 & -62 \\ -93 & 52 \end{bmatrix}$

গ. $|A| = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ a^4 - 2a & b^4 - 2b & c^4 - 2c \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 - 2 & b^3 - 2 & c^3 - 2 \end{vmatrix}$

$= abc\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} - abc\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = abc \times abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} - abc \times 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$= abc(abc-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = abc(abc-2)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$

$= abc(abc-2)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & b+c \end{vmatrix} = abc(abc-2)(a-b)b-c)(b+c-a-b)$

$= abc(abc-2)(a-b)(b-c)(c-a)$ (প্রমাণিত)

07. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & 2 & -2 \\ y & 5 & -4 \\ z & 7 & -5 \end{bmatrix}$ **[SB'22]**

(ক) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ হলে $A + A^T$ নির্ণয় কর। **2**

(খ) A^{-1} নির্ণয় কর। **4**

(গ) $AB = I_3$ থেকে ক্রেমারের সূত্রের সাহায্যে (x, y, z) নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

ক. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \therefore A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \therefore A + A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$

খ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

গ. $AB = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2 & -2 \\ y & 5 & -4 \\ z & 7 & -5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3x - 4y + 2z & 6 - 20 + 14 & -6 + 16 - 10 \\ -2x + y + 0 & -4 + 5 + 0 & 4 - 4 + 0 \\ -x - y + z & -2 - 5 + 7 & 2 + 4 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 4y + 2z & 0 & 0 \\ -2x + y & 1 & 0 \\ -x - y + z & 0 & 1 \end{bmatrix}$

দেওয়া আছে, $AB = I_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3x - 4y + 2z & 0 & 0 \\ -2x + y & 1 & 0 \\ -x - y + z & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

অর্থাৎ, $3x - 4y + 2z = 1$

$-2x + y = 0 \,;\, -x - y + z = 0$

এখন, $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3(1 - 0) + 4(-2 - 0) + 2(2 + 1) = 3 - 8 + 6 = 1$

$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1 - 0) + 4(0 - 0) + 2(0 - 0) = 1$

$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3(0 - 0) - 1(-2 - 0) + 2(0 - 0) = 2$

$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3(0 - 0) + 4(0 - 0) + 1(2 + 1) = 3$

$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1 \therefore y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2 \therefore z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3 \therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

08. $P = \begin{vmatrix} 2x - 5 & 2x & 2x \\ 2y & 2y - 5 & 2y \\ 2z & 2z & 2z - 5 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ **[SB'22]**

(ক) $2\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = x^2$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। **2**

(খ) B নির্ণায়কের ২য় সারির উপাদান গুলোর সহগুণক যথাক্রমে A_2, B_2 এবং C_2 হলে, $a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2$ এর মান নির্ণয় কর। **4**

(গ) $x + y + z = S$ হলে, দেখাও যে, $P = S^3$. **4**

সমাধান

ক. $2\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = x^2 \Rightarrow 2(3 - 2x) = x^2 \Rightarrow 6 - 4x = x^2 \Rightarrow x^2 + 4x - 6 = 0 \therefore x = -2 \pm \sqrt{10}$

খ. $A_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(b_1c_3 - b_3c_1) = b_3c_1 - b_1c_3 \,;\, B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1c_3 - a_3c_1$

$C_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -(a_1b_3 - a_3b_1) = a_3b_1 - a_1b_3$

প্রদত্ত রাশি $= a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 = a_3(b_3c_1 - b_1c_3) + b_3(a_1c_3 - a_3c_1) + c_3(a_3b_1 - a_1b_3)$

$= a_3b_3c_1 - a_3b_1c_3 + a_1b_3c_3 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 - a_1b_3c_3 = 0$

গ. $P = \begin{vmatrix} 2x-5 & 2x & 2x \\ 2y & 2y-5 & 2y \\ 2z & 2z & 2z-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+2y+2z-5 & 2x+2y+2z-5 & 2x+2y+2z-5 \\ 2y & 2y-5 & 2y \\ 2z & 2z & 2z-5 \end{vmatrix} [r_1' = r_1 + r_2 + r_3]$

$= (2x+2y+2z-5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2y & 2y-5 & 2y \\ 2z & 2z & 2z-5 \end{vmatrix}$

$= \{(2x+2y+2z)-5\}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & -5 & 24 \\ 0 & 5 & 2z-5 \end{vmatrix} [c_1' = c_1 - c_2,\ c_2' = c_2 - c_3]$

$= \{2(x+y+z)-5\}\{1(5\times5-0)\} = 2(x+y+z)\cdot25 - 5^3$

$= 50(x+y+z) - 125 = 50S - 125\ [\because x+y+z = S]$ **(Showed)**

[বি:দ্র: প্রশ্ন অনুযায়ী উত্তর হবার কথা **$50S - 125$**]

09. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^2 + 3x - 5I$. **[BB'22]**

(ক) বিস্তার না করিয়া প্রমাণ কর যে, $\begin{bmatrix} 1 & a & a-2 \\ 2 & b & b-4 \\ 3 & c & c-6 \end{bmatrix} = 0$. 2

(খ) $f(A)$ নির্ণয় কর। 4

(গ) A^{-1} নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\begin{bmatrix} 1 & a & a-2 \\ 2 & b & b-4 \\ 3 & c & c-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & a-2 \\ b & b & b-4 \\ c & c & c-6 \end{bmatrix} [c_1' = 2c_1 + c_3] = \begin{bmatrix} 0 & a & a-2 \\ 0 & b & b-4 \\ 0 & c & c-6 \end{bmatrix} [C_1' = C_1 - C_2]$

যেহেতু, নির্ণায়কটির একটি কলামের সকল ভুক্তি শূন্য, তাই নির্ণায়কটির মান শূন্য (প্রমাণিত)।

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + 3x - 5I$; $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0+2 & 0+0+1 & 2+0+3 \\ 6+12+4 & 0+16+2 & 3+8+6 \\ 4+3+6 & 0+4+3 & 2+2+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 22 & 18 & 17 \\ 13 & 7 & 13 \end{bmatrix}$

এখন, $f(A) = A^2 + 3A - 5I$

$= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 12 & 18 & 17 \\ 13 & 7 & 13 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 22 & 18 & 17 \\ 13 & 7 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 9 & 12 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6+6-5 & 1+0-0 & 5+3-0 \\ 22+9-0 & 18+12-5 & 17+6-0 \\ 13+6-0 & 7+3-0 & 13+9-5 \end{bmatrix}$; $f(A) = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 8 \\ 31 & 25 & 23 \\ 19 & 10 & 17 \end{bmatrix}$

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

10. $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. **[JB'22]**

(ক) দুইটি ম্যাট্রিক্সের গুনন যোগ্যতা ব্যাখ্যা কর। 2

(খ) $f(x) = x^2 - 3x$ হলে $f(p)$ নির্ণয় কর। 4

(গ) $P^TR = Q$ থেকে প্রাপ্ত সমীকরণ জোটকে নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. দুটি ম্যাট্রিক্স কেবল তখনই গুণ করা যায় যখন প্রথম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের সারির সমান হবে। অর্থাৎ, $A_{m\times n}$ এবং $B_{r\times p}$ ম্যাট্রিক্স দুটির ম্যাট্রিক্স গুনন করা যাবে যদিও কেবল যদি $n = r$ হয় এবং গুণফল $AB_{m\times p}$ আকারের হবে।

খ. 09 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ

গ. দেওয়া আছে, $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \therefore P^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

$\therefore P^TR = Q \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ আবার, $P^TR = Q \Rightarrow (P^T)^{-1}P^TR = (P^T)^{-1}Q \Rightarrow R = (P^T)^{-1}Q$

$\therefore |P^T| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \\ -3 & 11 & -5 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} C_1' = C_1 - C_2 \\ C_2' = C_2 - C_3 \end{bmatrix} = 1\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} = 66 - 9 = 57 \neq 0$

$\therefore P^T$ ম্যাট্রিক্সটি অব্যতিক্রমী; অর্থাৎ, $(P^T)^{-1}$ নির্ভরযোগ্য।

$P_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = -7$; $P_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 31$; $P_{13} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 33$; $P_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 11$

$P_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -8$; $P_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3$; $P_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$; $P_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3$; $P_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -6$

$\therefore (P^T)^{-1} = \frac{adj\,(P^T)}{|P^T|} = \frac{\begin{pmatrix} -7 & 31 & 33 \\ 11 & -8 & -3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}^T}{57} = \frac{1}{57}\begin{pmatrix} -7 & 11 & 3 \\ 31 & -8 & 3 \\ 33 & -3 & -6 \end{pmatrix} \therefore (P^T)^{-1}Q = \begin{pmatrix} -\frac{7}{57} & \frac{11}{57} & \frac{1}{19} \\ \frac{31}{57} & \frac{-8}{57} & \frac{1}{19} \\ \frac{11}{19} & \frac{-1}{19} & \frac{-2}{19} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

11. $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a^3+1 & 2b^3+1 & 2c^3+1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$. **[JB'22]**

(ক) বিস্তার না করে প্রমাণ কর $\begin{vmatrix} a & -x & a+x \\ b & -y & b+y \\ c & -z & c+z \end{vmatrix} = 0$. 2

(খ) দেখাও যে, $(ST)^{-1} - T^{-1}S^{-1}$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $|U| = -(2abc-1)(a-b)(b-c)(c-a)$. 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\begin{vmatrix} a & -x & a+x \\ b & -y & b+y \\ c & -z & c+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -x & a \\ b & -y & b \\ c & -z & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & -x & x \\ b & -y & y \\ c & -z & z \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & -x & a \\ 0 & -y & b \\ 0 & -z & c \end{vmatrix} [C_1' = C_1 - C_3] + \begin{vmatrix} a & 0 & x \\ b & 0 & y \\ c & 0 & z \end{vmatrix} [C_2' = C_2 + C_3] = 0 + 0 = 0$ [প্রমাণিত]

খ. দেওয়া আছে, $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$ST = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-1 & 5+2 \\ 6+3 & -10-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 9 & -16 \end{pmatrix}$

$|ST| = \begin{vmatrix} -4 & 7 \\ 9 & -16 \end{vmatrix} = -4 \times -16 - 7 \times 9 = 64 - 63 = 1 \neq 0$

$ST_{11} = -16$ $ST_{12} = -9$ $ST_{21} = -7$ $ST_{22} = -4$

$\therefore (ST)^{-1} = \frac{Adj\,(ST)}{|ST|} = \frac{\begin{pmatrix} -16 & -9 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}^T}{1} = \begin{pmatrix} -16 & -7 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$ আবার, $T = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, |T| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0$

$T_{11} = 2$ $T_{12} = 1$ $T_{21} = 5$ $T_{22} = 3$

$\therefore T^{-1} \frac{Adj\,(T)}{|T|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^T}{1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ এবং $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \therefore |S| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$

$S_{11} = -3$ $S_{12} = -2$ $S_{21} = -1$ $S_{22} = -1$

$S^{-1} = \frac{Adj\,(S)}{|S|} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

এখন, $(ST)^{-1} - T^{-1}S^{-1} = \begin{pmatrix} -16 & -7 \\ -9 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -7 \\ -9 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6-10 & -2-5 \\ -3-6 & -1-3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -16+16 & -7+7 \\ -9+9 & -4+4 \end{pmatrix} = 0$ [Showed]

গ. দেওয়া আছে, $U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a^3+1 & 2b^3+1 & 2c^3+1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$

$\therefore |U| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a^3+1 & 2b^3+1 & 2c^3+1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a^3 & 2b^3 & 2c^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$= 2abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2abc\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \\ a-b & b-c & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-b & b-c & c \\ 0 & 0 & 1 \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$= 2abc(b-c)(a-b)\begin{vmatrix} a+b & b+c \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$

$= 2abc(b-c)(a-b)(a+b-b-c) + (a-b)(b-c)(b+c-a-b)$

$= 2abc(b-c)(a-b)(a-c) + (a-b)(b-c)(c-a)$

$= (a-b)(b-c)(c-a)(-2abc+1) = -(2abc-1)(a-b)(b-c)(c-a)$ [প্রমাণিত]

12. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} a & 12 & 6 \\ b & 10 & 3 \\ 3 & 9 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}$ **[CB'22]**

(ক) $A + B = C$ হলে a, b এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) B^{-1} নির্ণয় কর। 4

(গ) নির্ণায়কের সাহায্যে $AX = D$ এর সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 6 \\ 7 & 10 & 3 \\ 3 & 9 & -1 \end{bmatrix}$

প্রশ্নমতে, $\begin{bmatrix} 5 & 12 & 6 \\ 7 & 10 & 3 \\ 3 & 9 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 12 & 6 \\ b & 10 & 3 \\ 3 & 9 & -1 \end{bmatrix}$ সুতরাং, $a = 5, b = 7$

খ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

গ. 02 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

13. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$; $\frac{x}{5} - \frac{2y}{5} + z = 1$ **[Din.B'22]**

$x + \frac{y}{4} + \frac{3z}{4} = 1$

$\frac{x}{3} - y + \frac{2z}{3} = 1$

(ক) $B = \begin{bmatrix} k+4 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$, B ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে K এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) A নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকে বর্ণিত সমীকরণ জোটটি ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. 02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ

খ. দেওয়া আছে, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

আমরা জানি, $(A^{-1})^{-1} = A$

এখন, $|A^{-1}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2(0\times1 - 2\times4) - (-1)\{3\times1 - (-2)\times1\} + 1\{3\times(-4) - 0\times1\}$

$= -16 + 5 - 12 = -23$

সুতরাং, $|A^{-1}|$ অব্যতিক্রমী; অর্থাৎ, $(A^{-1})^{-1}$ বা A নির্ণয়যোগ্য।

$a_{11} = 0 \times 1 - (-2) \times (-4) = -8$; $a_{12} = -\{3 \times 1 - (-2) \times 1\} = -5$

$a_{13} = 3 \times (-4) - 0 \times 1 = -12$; $a_{21} = -\{(-1) \times 1 - 1 \times (-4)\} = -3$

$a_{22} = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 1$; $a_{23} = -\{2 \times (-4) - (-1) \times 1\} = 7$

$a_{31} = (-1) \times (-2) - 1 \times 0 = 2$; $a_{32} = -\{2 \times (-2) - 1 \times 3\} = 7$

$a_{33} = 2 \times 0 - (-1) \times 3 = 3 \quad \therefore [\text{Adj } A^{-1}] = \begin{bmatrix} -8 & -5 & -12 \\ -3 & 1 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore A = (A^{-1})^{-1} = \frac{[\text{Adj } A^{-1}]^T}{|A^{-1}|} = \frac{\begin{bmatrix} -8 & -3 & 2 \\ -5 & 1 & 7 \\ -12 & 7 & 3 \end{bmatrix}}{-23} = \frac{1}{-23}\begin{bmatrix} -8 & -3 & 2 \\ -5 & 1 & 7 \\ -12 & 7 & 3 \end{bmatrix} \therefore A = \frac{1}{23}\begin{vmatrix} 8 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & -7 \\ 12 & -7 & -3 \end{vmatrix}$

গ. দেওয়া আছে, $\frac{x}{5} - \frac{2y}{5} + z = 1$

$x + \frac{y}{4} + \frac{3z}{4} = 1$; $\frac{x}{3} - y + \frac{2z}{3} = 1$

অথবা, $x - 2y + 5z = 5$

$4x + y + 3z = 4$; $x - 3y + 2z = 3$

x, y ও z এর সহগগুলি নিয়ে নির্ণায়ক,

ধরি, $\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

$= 1\,(2 \times 1 - 3 \times (-3)) - (-2)(4 \times 2 - 3 \times 1) + 5\,\{4 \times -3 - 1 \times 1\} = 11 + 10 - 65 = -44 \neq 0$

এখন, $\Delta x = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} = 5\{2 - (-9)\} - (-2)(4 \times 2 - 9) + 5\,\{(-3) \times 4 - 3\} = 55 - 2 - 75 = -22$

$\therefore \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1(8 - 9) - 5(8 - 3) + 5(12 - 4) = -1 - 25 + 40 = 14$

$\therefore \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 1(3 + 12) - (-2)(12 - 4) + 5(-12 - 1) = 15 + 16 - 65 = -34$

$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-22}{-44} = \frac{1}{2} \therefore y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{14}{-44} = \frac{-7}{22} \therefore z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-34}{-44} = \frac{17}{22}$ ∴ নির্ণেয় সমাধান $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-7}{22}, \frac{17}{22}\right)$

14. $\mathbf{f(x) = x^2 - 4x + 5}$ **[MB'22]**

$B = \begin{bmatrix} a^2 & bc & ca + c^2 \\ a^2 + ab & b^2 & ca \\ ab & b^2 + bc & c^2 \end{bmatrix}$

(ক) যদি $\begin{bmatrix} x + 3 & 6 \\ 5 & x - 4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হয়, তবে x এর মান বাহির কর। 2

(খ) যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে f(A) নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $|B| = 4a^2b^2c^2$. 4

সমাধান

ক. 02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ

খ. 09 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ

গ. $L.H.S = |B| = \begin{vmatrix} a^2 & bc & ca+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ca \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2(a^2+ab) & 2(b^2+bc) & 2(c^2+ca) \\ a^2+ab & b^2 & ca \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$ $[r_1' = r_1 + r_2 + r_3$ প্রয়োগ করে]

$= 2\begin{vmatrix} 0 & bc & c^2 \\ a^2 & -bc & ca-c^2 \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$ $[r_1' = r_1 - r_2$ এবং $r_2' = r_2 - r_3$ প্রয়োগ করে]

$= 2abc\begin{vmatrix} 0 & c & c \\ a & -c & a-c \\ b & b+c & c \end{vmatrix} = 2abc\{0 - a(c^2 - bc - c^2) + b(ca - c^2 + c^2)\}$

$= 2abc\{abc + abc\} = (2abc)(2abc) = 4a^2b^2c^2 = R.H.S$ (প্রমাণিত)

15. দৃশ্যকল্প: $A = [a_{ij}]_{3\times3}$; যেখানে $a_{ij} = 2i - j$. **[DB'21]**

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^2 + 3x$.

(ক) k-এর কোন মানের জন্য $\begin{bmatrix} k+3 & -1 \\ k & k+2 \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী হবে? 2

(খ) $f(A) + 2I_3$ নির্ণয় কর। 4

(গ) $(A + I_3).(A^T - I_3)$ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ

খ. $A = \begin{bmatrix} 2\times1-1 & 2\times1-2 & 2\times1-3 \\ 2\times2-1 & 2\times2-2 & 2\times2-3 \\ 2\times3-1 & 2\times3-2 & 2\times3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 14 & 8 & 2 \\ 32 & 20 & 8 \end{bmatrix}$

$\therefore f(A) + 2I_3 = A^2 + 3A + 2I_3 = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 14 & 8 & 2 \\ 32 & 20 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 9 & 6 & 3 \\ 15 & 12 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -7 \\ 23 & 16 & 5 \\ 47 & 32 & 19 \end{bmatrix}$

গ. $(A + I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

$A^T - I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\therefore (A + I_3)(A^T - I_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0+0+1 & 6+0-1 & 10+0-2 \\ 0+0-1 & 9+3+1 & 15+12+2 \\ 0+0-4 & 15+4+4 & 25+16+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ -1 & 13 & 29 \\ -4 & 23 & 49 \end{bmatrix}$

16. দৃশ্যকল্প-১: $\frac{x}{5} + \frac{3y}{10} + \frac{z}{10} = \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = \frac{3y}{7} + \frac{4z}{7} = 1$. **[DB'21]**

দৃশ্যকল্প-২: $\Delta = \begin{vmatrix} (s-x)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (s-y)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (s-z)^2 \end{vmatrix}$

(ক) দেখাও যে, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ একটি সমঘাতী ম্যাট্রিক্স। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত সমীকরণ জোটটি ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ, যদি $s = x + y + z$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\Delta = 2xyzs^3$. 4

সমাধান

ক. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \therefore A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2 & 2-1 \\ -4+2 & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = A$

$\therefore$ A সমঘাতী ম্যাট্রিক্স **(Showed)**

খ. 13 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

গ. $$\begin{vmatrix} (s-x)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (s-y)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (5-z)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (x+z)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (y+z+x)(y+z-x) & 0 & x^2 \\ 0 & (x+y+z)(x-y+z) & y^2 \\ (z-x-y)(z+x+y) & (z-x-y)(z+x+y) & (x+y)^2 \end{vmatrix} [c_1' = c_1 - c_3 ; c_2' = c_2 - c_3]$$

$$= (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} y+z-x & 0 & x^2 \\ 0 & x-y+z & y^2 \\ z-x-y & z-x-y & (x+y)^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} y+z-x & 0 & x^2 \\ 0 & x+z-y & y^2 \\ -2y & -2x & 2xy \end{vmatrix} [r_3' = r_3 - r_1 - r_2]$$

১ম সারির সাপেক্ষে বিস্তার করে, $(x+y+z)^2[(y+z-x)\{2xy(x+z-y)+2xy^2\} + x^2(2y)(x+z-y)]$

$= (x+y+z)^2[(y+z-x)(2x^2y+2xyz-2xy^2) + 2yx^3 + 2yx^2z - 2y^2x^2]$

$= 2(x+y+z)^2[x^2y^2 + xy^2z + x^2yz + xyz^2 - x^3y - x^2yz + x^3y + x^2yz - x^2y^2]$

$= 2(x+y+z)^2[xy^2z + x^2yz + xyz^2] = 2\,xyz\,(x+y+z)^3$ **[প্রমাণিত]**

17. $A = \begin{bmatrix} 1+m & 2 & 3 \\ 2 & 3+m & 1 \\ 3 & 1 & 2+m \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$ **[RB'21]**

(ক) প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} = p(p-1)^2(p^2-1)$ **2**

(খ) $m = 0$ হলে A^{-1} নির্ণয় কর। **4**

(গ) $AB = C$ হলে নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর, যখন, $m = 1$. **4**

সমাধান

ক. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & p-1 & p^2-1 \\ 0 & p^2-1 & p^4-1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} r_2' = r_2 - r_1 \\ r_3' = r_3 - r_1 \end{bmatrix}$$

১ম কলামের সাপেক্ষে বিস্তার করে $= \begin{vmatrix} (p-1) & (p-1)(p+1) \\ (p-1)(p+1) & (p-1)(p+1)(p^2+1) \end{vmatrix}$

$= (p+1)(p-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p+1 & p^2+1 \end{vmatrix} = (p+1)(p-1)^2(p^2+1-p-1) = p(p-1)^2(p^2-1)$ **(Proved)**

খ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

গ. 02 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

18. $P = \begin{bmatrix} 1+x^2-y^2 & 2xy & 2y \\ 2xy & 1-x^2+y^2 & -2x \\ -2y & 2x & 1-x^2-y^2 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^3 - 3x + 2I$ **[RB'21]**

(ক) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ হলে BA নির্ণয় কর। 2

(খ) $\det(P) = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 = -1$. 4

(গ) $x = 1, y = 2$ হলে $f(P)$ নির্ণয় কর, যেখানে I একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স। 4

সমাধান

ক. $BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+8 & 0+10 & 0+12 \\ 1+8 & 2+10 & 3+12 \\ 0-4 & 0-5 & 0-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 9 & 12 & 15 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

খ. $\det(P) = \begin{vmatrix} 1+x^2-y^2 & 2xy & 2y \\ 2xy & 1-x^2+y^2 & -2x \\ -2y & 2x & 1-x^2-y^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1+x^2+y^2 & 0 & 2y \\ 0 & 1+x^2+y^2 & -2x \\ -y(1+x^2+y^2) & x(1+x^2+y^2) & 1-x^2-y^2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_1' = c_1 + yc_3 \\ c_2' = c_2 - xc_3 \end{bmatrix} = (1+x^2+y^2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2y \\ 0 & 1 & -2x \\ -y & x & 1-x^2-y^2 \end{vmatrix}$

১ম সারির সাপেক্ষে বিস্তার করে, $= (1+x^2+y^2)\{1-x^2-y^2+2x^2+2y^2\} = (1+x^2+y^2)^3$

প্রশ্নমতে $(1+x^2+y^2)^3 = 0$ বা, $x^2+y^2+1 = 0$ বা, $x^2+y^2 = -1$ [প্রমাণিত]

গ. 09 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ

19. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & M \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3-1 & q^3-1 & r^3-1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **[Ctg.B'21]**

(ক) M এর মান কত হলে A ম্যাট্রিক্সের ট্রেস 5 হবে? 2

(খ) দেখাও যে, $|B| = (pqr-1)(p-q)(q-r)(r-p)$. 4

(গ) C^{-1} নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. এখানে, $4 + M = 5 \Rightarrow M = 1$

খ. $|B| = \begin{vmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3-1 & q^3-1 & r^3-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p-q & q-r & r \\ p^2-q^2 & q^2-r^2 & r^2 \\ p^3-q^3 & q^3-r^3 & r^3-1 \end{vmatrix} [c_1' = c_1 - c_2\ ;\ c_2' = c_2 - c_3]$

$= \begin{vmatrix} p-q & q-r & r \\ (p-q)(p+q) & (q-r)(q+r) & r^2 \\ (p-q)(p^2+pq+q^2) & (q-r)(q^2+qr+r^2) & r^3-1 \end{vmatrix}$

$= (p-q)(q-r)\begin{vmatrix} 1 & 1 & r \\ p+q & q+r & r^2 \\ p^2+pq+q^2 & q^2+qr+r^2 & r^3-1 \end{vmatrix}$

$= (p-q)(q-r)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p+q & r-p & -qr \\ p^2+pq+r^2 & (r^2+qr-p^2-pq) & (-q^2r-qr^2-1) \end{vmatrix} [c_2' = c_2 - c_1\ ;\ c_3' = c_3 - rc_2]$

$= (p-q)(q-r)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p+q & r-p & -qr \\ p^2+pq+r^2 & (r-p)(r+p+q) & -q^2r-qr^2-1 \end{vmatrix}$

$= (r-p)(p-q)(q-r)\begin{vmatrix} 1 & -qr \\ p+q+r & -q^2r-qr^2-1 \end{vmatrix}$

$= (p-q)(q-r)(r-p)\{-q^2r-qr^2-1+pqr+q^2r+qr^2\} = (pqr-1)(p-q)(q-r)(r-p)$ **[Showed]**

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

20. $x + 3y + 2z = 5$
$2x + y + 3z = 1$
$3x + 2y + z = 4$ [Ctg.B'21]

(ক) ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়কের মধ্যে দুইটি পার্থক্য লিখ। 2
(খ) ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোটের সমাধান কর। 4
(গ) প্রদত্ত সমীকরণ জোটের চলকসমূহের সহগগুলো দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সটি M হলে $M^2 - 2M + 3I$ এর মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক.

ম্যাট্রিক্স	নির্ণায়ক
(i) ম্যাট্রিক্স কতগুলো সংখ্যার আয়তাকার/বর্গাকার সজ্জা যার নিজের কোনো মান নেই।	(i) নির্ণায়ক কতগুলো সংখ্যার/বর্গাকার সজ্জা যার নিজস্ব মান আছে।
(ii) ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম সংখ্যা সমান হতেও পারে নাও পারে।	(ii) নির্ণায়কের সারি ও কলামের সংখ্যা সমান।

খ. 13 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

গ. 09 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ

21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \\ -1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ দুটি ম্যাট্রিক্স। [SB'21]

$f(x) = 3x^2 + 2x - 5I.$

(ক) $(2A - B)^T$ নির্ণয় কর। 2
(খ) $f(A)$ নির্ণয় কর। 4
(গ) B^{-1} নির্ণয় কর (যদি বিদ্যমান থাকে)। 4

সমাধান

ক. $(2A - B)^T = \left(2\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \\ -1 & 8 & 9 \end{bmatrix}\right)^T = \left(\begin{bmatrix} 2 & 10 & -4 \\ 8 & 6 & 14 \\ -6 & 8 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \\ -1 & 8 & 9 \end{bmatrix}\right)^T$

$= \begin{bmatrix} 0 & 13 & -5 \\ 1 & 4 & 9 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 13 & 4 & 0 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

খ. 09 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

22. সমীকরণ জোট: $px + qy + rz = 5$ [SB'21]
$p^2x + q^2y + r^2z = 5$
$(p^3 - 1)x + (q^3 - 1)y + (r^3 - 1)z = -5.$

(ক) $\begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে x এর মান নির্ণয় কর। 2
(খ) $p = 1, q = 2, r = 3$ হলে ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় কর। 4
(গ) x, y ও z এর সহগগুলো দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক D হলে প্রমাণ কর যে, $D = (pqr - 1)(p - q)(q - r)(r - p).$ 4

সমাধান

ক. শর্তমতে, $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(2x - 2) - (x - 1) = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x - x + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x - x + 1 = 0$

$\Rightarrow 2x(x - 1) - x(-1) = 0 \therefore x = 1, \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ. 13 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

গ. 19 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}, f(x) = x^2 - x + 3.$ **[BB'21]**

(ক) $P = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$ হলে দেখাও যে, P একটি শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স। 2

(খ) $f(A)$ নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $A^{-1}.A = I_3$ 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $P = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$; $P^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ∴ P একটি শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স **(Showed)**।

খ. 02 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ

গ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ $A_{11} = -19 \quad A_{12} = 22 \quad A_{13} = -2$; $A_{21} = 22 \quad A_{22} = -21 \quad A_{23} = 5$; $A_{31} = -2 \quad A_{32} = 5 \quad A_{33} = -2$

$|A| = -19 + 44 - 8 = 17 \neq 0;$ A^{-1} নির্ণয়যোগ্য ∴ $A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} -19 & 22 & -2 \\ 22 & -21 & 5 \\ -2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

$L.H.S = A^{-1}.A = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} -19 & 22 & -2 \\ 22 & -21 & 5 \\ -2 & 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 = R.H.S$ **(Proved)**

24. $A = \begin{bmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3 & q^3 & r^3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ এবং $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ **[BB'21]**

(ক) $\begin{pmatrix} -a & 6 \\ 2 & -a+1 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে a এর মান বের কর। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $|A| = pqr(p-q)(q-r)(r-p)$. 4

(গ) ক্রেমারের সূত্র ব্যবহার করে BX = C সমীকরণ জোটটি সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. 09 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ

খ. $L.H.S = \begin{vmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3 & q^3 & r^3 \end{vmatrix} = pqr\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix} = pqr\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & q-p & r-p \\ p^2 & q^2-p^2 & r^2-p^2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_2' = c_2 - c_1 \\ c_3' = c_3 - c_1 \end{bmatrix}$

$= pqr(q-p)(r-p)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1 & 1 \\ p^2 & p+q & r+p \end{vmatrix} = pqr(q-p)(r-p)(r+p-p-q)$ [১ম সারি বরাবর বিস্তার করে]

$= pqr(q-p)(r-p)(r-q) = pqr(p-q)(q-r)(r-p) = R.H.S$ **(Proved)**

গ. 02 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

25. দৃশ্যকল্প: $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -4 & -9 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2I$, যেখানে I অভেদ ম্যাট্রিক্স।

[JB'21]

(ক) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি অভেদঘাতি (involutory) কি-না যাচাই কর। 2

(খ) $f(A^T)$ নির্ণয় কর, যেখানে A^T হচ্ছে A এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স। 4

(গ) ক্রেমারের সূত্রের সাহায্যে AX = B সমীকরণ জোট সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. এখানে, ধরি $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \therefore A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & 6-6 \\ -2+2 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

∴ ম্যাট্রিক্সটি অভেদঘাতী।

খ. $A^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -9 \end{bmatrix}; (A^T)^2 = A^T.A^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & -15 & -7 \\ -17 & 11 & 43 \\ -28 & 20 & 108 \end{bmatrix}$

$(A^T)^3 = (A^T)^2.A^T = \begin{bmatrix} 29 & -15 & -7 \\ -17 & 11 & 43 \\ -28 & 20 & 108 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 & -22 & 210 \\ 158 & -106 & -482 \\ 448 & -288 & -1136 \end{bmatrix}$

$\therefore f(A^T) = (A^T)^3 - 2(AT)^2 + A^T - 2I$

$= \begin{bmatrix} 66 & -22 & 210 \\ 158 & -106 & -482 \\ 448 & -288 & -1136 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 58 & -30 & -14 \\ -34 & 22 & 86 \\ -56 & 40 & 216 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 227 \\ 193 & -131 & -572 \\ 509 & -331 & -1363 \end{bmatrix}$

গ. 02 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

26. দৃশ্যকল্প: $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 2x^3+1 & 2y^3+1 & 2z^3+1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **[JB'21]**

(ক) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & m \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম হলে m এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $\det(A) = -(2xyz+1)(x-y)(y-z)(z-x)$. 4

(গ) এমন ম্যাট্রিক্স C নির্ণয় কর যেন, $BC = CB = I_3$ হয়। 4

সমাধান

ক. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & m \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম। এখানে, $(1, 3)$ তম ভুক্তি m. আবার, $(3, 1)$ তম ভুক্তি 4 $\therefore m = -4$

খ. $\det(A) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x^3+1 & 2y^3+1 & 2z^3+1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-y & y-z & z \\ 2(x^3-y^3) & 2(y^3-z^3) & 2z^3+1 \\ x^2-y^2 & (y^2-z^2) & z^2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$

$= (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & z \\ 2(x^2+xy+y^2) & 2(y^2+yz+z^2) & 2z^3+1 \\ x+y & y+z & z^2 \end{vmatrix}$

$= (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2(x^2-z^2+xy-yz) & 2(y^2+yz+z^2) & 1-2y^2z-2yz^2 \\ x-z & y+z & -yz \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_3' = c_3 - zc_2 \end{bmatrix}$

$= (x-y)(y-z)(x-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2(x+y+z) & 2(y^2+yz+z^2) & 1-2y^2z-2yz^2 \\ 1 & y+z & -yz \end{vmatrix}$

$= -(x-y)(y-z)(x-z)\{-2yz(x+y+z) - (1-2y^2z-2yz^2)\}$

$= -(x-y)(y-z)(x-z)(-1-2xyz) = -(2xyz+1)(x-y)(y-z)(z-x)$ **(Proved)**

গ. $BC = CB = I_3 \Rightarrow B^{-1}(BC) = B^{-1}I_3 \Rightarrow (B^{-1}B)C = B^{-1} \Rightarrow C = B^{-1}$

$\text{adj}(B) = \begin{bmatrix} (3-2) & -(1-1) & (2-3) \\ -(0+2) & (2+1) & -(4-0) \\ (0+3) & -(2+1) & (-0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(3-2) - 0 - 1(2-3) = 3 \neq 0; B^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

$C = B^{-1} = \frac{\text{adj}(B)}{|B|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & p \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ [CB'21]

(ক) $P = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ এবং $Q = [-2 \quad -1 \quad 0]$ হলে, $[PQ]^T$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $AB = I$ হলে, n ও p এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) C^{-1} নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $PQ = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}[-2 \quad -1 \quad 0] = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \end{bmatrix} \therefore [PQ]^T = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

খ. $AB = I$ হলে $B = A^{-1}I = A^{-1}$

$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \therefore n = -\frac{3}{4}, p = 1$ [N.B: প্রশ্নে একটু অসঙ্গতি রয়েছে। প্রশ্নে $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & n \\ 0 & p \end{bmatrix}$ হওয়া উচিত ছিল]

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

28. $\left.\begin{array}{l} x + 2y - z = 5 \\ 3x - y + 3z = 7 \\ 2x + 3y + z = 11 \end{array}\right\}$ এবং $R = \begin{bmatrix} a & b & a+b+2c \\ b & b+c+2a & c \\ c+a+2b & a & c \end{bmatrix}$ [CB'21]

(ক) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ হলে, $2A + B$ নির্ণয় কর। 2

(খ) ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে উদ্দীপকে উল্লিখিত সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $|R| = 2(a+b+c)^3$ 4

সমাধান

ক. $2A + B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 6 \\ -1 & 9 & 18 \end{bmatrix}$

খ. 13 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

গ. $L.H.S = |R| = \begin{vmatrix} a & b & a+b+2c \\ b & b+c+2a & c \\ c+a+2b & a & c \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & b & a+b+2c \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & c \\ 2(a+b+c) & a & c \end{vmatrix} [c_1' = c_1 + c_2 + c_3]$

$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & a+b+2c \\ 1 & b+c+2a & c \\ 1 & a & c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & a+b+2c \\ 0 & c+2a & -(a+b+c) \\ 0 & a-b & -(a+b+c) \end{vmatrix} \begin{bmatrix} r_2' = r_2 - r_1 \\ r_3' = r_3 - r_1 \end{bmatrix}$

$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} c+2a & -(a+b+c) \\ a-b & -(a+b+c) \end{vmatrix} = -2(a+b+c)^2\begin{vmatrix} c+2a & 1 \\ a-b & 1 \end{vmatrix} = -2(a+b+c)^2(c+2a-a+b)$

$= -2(a+b+c)^3$ [Note: প্রশ্নের (গ) হতে $R.H.S = -2(a+b+c)^3$ হবে]

$= R.H.S$ (প্রমাণিত)

29. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ [Din.B'21]

(ক) $\begin{bmatrix} x^2 & x \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে x এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $AB = BA = I_3$ হলে, B নির্ণয় কর; যেখানে B একটি 3×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স। 4

(গ) $C = A'$ হলে $C^2 - 5C + 6I$ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ

খ. 26 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

গ. প্রশ্নমতে, $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $C^2 - 5C + 6I$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & -10 & -5 \\ -20 & 5 & -5 \\ 10 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & -8 & -2 \\ -18 & 9 & 2 \\ 8 & -4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & -10 & -5 \\ -20 & 5 & -5 \\ 10 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 7 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$ **(Ans.)**

30. $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \\ p^3 - 1 & q^3 - 1 & r^3 - 1 \end{bmatrix}$ **[Din.B'21]**

(ক) বিস্তার না করে $\begin{vmatrix} y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \\ x+y & z & 1 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দেখাও যে, $|C| = (pqr - 1)(p - q)(q - r)(r - p)$. 4

(গ) $AX = B$ হলে নির্ণায়কের সাহায্যে X নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\begin{vmatrix} y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \\ x+y & z & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y+z & x & 1 \\ x+y+z & y & 1 \\ x+y+z & z & 1 \end{vmatrix} [c_1' = c_1 + c_2] = (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & z & 1 \end{vmatrix} = (x+y+z) \times 0 = 0$ **(Ans.)**

খ. 19 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ

গ. 02 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

31. দৃশ্যকল্প: $\left.\begin{matrix} x+y+z = 3 \\ x + ay + a^2z = \ell \\ x + a^2y + a^4z = m \end{matrix}\right\}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, f(x) = x^2 + 3x - 7.$ **[MB'21]**

(ক) প্রমাণ কর: $\begin{vmatrix} x+y & 3(y+z) & z+x \\ 1 & 3 & 1 \\ z & 3x & y \end{vmatrix} = 0.$ 2

(খ) সমীকরণগুলোকে $AX = B$ আকারে প্রকাশ করে দেখাও যে, $Det(A) = a(a-1)^2(a^2-1)$. 4

(গ) $f(C)$ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\begin{vmatrix} x+y & 3(y+z) & z+x \\ 1 & 3 & 1 \\ z & 3x & y \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x+y+z & y+z+x & z+x+y \\ 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \end{vmatrix} [r_1' = r_1 + r_3]$

$= 3(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \end{vmatrix} = 3(x+y+z) \times 0 \; [r_1 = r_2] = 0$ **(Proved)**

খ. $x + y + z = 3 ; x + ay + a^2z = \ell ; x + a^2y + a^4z = m$

AX = B আকার হবে ; $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & a & a^2\\1 & a^2 & a^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ \ell\\ m\end{bmatrix}$

$\therefore \det(A) = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & a & a^2\\1 & a^2 & a^4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\1 & a-1 & a^2-1\\1 & a^2-1 & a^4-1\end{vmatrix}$ $[c_2{}' = c_2 - c_1; c_3{}' = c_3 - c_1]$

$= \begin{vmatrix}a-1 & (a-1)(a+1)\\(a-1)(a+1) & (a-1)(a+1)(a^2+1)\end{vmatrix} = (a-1)(a-1)(a+1)\begin{vmatrix}1 & 1\\a+1 & a^2+1\end{vmatrix}$

$= (a-1)^2(a+1)(a^2+1-a-1) = a(a-1)^2(a^2-1)$ **(Showed)**

গ. $C = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{bmatrix} \therefore C^2 = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+6 & 2+0\\3+0 & 6+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 2\\3 & 6\end{bmatrix}$

$\therefore f(C) = C^2 + 3C - 7I = \begin{bmatrix}7 & 2\\3 & 6\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 2\\3 & 6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 6\\9 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}7 & 0\\0 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 8\\12 & -1\end{bmatrix}$

[Note: 7 এর স্থলে 7I হবে]

32. দৃশ্যকল্প: $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\-2 & 2 & -2\\-2 & 1 & -6\end{bmatrix}, B = A^{-1}, C = \begin{bmatrix}3\\-2\\-7\end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$. **[MB'21]**

(ক) $\begin{bmatrix}0 & 7 & 10\\-7 & 0 & 15\\-10 & -15 & 0\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম কিনা যাচাই কর। 2

(খ) **B নির্ণয় কর।** 4

(গ) **AX = C হলে x, y, z নির্ণয় কর।** 4

সমাধান

ক. ধরি, $A = \begin{bmatrix}0 & 7 & 10\\-7 & 0 & 15\\-10 & -15 & 0\end{bmatrix} \therefore A^T = \begin{bmatrix}0 & -7 & -10\\7 & 0 & -15\\10 & 15 & 0\end{bmatrix}$

$-A = \begin{bmatrix}0 & -7 & -10\\7 & 0 & -15\\10 & 15 & 0\end{bmatrix} \therefore A^T = -A$ ∴ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতিসম

খ. **03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ**

গ. **02 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ**

33. $A = \begin{bmatrix}a & a+1\\-a+1 & -a\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 0 & 2\\3 & 4 & -5\end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix}4\\0\\2\end{bmatrix}$. **[DB'19]**

(ক) **a = 5 হলে দেখাও যে, A একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স।** 2

(খ) **B^T এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।** 4

(গ) **BX = C হলে, ক্রেমারের সূত্র ব্যবহার করে সমাধান কর।** 4

সমাধান

ক. **25 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ**

খ. ধরি, $B = \begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 0 & 2\\3 & 4 & -5\end{bmatrix} = B^T = \begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 0 & 4\\3 & 2 & -5\end{bmatrix} = P$; $|P| = \begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 0 & 4\\3 & 2 & -5\end{vmatrix} = 7 \neq 0 \therefore P^{-1}$ বিদ্যমান।

$P_{11} = (0 \times -5 - 4 \times 2) = -8 ; P_{12} = -(-5-12) = 17 ; P_{13} = 2 \times 1 - 0 = 2 ; P_{21} = -(1 \times -5 - 3 \times 2) = +11$

$P_{22} = -5 \times 2 - 3 \times 3 = -19 ; P_{23} = -(2 \times 2 - 3 \times 1) = -1$

$P_{31} = 4 \times 1 = 4 ; P_{32} = -(4 \times 2 - 3) = -5 ; P_{33} = -1$

$\text{Adj}(P) = \begin{bmatrix}-8 & 17 & 2\\11 & -19 & -1\\4 & -5 & -1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-8 & 11 & 4\\17 & -19 & -5\\2 & -1 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{|P|}\text{Adj}(P) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}-8 & 11 & 4\\17 & -19 & -5\\2 & -1 & -1\end{bmatrix}$ **(Ans.)**

গ. **02 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ**

34. $A = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ [RB'19]

(ক) $|A|$ এর $(3,2)$ তম ভুক্তির সহগুণক নির্ণয় কর। 2

(খ) $5A^2 - 3I$ নির্ণয় কর, যেখানে I অভেদ ম্যাট্রিক্স। 4

(গ) $BC = D$ হলে, ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণ জোটটি সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. (3,2) তম ভুক্তি = 1 ; সহগুণক $= (-1)^{3+2}(12 \times 1 - 1 \times 0) = -12$ **(Ans.)**

খ. 03 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ

গ. 02 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

35. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ [Ctg.B'19]

$M = [x + 2y + 3z \quad 2x + y + 4z \quad 3x + 2y + z]$ এবং $N = [-1 \ 2 \ 3]$.

(ক) দুইটি ম্যাট্রিক্স সমান হওয়ার শর্তগুলো কী কী? 2

(খ) $AB + B^t - 2C$ নির্ণয় কর। 4

(গ) $M = N$ হলে ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. দুইটি Matrix সমান হওয়ার শর্ত:

(i) Matrix দ্বয়ের আকার সমান হতে হবে। (ii) Matrix দ্বয়ের প্রতিটির একই অবস্থানের ভুক্তি সমান হবে।

খ. $AB + B^t - 2C$ এখন, $AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-4 & 1 \times 7 - 2 \times 1 \\ 3 \times 3 + 6 \times 2 & 3 \times 7 + 6 \times 1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 21 & 27 \end{bmatrix}$; $B^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$; $2C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$

$\therefore AB + B^t - 2C = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 21 & 27 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 24 & 12 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

গ. 02 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

36. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$; $f(t) = t^2 - 3t + 2$ [SB'19]

সমীকরণ জোট: $x + y + z = 6$; $x - 2y + 2z = 3$; $2x + y - z = 1$

(ক) বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} xy(x+y) & yz(y+z) & zx(z+x) \\ xy & yz & zx \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = xyz \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \end{vmatrix}$ 2

(খ) $f(A)$ নির্ণয় কর। 4

(গ) সমীকরণ জোটটি বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. $\begin{vmatrix} xy(x+y) & yz(y+z) & zx(z+x) \\ xy & yz & zx \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{xyz} \begin{vmatrix} xyz(x+y) & xyz(y+z) & xyz(z+x) \\ xyz & xyz & xyz \\ z & x & y \end{vmatrix}$

$= \frac{(xyz)^2}{xyz} \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \end{vmatrix} = xyz \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \end{vmatrix}$ **(Proved)**

খ. 03 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ

গ. $x + y + z = 6$; $x - 2y + 2z = 3$; $2x + y - z = 1$

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\therefore (x, y, z) = (1, 2, 3)$ **(Ans.)**

37. $x - y + z = 2$ **[BB'19]**

$2x + z = 5$

$x + 2y - 3z = -4.$

(ক) ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়কের দুটি পার্থক্য লিখ। 2

(খ) ক্রেমার-এর প্রক্রিয়ায় প্রদত্ত সমীকরণজোট সমাধান কর। 4

(গ) প্রদত্ত সমীকরণজোটের চলকসমূহের সহগগুলি নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 20 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ

খ. 13 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

38. $A = \begin{bmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{bmatrix}$ **[JB'19]**

(ক) $B + 2I = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ হলে B নির্ণয় কর। 2

(খ) $|A| = 0$ হলে সমাধান সেট নির্ণয় কর। 4

(গ) $x = -1$ হলে, A^{-1} নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $B + 2I = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **(Ans.)**

খ. 01 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

39. দৃশ্যকল্প-১: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 28 \\ 14 \end{bmatrix}$ **[CB'19]**

দৃশ্যকল্প-২: $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

(ক) $P - Q$ ম্যাট্রিক্সটির নাম কী? 2

(খ) $AX = B$ সমীকরণ জোট ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর। 4

(গ) বিপরীতকরণ যোগ্যতা যাচাইপূর্বক A^{-1} নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $P - Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\therefore P - Q$ একটি দ্বিতীয় ক্রমের Identity বা অভেদ ম্যাট্রিক্স।

খ. 02 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

40. দৃশ্যকল্প-১: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ **[Din.B'19]**

দৃশ্যকল্প-২: $2x + 3y - 5z = 7.$

$x - 4y + z = 4,\ \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}z = 1.$

(ক) বিস্তার না করে প্রমাণ কর: $\begin{vmatrix} 2 & a & 6-a \\ 3 & b & 9-b \\ 9 & c & 27-c \end{vmatrix} = 0.$ 2

(খ) $C = A - B$ হলে $C^2 + 5B + 3I$ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত সমীকরণজোটটি ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. $\begin{vmatrix} 2 & a & 6-a \\ 3 & b & 9-b \\ 9 & c & 27-c \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 6 & a & 6-a \\ 9 & b & 9-b \\ 27 & c & 27-c \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 6-a & a & 6-a \\ 9-b & b & 9-b \\ 27-c & c & 27-c \end{vmatrix} [c_1' = c_1 - c_2] = 0$ **(Proved)**

খ. $C = A - B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$C^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \therefore C^2 + 5B + 3I = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 20 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 5 \\ 20 & 23 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

গ. 13 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

41. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = 3x^2 + 5x$. **[All.B'18]**

দৃশ্যকল্প-২: $B = \begin{bmatrix} l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \\ l^3-1 & m^3-1 & n^3-1 \end{bmatrix}$

(ক) যদি $\begin{pmatrix} x & 2 \\ x & 2 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হয় তবে x-এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ হলে $f(A)$ মান নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $|B| = (lmn-1)(l-m)(m-n)(n-l)$. 4

সমাধান

ক. $\begin{vmatrix} x & 2 \\ x & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ সুতরাং x এর যে কোন মানের জন্য ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হবে।

খ. 09 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ

গ. 19 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ

42. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ **[DB'17]**

(ক) $A \times C$ নির্ণয় করে উহার মাত্রা নির্ণয় কর। 2

(খ) A^{-1} নির্ণয় কর। 4

(গ) $A \times B = C$ হলে, ক্রেমারের নিয়মে সমীকরণটি সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. $AC = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+20+8 \\ 8+0+12 \\ 4+15+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 27 \end{bmatrix} \therefore$ AC এর মাত্রা 3×1 **(Ans.)**

খ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

গ. 02 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

43. $\vec{P} = 3\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k},\ \vec{Q} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{R} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$. **[RB'17]**

(গ) উদ্দীপকে উল্লিখিত ভেক্টরগুলোর $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স A হলে A^{-1} নির্ণয় কর। 4

সমাধান

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

44. $f(x) = x^2 + 3x, g(x) = 2x - 3$ এবং $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ **[RB'17]**

(ক) নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর: $x + 3y + 2 = 0,\ 2x + y + 3 = 0$ 2

(খ) $f(A) + I$ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $x + 3y + 2 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

$2x + y + 3 = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) থেকে $x + 3y = -2$ (ii) থেকে $2x + y = -3$

x ও y এর সহগ নিয়ে গঠিত নির্ণায়ক, $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$

এখন, $D_x = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 9 = 7$; $Dy = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = -3 + 4 = 1$ $\therefore x = \frac{Dx}{D} = \frac{7}{-5}$ এবং $y = \frac{Dy}{D} = \frac{1}{-5}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = \left(-\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ **(Ans.)**

খ. **09 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ**

45. $\mathbf{A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = A^t,\ f(x) = x^2 - 4x.}$ **[Ctg.B'17]**

(খ) **f(B) নির্ণয় কর।** **4**

(গ) **B এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।** **4**

সমাধান

খ. **09 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ**

গ. **03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ**

46. $\mathbf{x + y + z = 1 \ldots\ldots\ldots (i)}$ **[JB'17]**

$\mathbf{lx + my + nz = k \ldots\ldots\ldots (ii)}$

$\mathbf{l^2x + m^2y + n^2z = k^2 \ldots\ldots\ldots (iii)}$

(ক) $\mathbf{2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + F = I_2}$ **হলে, F ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর; যেখানে I_2 একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স।** **2**

(খ) **সমীকরণগুলোকে AX = B আকারে প্রকাশ করে দেখাও যে, $\det(A) = (l - m)(m - n)(n - l)$.** **4**

(গ) **x, y, z এর সহগ নিয়ে গঠিত A একটি ম্যাট্রিক্স। A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর; যেখানে $l = 1, m = 2, n = -1$** **4**

সমাধান

ক. $2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + F = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

খ. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{bmatrix} \therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{bmatrix}$

$\therefore \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l^2 & m^2 & n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ l - m & m - n & n \\ l^2 - m^2 & m^2 - n^2 & n^2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c'_1 = c_1 - c_2 \\ c'_2 = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$

$= \begin{vmatrix} l - m & m - n \\ (l + m)(l - m) & (m + n)(m - n) \end{vmatrix} = (l - m)(m - n)(m + n - l - m) = (l - m)(m - n)(n - l)$ **(Showed)**

গ. **03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ**

47. $\mathbf{A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}}$ **এবং** $\mathbf{X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$. **[BB'17]**

(ক) **p এর মান কত হলে $\begin{bmatrix} p - 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী বর্গ ম্যাট্রিক্স হবে?** **2**

(খ) **উদ্দীপকের আলোকে, $A^2 - 5A + 6I$ নির্ণয় কর, যেখানে $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$।** **4**

(গ) **উদ্দীপকের আলোকে, AX = B হলে ক্রেমার পদ্ধতিতে x, y নির্ণয় কর।** **4**

সমাধান

ক. **02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ**

খ. **09 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ**

গ. **44 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ**

48. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ [CB'17]

(ক) x এর যেসব মানের জন্য $\begin{bmatrix} x^2 & 2x \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স ব্যাতিক্রমী হবে তা নির্ণয় কর। 2

(খ) $AB - C^2 + 2I_2$ নির্ণয় কর। 4

(গ) D^{-1} নির্ণেয় কর। 4

সমাধান

ক. 02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ

খ. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-6-15 & 2+14+0 \\ 2-3+0 & -4+7+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & 16 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

আবার, $C^2 = C.C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25+1 & 5-3 \\ 5-3 & 1+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

এখন, প্রদত্ত রাশি $= AB - C^2 + 2I_2 = \begin{bmatrix} -22 & 16 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 26 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ [মান বসিয়ে]

$= \begin{bmatrix} -22 & 16 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 26 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22-26+2 & 16-2+0 \\ -1-2+0 & 3-10+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -46 & 14 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

49. $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ [Din.B'17]

(ক) $\begin{bmatrix} 2 & -x \\ y-1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3+y \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ হলে (x, y) নির্ণয় কর। 2

(খ) $M^2 - 3M + MI$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে I একক ম্যাট্রিক্স। 4

(গ) M এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বিদ্যমান থাকলে তা নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $-x = 3 + y \Rightarrow x + y = -3$ ……………… (i)

$y - 1 = 4 \Rightarrow y = 5$ ……………… (Ans.)

$\therefore x = -3 - 5 = -8$ ……………… (Ans.)

খ. 09 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

50. দৃশ্যকল্প-১: $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 6 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ [SB'17]

দৃশ্যকল্প-২: $\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{5}{7}z = \frac{x}{4} - y + \frac{z}{4} = \frac{3x}{5} - \frac{y}{5} - \frac{2z}{5} = 1.$

(ক) বিস্তার না করে প্রমাণ কর: $\begin{vmatrix} x & -a & x+a \\ y & -b & y+b \\ z & -c & z+c \end{vmatrix} = 0$ 2

(খ) $A = B + C$ হলে A^{-1} নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত সমীকরণ জোটটি ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. 11 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ

খ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

গ. 13 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ

◆ **CQ: সম্ভাব্য প্রশ্ন ও সমাধান:**

01. $A = \begin{bmatrix} 1+x & 2 & 3 \\ 2 & 3+x & 1 \\ 3 & 1 & 2+x \end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স।

(ক) বর্গ ম্যাট্রিক্স বলতে কী বোঝায়? 2

(খ) $x = 1$ হলে $A^2 - 2A - 3I$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকের উল্লিখিত ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে x এর মানসমূহ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. বর্গ ম্যাট্রিক্স: কোন ম্যাট্রিক্সের কলাম ও সারির সংখ্যা পরস্পর সমান হলে তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

খ. বোর্ড প্রশ্ন 09 (খ) এর অনুরূপ

গ. দেওয়া আছে, $|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 \\ 2 & 3+x & 1 \\ 3 & 1 & 2+x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1+2+3+x & 2 & 3 \\ 1+2+3+x & 3+x & 1 \\ 1+2+3+x & 1 & 2+x \end{vmatrix} = 0 \quad [c_1' = c_1 + c_2 + c_3] \Rightarrow (6+x)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3+x & 1 \\ 1 & 1 & 2+x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (6+x)\begin{vmatrix} 0 & -1-x & 2 \\ 0 & 2+x & -1-x \\ 1 & 1 & 2+x \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} r_1' = r_1 - r_2 \\ r_2' = r_2 - r_3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (6+x)\{(-1-x)^2 - 2(2+x)\} = 0$ [প্রথম কলামের সাপেক্ষে বিস্তৃতি করে]

$\Rightarrow (6+x)\{1 + x^2 + 2x - 4 - 2x\} = 0 \Rightarrow (6+x)(x^2 - 3) = 0$

$\therefore x = -6,\ x = \pm\sqrt{3}$

02. একটি দোকানে পর পর তিন দিনের পদার্থবিজ্ঞান, রসায়ন ও গণিত বিষয়ে বই বিক্রয়ের হিসাব নিম্নরূপ:

দিন	পদার্থবিজ্ঞান	রসায়ন	গণিত
প্রথম দিন	x খানা	y খানা	z খানা
দ্বিতীয় দিন	x^2 খানা	y^2 খানা	z^2 খানা
তৃতীয় দিন	$(x^3 - 1)$ খানা	$(y^3 - 1)$ খানা	$(z^3 - 1)$ খানা

পদার্থবিজ্ঞান, রসায়ন ও গণিত বিষয়ের প্রতিখানা বই বিক্রয়ের লাভ যথাক্রমে 5 টাকা, 7 টাকা ও 4 টাকা। বিক্রয় ম্যাট্রিক্সকে A দ্বারা প্রকাশ করা হল।

(ক) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ হলে $C^2 - I$ নির্ণয় কর। 2

(খ) দেখাও যে, $\frac{|A|}{(xyz-1)} = (x-y)(y-z)(z-x)$ 4

(গ) যদি $x = 2, y = 5, z = 4$ হয় এবং যদি অপর একটি দোকান একই পরিমাণ বই বিক্রয় করে প্রতিখানা বই থেকে 2 টাকা করে বেশি লাভ করে, তবে ম্যাট্রিক্স এর সাহায্যে দুই দোকানে লাভের তুলনা কর। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \therefore C^2 - I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 18 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 18 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$

খ. বোর্ড প্রশ্ন 19 (খ) এর অনুরূপ

গ. দেওয়া আছে, $x = 2; y = 5; z = 4$ ∴ বিক্রয় ম্যাট্রিক্স, $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 25 & 16 \\ 7 & 124 & 63 \end{bmatrix}$

১ম দোকানটির লাভের ম্যাট্রিক্স, $P = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$, ২য় দোকানটির লাভের ম্যাট্রিক্স, $Q = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\therefore A \times P = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 25 & 16 \\ 7 & 124 & 63 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 \\ 259 \\ 1155 \end{bmatrix}$ এবং $A \times Q = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 25 & 16 \\ 7 & 124 & 63 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 83 \\ 349 \\ 1543 \end{bmatrix}$

১ম দোকানের মোট লাভ $= 61 + 259 + 1155 = 1475$

২য় দোকানের মোট লাভ $= 83 + 349 + 1543 = 1975$

∴ ২য় দোকানের লাভ বেশি $(1975 - 1475) = 500$ টাকা।

03. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

(ক) কী শর্ত সাপেক্ষে দুইটি ম্যাট্রিক্সের যোগ ও গুণ নির্ণয়যোগ্য? 2

(খ) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^3$ নির্ণয় কর। 4

(গ) দেখাও যে, $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I_3}$ 4

সমাধান

ক. A ও B দুইটি ম্যাট্রিক্স হলে, যোগ নির্ণয়যোগ্য যদি A ম্যাট্রিক্সের কলাম ও সারি সংখ্যা এবং B ম্যাট্রিক্সের কলাম ও সারি সংখ্যা পরস্পর সমান হয়। গুণ নির্ণয়যোগ্য যদি A ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা B ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা সমান হয়।

খ. $A + B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$

এবং $(A + B)^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 16+0+0 & -8-12+0 & 0+8+0 \\ 0+0-8 & 0+36-24 & 0-24+16 \\ 8+0-8 & -4+36-24 & 0-24+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -20 & 8 \\ -8 & 12 & -8 \\ 0 & 8 & -8 \end{bmatrix}$

$\therefore (A + B)^3 = (A + B)^2(A + B) = \begin{bmatrix} 16 & -20 & 8 \\ -8 & 12 & -8 \\ 0 & 8 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & -104 & 48 \\ -48 & 40 & -16 \\ -16 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

গ. $AB = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-8+6 & 6-20+14 & -6+16-10 \\ -2+2+0 & -4+5+0 & 4-4+0 \\ -1-2+3 & -2-5+7 & 2+4-5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$ এবং $BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3-4+2 & -4+2+2 & 2+0-2 \\ 6-10+4 & -8+5+4 & 4+0-4 \\ 9-14+5 & -12+7+5 & 6+0-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 \therefore AB = BA = I_3$ **(Showed)**

04. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$; $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ এবং $\mathbf{C} = [1\ 2\ 3]$.

(ক) অভেদক ম্যাট্রিক্স এর সংজ্ঞা দাও। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $\mathbf{A(BC) = (AB)C}$ 4

(গ) নির্ণায়কের সাহায্যে $\mathbf{AX = B}$ সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. অভেদক ম্যাট্রিক্স: স্কেলার ম্যাট্রিক্সের অশূন্য ভুক্তিগুলির প্রত্যেকটি একক (1) হলে, ম্যাট্রিক্সটিকে অভেদক ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

খ. $BC = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 7 & 14 & 21 \\ 11 & 22 & 33 \end{bmatrix} \therefore A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 7 & 14 & 21 \\ 11 & 22 & 33 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5+14-11 & 10+28-22 & 15+42-33 \\ 15-7+33 & 30-14+66 & 45-21+99 \\ 10+21+11 & 20+42+22 & 30+63+33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 16 & 24 \\ 41 & 82 & 123 \\ 42 & 84 & 126 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+14-11 \\ 15-7+33 \\ 10+21+11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 41 \\ 42 \end{bmatrix}$

$\therefore (AB)C = \begin{bmatrix} 8 \\ 41 \\ 42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 16 & 24 \\ 41 & 82 & 123 \\ 42 & 84 & 126 \end{bmatrix} \therefore A(BC) = (AB)C$ **(Proved)**

গ. বোর্ড প্রশ্ন 02 (গ) এর অনুরূপ

05. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ দুটি 3×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স।

(ক) A^T ও B^T নির্ণয় কর। 2

(খ) AB ও $(AB)^T$ নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $(AB)^T = B^T A^T$। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$\therefore A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \therefore B^T = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

খ. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+14+6 & 5-4+0 & 3+2-9 \\ 2+35-2 & -10-10+0 & -6+5+3 \\ -2+21+8 & 10-6+0 & 6+3-12 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 19 & 1 & -4 \\ 35 & -20 & 2 \\ 27 & 4 & -3 \end{bmatrix} \therefore (AB)^T = \begin{bmatrix} 19 & 1 & -4 \\ 35 & -20 & 2 \\ 27 & 4 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 19 & 35 & 27 \\ 1 & -20 & 4 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

গ. 'খ' হতে পাই, $(AB)^T = \begin{bmatrix} 19 & 35 & 27 \\ 1 & -20 & 4 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

'ক' হতে পাই, $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $B^T = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \therefore B^T A^T = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1+14+6 & 2+35-2 & -2+21+8 \\ 5-4+0 & -10-10+0 & 10-6+0 \\ 3+2-9 & -6+5+3 & 6+3-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 35 & 27 \\ 1 & -20 & 2 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \therefore (AB)^T = B^T A^T$ **(Proved)**

06. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

(ক) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ P & 4 \end{bmatrix}$ প্রতিসম হলে P এর মান কত? 2

(খ) $AX = R$ সমীকরণটি ক্রেমারের নিয়মের সাহায্যে সমাধান কর। 4

(গ) $f(A) = I$ হলে সমীকরণটি হতে A^{-1} নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ p & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & p \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \therefore p = 7$

খ. বোর্ড প্রশ্ন 02 (গ) এর অনুরূপ

গ. দেওয়া আছে, $f(A) = I \Rightarrow A^3 - 3A^2 + 2A = I \Rightarrow A^{-1}(A^3) - A^{-1}(3A^2) + A^{-1}(2A) = A^{-1}(I)$

$\therefore A^{-1} = A^2 - 3A + 2I \;[\because A^{-1}.I = A^{-1}]$

$\therefore A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+0 & 0+0+1 & 1+0+1 \\ 1+1+0 & 0+1+1 & 1+1+1 \\ 0+1+0 & 0+1+1 & 0+1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1} = A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

07. $f(p,q,r) = \begin{bmatrix} p & p^2 & 1+p^3 \\ q & q^2 & 1+q^3 \\ r & r^2 & 1+r^3 \end{bmatrix}$

(ক) দেখাও যে, $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ একটি **Idempotent Matrix** (সমঘাতি ম্যাট্রিক্স)। 2

(খ) $p = 1, q = 2, r = 3$ ও $B = f(p,q,r)$ হলে B^{-1} নির্ণয় কর। 4

(গ) $p \neq q \neq r$ ও $|f(p,q,r)| = 0$ হলে দেখাও যে, $1 + pqr = 0$ 4

সমাধান

ক. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}; A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+2-4 & -4-6+8 & -8-8+12 \\ -2-3+4 & 2+9-8 & 4+12-12 \\ 2+2-3 & -2-6+6 & -4-8+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$

যেহেতু $A^2 = A$ সেহেতু A is Idempotent matrix. **(Showed)**

খ. বোর্ড প্রশ্ন 03 (গ) এর অনুরূপ

গ. দেওয়া আছে, $|f(p,q,r)| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} p & p^2 & 1+p^3 \\ q & q^2 & 1+q^3 \\ r & r^2 & 1+r^3 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} p & p^2 & 1 \\ q & q^2 & 1 \\ r & r^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & p^2 & p^3 \\ q & q^2 & q^3 \\ r & r^2 & r^3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow pqr\begin{vmatrix} p & p^2 & 1 \\ q & q^2 & 1 \\ r & r^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & p^2 & 1 \\ q & q^2 & 1 \\ r & r^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (pqr+1)\begin{vmatrix} p & p^2 & 1 \\ q & q^2 & 1 \\ r & r^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (pqr+1)\begin{vmatrix} p-q & p^2-q^2 & 0 \\ q-r & q^2-r^2 & 0 \\ r & r^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \begin{bmatrix} r_1' = r_1 - r_2 \\ r_2' = r_2 - r_3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (pqr+1)(p-q)(q-r)\begin{vmatrix} 1 & p+q & 0 \\ 1 & q+r & 0 \\ r & r^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (pqr+1)(p-q)(q-r)(r-p) = 0$

যেহেতু $p \neq q \neq r \;\therefore 1 + pqr = 0$ **(Showed)**

08. দুইটি নির্ণায়ক যথাক্রমে:

(i) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$ এবং (ii) $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & ca & bc \\ ca & (b+c)^2 & ab \\ bc & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix}$

(ক) প্রথম নির্ণায়ক থেকে $(a+b+c)^2$ উৎপাদক পৃথক কর। 2

(খ) দেখাও যে, প্রথম নির্ণায়কটির মান $2abc(a+b+c)^3$ 4

(গ) দ্বিতীয় নির্ণায়ক প্রথম নির্ণায়কে রূপান্তর কর। 4

সমাধান

ক. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 \\ b^2 & (c+a)^2-b^2 & b^2-b^2 \\ c^2 & c^2-c^2 & (a+b)^2-c^2 \end{vmatrix}$ $[\therefore c_2' = c_2 - c_1;\ c_3' = c_3 - c_1]$

$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & (a+b+c)(a-b-c) & (a+b+c)(a-b-c) \\ b^2 & (a+b+c)(c+a-b) & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b+c)(a+b-c) \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)(a+b+c)\begin{vmatrix} (b+c)^2 & (a-b-c) & (a-b-c) \\ b^2 & (c+a-b) & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b-c) \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)^2\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a-b-c & a-b-c \\ b^2 & c+a-b & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix}$

খ. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 & a^2-(b+c)^2 \\ b^2 & (c+a)^2-b^2 & b^2-b^2 \\ c^2 & c^2-c^2 & (a+b)^2-c^2 \end{vmatrix}$ $\left[\because \begin{matrix} c_2' = c_2 - c_1 \\ c_3' = c_3 - c_1 \end{matrix}\right]$

$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & (a+b+c)(a-b-c) & (a+b+c)(a-b-c) \\ b^2 & (a+b+c)(c+a-b) & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b+c)(a+b-c) \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)(a+b+c)\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a-b-c & a-b-c \\ b^2 & c+a-b & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)^2\begin{vmatrix} b^2+2bc+c^2 & a-b-c & a-b-c \\ b^2 & c+a-b & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2bc & -2c & -2b \\ b^2 & c+a-b & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix}$ $[\because r'_1 = r_1 - r_2 - r_3]$

$= \frac{(a+b+c)^2}{bc}\begin{vmatrix} 2bc & -2bc & -2bc \\ b^2 & bc+ab-b^2 & 0 \\ c^2 & 0 & ac+bc-c^2 \end{vmatrix} = \frac{(a+b+c)^2}{bc}\begin{vmatrix} 2bc & 0 & 0 \\ b^2 & bc+ab & b^2 \\ c^2 & c^2 & ac+bc \end{vmatrix}$ $\left[\because \begin{matrix} c_2'' = c_2 + c_1 \\ c_3'' = c_3 + c_1 \end{matrix}\right]$

$= \frac{(a+b+c)^2}{bc} \times 2bc\begin{vmatrix} bc+ab & b^2 \\ c^2 & ac+bc \end{vmatrix}$

$= 2(a+b+c)^2 bc\begin{vmatrix} c+a & b \\ c & a+b \end{vmatrix} = 2bc(a+b+c)^2[(c+a)(a+b)-bc]$

$= 2bc(a+b+c)^2[ca+a^2+bc+ab-bc]$

$= 2abc(a+b+c)^2(c+a+b) = 2abc(a+b+c)^3$ **(Showed)**

গ. এখানে, $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & ca & bc \\ ca & (b+c)^2 & ab \\ bc & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} c(a+b)^2 & c^2a & bc^2 \\ ca^2 & a(b+c)^2 & a^2b \\ b^2c & ab^2 & b(c+a)^2 \end{vmatrix}$

$= \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c^2 & (a+b)^2 & c^2 \\ (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} [c_1 \leftrightarrow c_2]$

$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ c^2 & (a+b)^2 & c^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} [r_1 \leftrightarrow r_2] = -\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \end{vmatrix} [c_2 \leftrightarrow c_3]$

$= \begin{bmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{bmatrix} [r_2 \leftrightarrow r_3]$ **(Showed)**

09. $\mathbf{f(x) = \log x \; ; g(x) = \cos(2x) \; ; h(x) = \sin(x)}$ **এবং** $\mathbf{a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n = 0}$

(ক) $\begin{vmatrix} f(x) & f(y) & f(z) \\ f(2x) & f(2y) & f(2z) \\ f(3x) & f(3y) & f(3z) \end{vmatrix} = ?$ **2**

(খ) **Prove that,** $\begin{vmatrix} 1 & g(\alpha) & h(\alpha) \\ 1 & g(\beta) & h(\beta) \\ 1 & g(\gamma) & h(\gamma) \end{vmatrix} = 2\{h(\beta) - h(\gamma)\}\{h(\gamma) - h(\alpha)\}\{h(\alpha\} - h(\beta)\}$ **4**

(গ) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix}$ কে বিস্তার কর। **4**

সমাধান

ক. $\begin{vmatrix} f(x) & f(y) & f(z) \\ f(2x) & f(2y) & f(2z) \\ f(3x) & f(3y) & f(3z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \log\frac{x}{y} & \log\frac{y}{z} & \log z \\ \log\frac{x}{y} & \log\frac{y}{z} & \log 2z \\ \log\frac{x}{y} & \log\frac{y}{z} & \log 3z \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ C_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$

$= \log\frac{x}{y} . \log\frac{y}{z} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \log z \\ 1 & 1 & \log 2z \\ 1 & 1 & \log 3z \end{vmatrix} = \log\frac{x}{y} . \log . \frac{y}{z} \times 0. = 0$ **(Ans.)**

খ. $\begin{vmatrix} 1 & g(\alpha) & h(\alpha) \\ 1 & g(\beta) & h(\beta) \\ 1 & g(\gamma) & h(\gamma) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos 2\beta & \sin\beta \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos 2\alpha - \cos 2\beta & \sin\alpha - \sin\beta \\ 0 & \cos 2\beta - \cos 2\gamma & \sin\beta - \sin\gamma \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} \begin{bmatrix} r_1' = r_1 - r_2 \\ r_2' = r_2 - r_3 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0 & 2(\sin^2\beta - \sin^2\alpha) & \sin\alpha - \sin\beta \\ 0 & 2(\sin^2\gamma - \sin^2\beta) & \sin\beta - \sin\gamma \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(\sin^2\beta - \sin^2\alpha) & \sin\alpha - \sin\beta \\ 2(\sin^2\gamma - \sin^2\beta) & \sin\beta - \sin\gamma \end{vmatrix}$

$= 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)\begin{vmatrix} -(\sin\alpha + \sin\beta) & 1 \\ -(\sin\beta + \sin\gamma) & 1 \end{vmatrix} = 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\gamma - \sin\alpha)$

$= 2\{h(\alpha) - h(\beta)\} h(\beta) - h(\gamma)\} \{h(\gamma) - h(\alpha)\}$ **(Proved)**

গ. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & a_2 & a_3 - a_2 \\ a_4 - a_5 & a_5 & a_6 - a_5 \\ a_7 - a_8 & a_8 & a_9 - a_8 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_3' = c_3 - c_2 \end{bmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_1 + a_3 - 2a_2 & a_2 & a_3 - a_2 \\ a_4 + a_6 - 2a_5 & a_5 & a_6 - a_5 \\ a_7 + a_9 - 2a_8 & a_8 & a_9 - a_8 \end{vmatrix} [c_1' = c_1 + c_3] = \begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 - a_2 \\ 0 & a_5 & a_6 - a_5 \\ 0 & a_8 & a_9 - a_8 \end{vmatrix} = 0$ **(Ans.)**

অধ্যায় ০৩ সরলরেখা

এই অধ্যায়ের বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্নের বিশ্লেষণ:

বোর্ড	২০২২				২০২১				২০১৯				২০১৮				২০১৭			
	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ
	ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ	
ঢাকা	1	1	1	6	2	2	2	6	1	1	1	2	1	2	1	5		1	1	4
রাজশাহী	2	2	1	6	2	2	2	7	1	1	1	5					1	1	1	2
চট্টগ্রাম	2	1	1	6				5				3					1	1	1	4
সিলেট	1	1	1	3	2	2	2	7		1		4					1	1		3
বরিশাল		2	1	5	2	2	2	5		1	1	5	সকল বোর্ড				1	1	1	4
যশোর	1	1	1	5	2	2	2	7	1	1	1	3					1	1	1	2
কুমিল্লা	2	2	1	5	3	3	3	6		1		3					2	1	1	4
দিনাজপুর	2	2	2	2	2	2	2	6		1	2	2								5
ময়মনসিংহ	1	1	1	5	2	2	2	8												

বি.দ্র.- ২০২০ সালে বোর্ড পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয় নাই এবং ২০১৮ সালে সকল বোর্ডে অভিন্ন প্রশ্ন পদ্ধতিতে পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয়।

গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা ও তথ্যাবলি

◈ দুই বিন্দুর দূরত্ব সম্পর্কিত:

(i) x-অক্ষ থেকে P (x, y) বিন্দুর দূরত্ব $= |y|$ একক এবং y অক্ষ থেকে P (x, y) বিন্দুর দূরত্ব $= |x|$ একক।

(ii) x-অক্ষের উপর প্রতিটি বিন্দুর কোটি শূন্য এবং এর উপর যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, 0) ধরা হয়।

(iii) y-অক্ষের উপর প্রতিটি বিন্দুর ভুজ শূন্য এবং এর উপর যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, y) ধরা হয়।

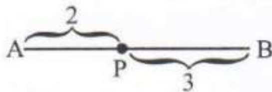
◈ অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্তকরণ:

(i) অন্তর্বিভক্ত: (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে (x, y) বিন্দুটি $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে,

$x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$ এবং $y = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$ (x_1, y_1) •——m_1——•(x, y)——m_2——• (x_2, y_2)

এখানে, m_1 ও m_2 কে চিহ্নিত করতে একটু সমস্যা হয়। যেমন: A ও B বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে P বিন্দু 2:3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে সমস্যা হয় যে,

AP: PB = 2: 3 হবে নাকি 3:2 হবে।



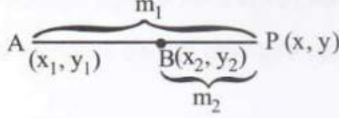
সমাধানটা হবে বইয়ে অথবা প্রশ্নে প্রথম বিন্দু যে দিকে দেয়া আছে, সেদিক হবে প্রথম অনুপাত অর্থাৎ, AP:PB = 2:3।

(ii) বহির্বিভক্ত: $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $P(x, y)$ বিন্দুটি $m_1 : m_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করলে,

$x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}$ এবং $y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$

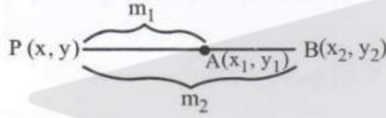
বহির্বিভক্তের ক্ষেত্রে দুটি ক্ষেত্র হতে পারে। যেমন:

(a) $m_1 > m_2$ হলে, বিভাজনকারী $P(x, y)$ বিন্দুটির অবস্থান হবে AB রেখাংশের বাইরে, তবে দ্বিতীয় বিন্দু B এর দিকে।



(b) $m_1 < m_2$ হলে,

বিভাজনকারী $P(x, y)$ বিন্দুটির অবস্থান হবে AB রেখাংশের বাইরে, তবে প্রথম বিন্দু A এর দিকে।



◈ **সমরেখ বিন্দু:**

A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$।

A, B, C এর নিশ্চায়ক, $\delta_{ABC} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

(i) $\delta_{ABC} = 0$ হলে, A, B, C বিন্দুত্রয় সমরেখ

(ii) $\delta_{ABC} \neq 0$ হলে বিন্দুত্রয় অসমরেখ এবং $\Delta ABC = \frac{1}{2}|\delta_{ABC}|$ বর্গ একক।

[ΔABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল]

(iii) $\delta_{ABC} > 0$ হলে বিন্দুত্রয় ধনাত্মকক্রমে অবস্থিত

(iv) $\delta_{ABC} < 0$ বিন্দুত্রয় ঋণাত্মকক্রমে অবস্থিত।

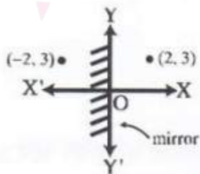
◈ **বিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দুর, রেখার সাপেক্ষে বিন্দুর, অক্ষের সাপেক্ষে বিন্দুর প্রতিবিম্ব:**

L রেখার সাপেক্ষে A এর প্রতিবিম্ব A′ হলে AA′, L রেখার উপর লম্ব হবে এবং PA= PA′ হবে অর্থাৎ L, AA′ এর লম্ব দ্বিখণ্ডক হবে। AA′ এর মধ্যবিন্দু L এর উপর অবস্থিত।



> বি:দ্র: x এর জায়গায় –x বসালে y অক্ষের সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর প্রতিবিম্ব পাওয়া যায়।
> y এর জায়গায় – y বসালে x অক্ষের সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর প্রতিবিম্ব পাওয়া যায়।

উদাহরণ: y-অক্ষের সাপেক্ষে $(2, 3)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব $(-2, 3)$



◈ **Concept:** সঞ্চারপথের কোন বিন্দুর x ও y চলককে তৃতীয় কোন চলক (t, θ ইত্যাদি) দ্বারা প্রকাশ করে যে সমীকরণ পাওয়া যায়, তাকে পরামিতিক সমীকরণ বলে।

একটি পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(x, y) = (f(t), g(t))$ হলে [t হচ্ছে পরামিতি] $x = f(t)$ ও $y = g(t)$ ধরে যেকোনো একটি হতে t এর মান বের করে অন্যটিতে t বর্জিত আকারে x ও y সম্বলিত সমীকরণ পাওয়া যাবে যা নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি

পোলার ও কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক সম্পর্কিত:

কোনো বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x, y) এবং পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) হলে,

(i) $y = r\sin\theta,\ x = r\cos\theta$

(ii) $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ [এখানে শর্ত প্রযোজ্য। $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$; যখন বিন্দুটি প্রথম বা চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত।

যখন বিন্দুটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত, তখন $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$] এবার চিন্তা করে বলো তো ৩য় চর্তুভাগের জন্য কি হবে?

দুই বিন্দুর দূরত্ব সম্পর্কিত:

দুই কার্তেসীয় বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব: $PQ = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ একক। PQ, P ও Q বিন্দুর সংযোজক রেখাংশের দৈর্ঘ্য নির্দেশ করে। যেহেতু এটি একটি দৈর্ঘ্য, কাজেই PQ এর মান সর্বদাই ধনাত্মক।

দুটি পোলার বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব: দুটি পোলার স্থানাঙ্ক $P(r_1,\theta_1)$ ও $Q(r_2,\theta_2)$ হলে $PQ = \sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_2\sim\theta_1)}$

ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত:

(i) বহুভুজের ক্ষেত্রফল: $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3), D(x_4,y_4)$ ও $E(x_5,y_5)$ হলে,

ABCDE বহুভুজটির ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_5+x_5y_1)-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_4+y_4x_5+y_5x_1)\}$ বর্গ একক।

or $ABCDE = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \end{matrix}\right|$

(ii) $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ হলে,

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ বর্গ একক। অথবা, $\Delta ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

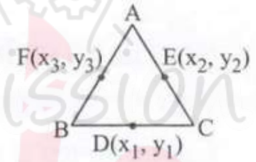
ত্রিভুজ বা সামান্তরিকের বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক:

(i) ΔABC এর, BC, CA ও AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $D(x_1, y_1), E(x_2, y_2), F(x_3, y_3)$ হলে,

$A \equiv (x_3+x_2-x_1,\ y_3+y_2-y_1)$

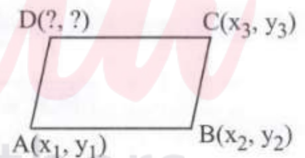
$B \equiv (x_1+x_3-x_2,\ y_1+y_3-y_2)$

$C \equiv (x_1+x_2-x_3,\ y_1+y_2-y_3)$



(ii) কোন সামান্তরিকের A, B ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে, $(x_1, y_1)\ (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ হলে চতুর্থ বিন্দুটি,

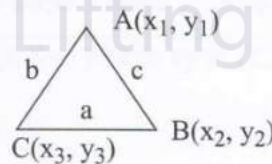
$D \equiv (x_1+x_3-x_2,\ y_1+y_3-y_2)$



ত্রিভুজের বিভিন্ন বিন্দুর স্থানাঙ্ক:

ভরকেন্দ্র $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

অন্তঃকেন্দ্র $\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$



বিভিন্ন ধরনের সরলরেখার সমীকরণ:

(i) **y-অক্ষের সমান্তরাল রেখা:** একটি সরল রেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং x-অক্ষের ছেদক অংশ a হলে রেখাটির সমীকরণ হবে $x = a$

(ii) **x- অক্ষের সমান্তরাল রেখা:** একটি সরলরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল y-অক্ষের ছেদক অংশ b, রেখাটির সমীকরণ $y = b$

(iii) **ঢাল-মূল রেখা:** একটি সরলরেখা মূলবিন্দুগামী এবং ঢাল m তবে রেখাটির সমীকরণ $y = mx$

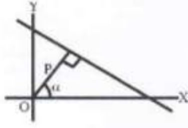
(iv) **ঢাল-ছেদ রেখা:** একটি সরলরেখার ঢাল m এবং y- অক্ষের ছেদক অংশ c, তবে সরলরেখাটির সমীকরণ হবে $y = mx + c$

(v) **ঢাল-বিন্দুরেখা:** একটি সরলরেখার ঢাল m এবং রেখাটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী তবে রেখাটির সমীকরণ হবে, $y - y_1 = m(x - x_1)$

(vi) **দ্বিচ্ছেদ রেখা:** একটি সরলরেখার x এবং y-অক্ষের ছেদক অংশ যথাক্রমে a এবং b হলে রেখাটির সমীকরণ হবে, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$

(vii) **দ্বি-বিন্দু রেখার সমীকরণ:** A এবং B এর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1), (x_2, y_2) হলে AB রেখার সমীকরণ, $\frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{x-x_1}{x_1-x_2}$

(viii) **লম্বকোণ রেখা:** মূলবিন্দু থেকে যে রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য P এবং উক্ত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α কোণ তৈরি করে, এরূপ রেখার সমীকরণ, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$



(ix) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সমীকরণদ্বয় একই সরলরেখা নির্দেশ করার শর্ত:

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

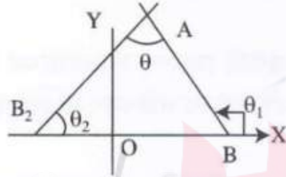
(x) $a_1x + b_1 y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2 y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

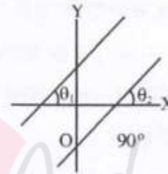
$a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ যেখানে, $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$

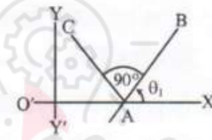
অন্তর্ভুক্ত কোণ, লম্বরেখা এবং সমান্তরাল রেখা:

(i) দুটি রেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ: $\theta = \pm\tan^{-1}\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2} = \pm\tan^{-1}\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ $\begin{bmatrix} m_1 = \text{১ম রেখার ঢাল} \\ m_2 = \text{২য় রেখার ঢাল} \end{bmatrix}$

সাধারণভাবে কোণ নির্ণয় করতে বললে '+' চিহ্ন ব্যবহার করব আর দুটি শর্ত বা শর্ত প্রতিপাদন বা রেখার সমীকরণ নির্ণয়ে '±' ব্যবহার করব।







(ii) দুটি রেখা পরস্পর লম্ব হলে, $m_1 \times m_2 = -1$

এবং দুটি রেখা পরস্পর সমান্তরাল হলে, $m_1 = m_2 \therefore \theta_1 = \theta_2$

(iii) $A(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী এবং $ax + by + c = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$

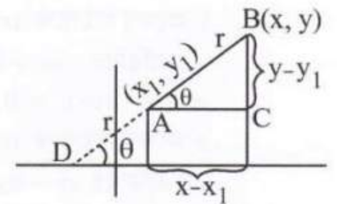
(iv) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ এবং $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ সমবিন্দু হলে, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ হবে।

(v) $A(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী এবং $ax + by + c = 0$ রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ, $b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0$

(vi) $ax + by + c = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $bx - ay + k = 0$ । অপর একটি শর্ত থেকে k এর মান পাওয়া যাবে।

(vii) $ax + by + c = 0$ রেখার সমান্তরাল অপর যে কোন রেখার সমীকরণ, $ax + by + k = 0$ ।

(viii) $\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = \pm r$



A বিন্দু থেকে θ কোণে r দূরত্বে অপর কোন বিন্দু B এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।

$AB = r, \angle CAB = \theta$

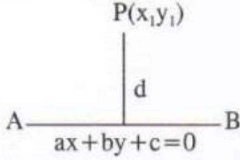
$AC = x - x_1 = r\cos\theta \Rightarrow \frac{x-x_1}{\cos\theta} = r$

$BC = y - y_1 = r\sin\theta \Rightarrow \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r$

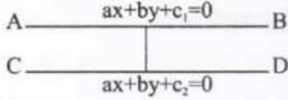
$\therefore \frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r$; [r ধনাত্মক/ঋণাত্মক ধরে $\sin\theta, \cos\theta$ এর দুই জোড়া মান সম্ভব]

দূরত্ব, সমদ্বিখণ্ডক রেখা ও কোণের সাপেক্ষে বিন্দু:

(i) লম্বদূরত্ব: $ax + by + c = 0$ রেখা হতে $P(x_1, y_1)$ বিন্দুর লম্ব দূরত্ব, $d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ একক

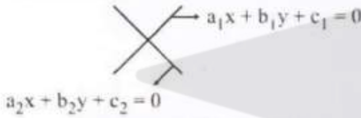


(ii) সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব:



AB ∥ CD হলে রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব, $d = \frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(iii) কোণের সমদ্বিখণ্ডক:



AB ও CD রেখার অন্তর্গত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ, $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

(iv) $(a_1a_2 + b_1b_2) > 0$ হলে, (+ve) ধরে স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক আর (−ve) ধরে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক পাব।

(v) $(a_1a_2 + b_1b_2) < 0$ (+ve) ধরে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক আর (−ve) ধরে স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক পাব।

(vi) $(a_1a_2 + b_1b_2) = 0$ হলে সরলরেখা দুটি লম্ব।

c_1 ও c_2 একই চিহ্ন (+ +, − −) যুক্ত হলে (+ve) ধরে মূলবিন্দু অন্তর্ধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ এবং c_1 ও c_2 বিপরীত চিহ্ন (+ −, −+) হলে (−ve) ধরে মূলবিন্দু ধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ পাওয়া যাবে।

(vii) (x_1, y_1) বিন্দুটি কোথায় অবস্থিত?

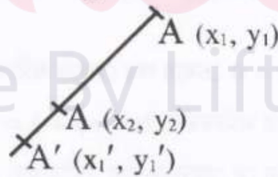
$(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1)(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2)(a_1a_2 + b_1b_2) > 0$ হলে বিন্দুটি স্থূলকোণে আছে।

$(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1)(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2)(a_1a_2 + b_1b_2) < 0$ হলে বিন্দুটি সূক্ষ্মকোণে আছে।

বিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দুর, রেখার সাপেক্ষে বিন্দুর, অক্ষের সাপেক্ষে বিন্দুর প্রতিবিম্ব:

(i) $P(x_2, y_2)$ বিন্দুর সাপেক্ষে $A(x_1, y_1)$ এর প্রতিবিম্ব $A'(x_1', y_1')$ হলে $PA = PA'$

অর্থাৎ $\frac{x_1+x_1'}{2} = x_2 \Rightarrow x_1' = 2x_2 - x_1$ এবং $\frac{y_1+y_1'}{2} = y_2 \Rightarrow y_1' = 2y_2 - y_1$



(ii) y-অক্ষের সাপেক্ষে $ax + by + c = 0$

এর প্রতিবিম্ব $-ax + by + c = 0$

$\Rightarrow ax - by - c = 0$

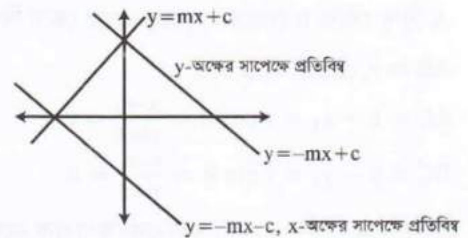
x-অক্ষের সাপেক্ষে $ax + by + c = 0$

এর প্রতিবিম্ব $ax - by + c = 0$

$y = mx + c$ এর ক্ষেত্রে y-অক্ষের সাপেক্ষে

$y = -mx + c$

x-অক্ষের সাপেক্ষে $y = -mx - c$



সহজে মনে রাখার কৌশল

- **বিভাগ বিন্দু ও অনুপাত সংক্রান্ত:**

(i) দুটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী একটি রেখাংশকে যদি x- অক্ষ বিভক্ত করে তবে, অনুপাত = – (কোটিদ্বয়ের অনুপাত)

(ii) দুটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী একটি রেখাংশকে যদি y-অক্ষ বিভক্ত করে তবে; অনুপাত = – (ভুজদ্বয়ের অনুপাত)

(iii) $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরল রেখাংশকে $ax + by + c = 0$ সরলরেখা $m: n$ অনুপাতে বিভক্ত করলে, $\frac{m}{n} = -\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}$ [যদি অনুপাত ঋণাত্মক আসে তবে অন্তর্বিভক্তি এবং অনুপাত ঋণাত্মক আসলে বহির্বিভক্তি]

- $f(x, y) \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0; g(x, y) \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখাদ্বয় এর ছেদবিন্দু ও $(x_1, y_1 = 0)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ $\frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{f(x_1,y_1)}{g(x_1,y_1)}$

উদাহরণ: (3,4) বিন্দুগামী এবং $x + y - 2 = 0$ ও $x - y = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ।

সমাধান: $\frac{x+y-2}{x-y} = \frac{3+4-2}{3-4} \quad \Rightarrow 3x - 2y - 1 = 0$

- যদি প্রশ্ন করি, (2,4) এবং (8, 14) বিন্দু দুটির মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক কী হবে?

উত্তর খুব সহজ: $\left(\frac{2+8}{2}, \frac{4+14}{2}\right) = (5,9)$

এবার যদি বলা হয়, দুটি বিন্দুর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (5,9) এবং বিন্দু দুটির একটির স্থানাঙ্ক (2,4) তাহলে অপর বিন্দুর স্থানাঙ্ক কী হবে? তোমরা খুব সহজেই এই অংকটা করতে পারবা। মনে মনে ভাববা ভাইয়া আমাদের সাথে এগুলো নিয়ে মশকরা করছে। কিন্তু না তোমরা অংকটি করবে নিম্নোক্তভাবে:

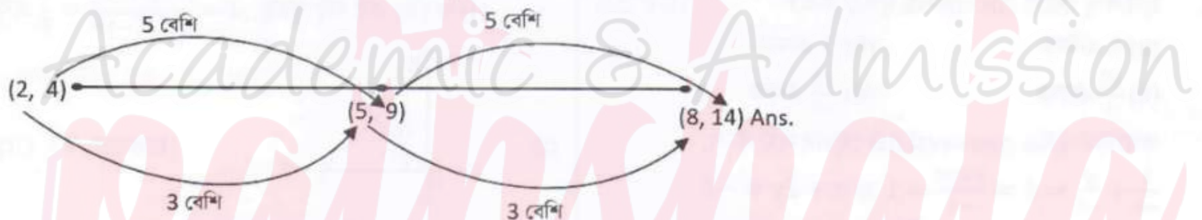
ধরি, অপর বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (a, b)

$\therefore 5 = \frac{2+a}{2} \Rightarrow a = 8, 9 = \frac{4+b}{2} \Rightarrow b = 14$

$\therefore$ অপর বিন্দুটির স্থানাঙ্ক হবে (8,14)

(2,4) (5,9) (a,b)

এবার চলো আমরা কম কম, বেশি বেশি Theory দিয়ে সমস্যাটিকে আপন করে ফেলি।

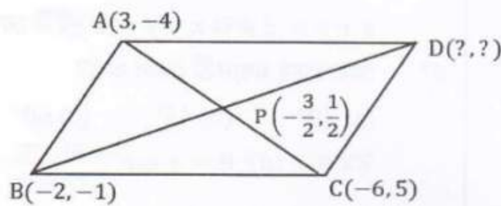


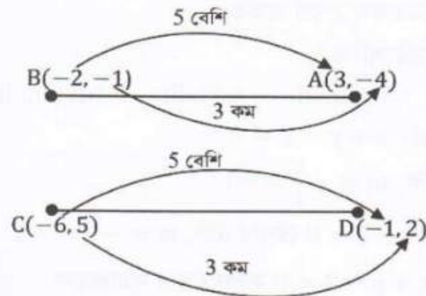
এত সহজ!!!!!!!!!!!!!!!!

হ্যাঁ, এবার এই মজার জিনিসটি দিয়েই আয়তক্ষেত্র, সামান্তরিক, রম্বস ও বর্গক্ষেত্রের তিনটি শীর্ষবিন্দু দেওয়া থাকলে চতুর্থ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক বের করে ফেলবো নিমিষেই।

- কোনো সামান্তরিকের একটি কর্ণের প্রান্তবিন্দুদ্বয় (3, −4) এবং (−6, 5)। তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (−2, −1) হলে চতুর্থ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান:





বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও সমাধান

◆ **MCQ:** বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্ন ও সমাধান

01. $(1, 150°)$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নিচের কোনটি? **[DB'22; MB'21; SB, JB'19; Din.B'17]**

(a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (d) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

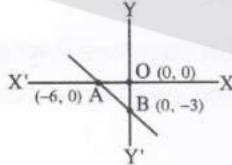
সমাধান: **(b);** এখানে $(1, 150°)$ বিন্দুর জন্য $r = 1$ এবং

$\theta = 150° \therefore x = r\cos\theta = 1 \times \cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

এবং $y = r\sin\theta = 1 \times \sin 150° = \frac{1}{2}$

$\therefore$ কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



02. AB এর ঢাল কত? **[DB'22, 19; BB'21]**

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $-\frac{3}{4}$ (d) $-\frac{4}{3}$

সমাধান: **(a);** $m = \frac{-3-0}{0-(-6)} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

03. মূলবিন্দু থেকে AB এর লম্ব দূরত্ব কত? **[DB'22]**

(a) 4 একক (b) 3 একক

(c) $\frac{12}{5}$ একক (d) $\frac{12}{25}$ একক

সমাধান: **(No Answer);** AB রেখার সমীকরণ,

$\frac{x}{-6} + \frac{y}{-3} = 1 \Rightarrow \frac{x+2y}{-6} = 1 \Rightarrow x + 2y = -6$

$\therefore x + 2y + 6 = 0$ মূলবিন্দু হতে AB রেখার লম্ব দূরত্ব,

$d = \frac{|0+2.0+6|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$ একক

04. $x + y - 2 = 0$ রেখাটির- **[DB'22]**

(i) সমান্তরাল রেখা $2x + 2y + 3 = 0$

(ii) মূলবিন্দু হতে লম্ব দূরত্ব $\sqrt{2}$ একক

(iii) উদ্দীপকের রেখাটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের সাথে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 2 বর্গ একক

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: **(d);** $x + y - 2 = 0$

রেখাটির ঢাল, $m = -\frac{1}{1} = -1$

(i) $2x + 2y + 3 = 0$ রেখার ঢাল, $m = -\frac{2}{2} = -1$

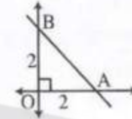
$\therefore$ রেখাটি $x + y - 2 = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল

(ii) মূলবিন্দু $(0, 0)$ হতে $x + y - 2 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব, $d = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ একক

(iii) $x + y - 2 = 0 \Rightarrow x + y = 2 \therefore \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$

$\therefore$ x ও y এর খণ্ডিতাংশ যথাক্রমে 2 ও 2 একক।

$\therefore \Delta OAB = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ বর্গ একক



05. $4y = 3(x - 4)$ এবং $4y = 3(x - 1)$ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব কত? **[DB, SB'22; DB, RB, SB, CB'21; Ctg.B'19; All.B'18]**

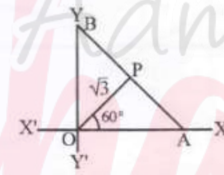
(a) $\frac{9}{4}$ একক (b) $\frac{15}{9}$ একক

(c) $\frac{9}{5}$ একক (d) কোনোটিই নয়

সমাধান: **(c);** $4y = 3(x - 4) \Rightarrow 3x - 4y - 12 = 0$ ……………(i) এবং $4y = 3(x - 1)$

$\Rightarrow 3x - 4y - 3 = 0$ ……………(ii)

(i) ও (ii) এর লম্ব দূরত্ব, $d = \frac{|-12-(-3)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{9}{5}$ একক

06. 

[RB'22; 17, Ctg.B'17]

AB রেখার সমীকরণ নিচের কোনটি?

(a) $\sqrt{3}x - y = 2\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{3}x + y = 2\sqrt{3}$

(c) $x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}$ (d) $x - \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}$

সমাধান: **(c);** $x\cos 60° + y\sin 60° = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x + y = 3$ এবং $x - y = 3$ দুইটি রেখার সমীকরণ।

07. রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? **[RB'22; JB'21]**

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

সমাধান: **(d);** $\theta = \pm\tan^{-1}\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

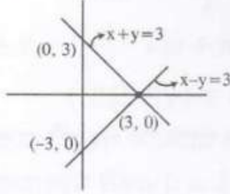
এখানে, $x + y = 3 \Rightarrow m_1 = -1$ এবং $x - y = 3$

$\Rightarrow m_2 = 1 \therefore \theta = 90°$

08. রেখাদ্বয় Y -অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? **[RB'22] [Ans: b]**

(a) 6 (b) 9 (c) 12 (d) 18

সমাধান: (b);



$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 3\right) \times 2 = 9$ বর্গ একক।

09. $(-2,4)$ এবং $(8,-10)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে $2:3$ অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? **[RB'22]**

(a) $(-22,8)$ (b) $(22,-8)$

(c) $(-22,32)$ (d) $(22,-32)$

সমাধান: (c); $\therefore x = \frac{2\times8-3\times(-2)}{2-3} = \frac{16+6}{-1} = -22$

$\therefore y = \frac{2\times(-10)-3\times(4)}{2-3} = \frac{-20-12}{-1} = 32$

$\therefore R = R(-22,32)$

10. $(1,2)$ বিন্দুগামী $2x - 3y - 9 = 0$ রেখার উপর লম্বরেখার সমীকরণ কোনটি? **[RB'22]**

(a) $3x + 2y + 7 = 0$ (b) $3x + 2y - 7 = 0$

(c) $2x - 3y + 4 = 0$ (d) $2x - 3y - 4 = 0$

সমাধান: (b); লম্বরেখার সমীকরণ, $3x + 2y = k$

$= 3.1 + 2.2 \Rightarrow 3x + 2y = 7 \Rightarrow 3x + 2y - 7 = 0$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x + y + 4 = 0$ এবং $x - y - 2 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

11. রেখা দুইটির ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? **[Ctg.B'22] [Ans: d]**

(a) $(3,1)$ (b) $(1,3)$

(c) $(-3,-1)$ (d) $(-1,-3)$

12. x-অক্ষের সাথে রেখা দুইটি যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল কত? **[Ctg.B'22] [Ans: a]**

(a) 9 বর্গ একক (b) 6 বর্গ একক

(c) 4 বর্গ একক (d) 3 বর্গ একক

13. $(-5,10)$ বিন্দুগামী সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ কোণ উৎপন্ন করে। সরলরেখার সমীকরণ- **[Ctg.B'22]**

(a) $4x + 3y - 10 = 0$ (b) $3x - 4y + 55 = 0$

(c) $3x + 4y + 55 = 0$ (d) $4x + 3y + 30 = 0$

সমাধান: (b); $(y - y_1) = m(x - x_1)$

$\Rightarrow (y - 10) = \tan\left[\tan^{-1}\frac{3}{4}\right](x + 5)$

$\Rightarrow (y - 10) = \frac{3}{4}(x + 5) \Rightarrow 4y - 40 = 3x + 15$

$\Rightarrow 3x - 4y + 55 = 0$

14. $A(3,-2), B(4,6)$ এবং $C(5, 7)$ কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে- **[Ctg.B'22]**

(i) ভরকেন্দ্র $\left(4,\frac{11}{3}\right)$

(ii) BC এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{9}{2},\frac{13}{2}\right)$

(iii) AB এর সমীকরণ $8x - y - 26 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (d); ভরকেন্দ্র $\equiv \left(\frac{3+4+5}{3},\frac{-2+6+7}{3}\right)$

$= \left(4,\frac{11}{3}\right)$ BC এর মধ্যবিন্দু $= \left(\frac{9}{2},\frac{13}{2}\right)$

AB এর সমীকরণ $\Rightarrow \frac{y+2}{-2-6} = \frac{x-3}{3-4} \Rightarrow -y - 2$

$= -8x + 24 \Rightarrow 8x - y - 26 = 0$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$(\sqrt{3},1)$ বিন্দু হতে $\sqrt{3}x - y + 8 = 0$ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য P এবং লম্ব রেখাটি x-অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে-

15. P-এর মান কত? **[Ctg.B, SB'22; RB, JB'21]**

(a) 5 (b) 4 (c) 2 (d) $5\sqrt{2}$

সমাধান: (a); লম্বের দৈর্ঘ্য $= \left|\frac{\sqrt{3}.\sqrt{3}-1+8}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}\right| = 5 = P$

16. θ-এর মান- **[SB'22]**

(a) 30° (b) 120° (c) 60° (d) 150°

সমাধান: (d); $\sqrt{3}x - y = -8 \Rightarrow \frac{x}{\frac{-8}{\sqrt{3}}} + \frac{y}{8} = 1$

প্রদত্ত রেখার ঢাল $\sqrt{3}$

$\therefore$ এর লম্বরেখার ঢাল $-\frac{1}{\sqrt{3}} \therefore \theta = 150° \left[\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

17. $2x + 3y = 8$ রেখা দ্বারা- **[SB, CB, JB'22] [Ans: a]**

(i) x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ 4

(ii) অক্ষদ্বয়ের সাথে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{16}{3}$ বর্গ একক

(iii) y-অক্ষকে $(0,8)$ বিন্দুতে ছেদ করে

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

18. $4x - 8y + 23 = 0$ রেখার ঢাল কত? [BB'22; DB'21]
(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) -2 (d) 2
সমাধান: (b); $4x - 8y + 23 = 0 \Rightarrow 8y = 4x + 23$
$\therefore y = \frac{4x}{8} + \frac{23}{8} = \frac{1}{2}x + \frac{23}{8} \therefore$ ঢাল $= \frac{1}{2}$

19. যে সরলরেখা x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে এবং মূলবিন্দু দিয়ে যায় তার সমীকরণ কোনটি? [BB'22; Ctg.B'21]
(a) $x = \sqrt{3}y$ (b) $y = \sqrt{3}x$
(c) $y + \sqrt{3}x = 0$ (d) $\sqrt{3}y + x = 0$
সমাধান: (b); মূলবিন্দুগামী রেখা, $y = mx$
$m = \tan 60° = \sqrt{3} \therefore y = mx = \sqrt{3}x$

20. $3x + \sqrt{3}y - 10 = 0$ রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে? [BB, MB'22]
(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{5\pi}{6}$
সমাধান: (b); $3x + \sqrt{3}y - 10 = 0 \Rightarrow 3x + \sqrt{3}y$
$= 10 \Rightarrow \frac{3x}{10} + \frac{\sqrt{3}y}{10} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{10}{3}} + \frac{y}{\frac{10}{\sqrt{3}}} = 1$
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ স্থূলকোণ $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|$
$= \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\frac{10}{\sqrt{3}}}{\frac{10}{3}}\right| = \pi - \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$
$\boxed{\theta = \frac{2\pi}{3}}$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$3x - 4y - 12 = 0$ সরলরেখাটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে,

21. উদ্দীপকের সরলরেখার উপর লম্ব এবং $(1, 2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ কোনটি?
[JB, CB, BB'22; DB, RB, SB, BB, JB, MB'21]
(a) $4x + 3y - 10 = 0$ (b) $4x + 3y - 12 = 0$
(c) $3x - 4y + 12 = 0$ (d) $4x - 3y - 10 = 0$
সমাধান: (a); $3x - 4y - 12 = 0$ রেখার উপর লম্ব এবং $(1, 2)$ বিন্দুগামী রেখা, $4x + 3y = 4 \times 1 + 3 \times 2$
$\Rightarrow 4x + 3y = 10 \Rightarrow 4x + 3y - 10 = 0$

22. $x + y - 4 = 0$ সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ তৈরি করে তার ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [JB'22] [Ans: b]
(a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 32

23. $(-1, -1)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি?
[RB, BB, JB, CB'22; DB, RB, Ctg.B, SB, JB, Din.B'21; RB, BB'19; All.B'18; DB, SB, CB, Din.B'17]
(a) $(\sqrt{2}, -45°)$ (b) $(\sqrt{2}, 45°)$
(c) $(\sqrt{2}, 135°)$ (d) $(\sqrt{2}, 225°)$
সমাধান: (d); $(-1, -1) \equiv (r, \theta)$
$\Rightarrow r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
$\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{-1}{-1}\right| = -\pi + \frac{\pi}{4}$
$= \frac{-4\pi + \pi}{4} = \frac{-3\pi}{4} = -135°$
অথবা, $\theta = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{-1}{-1}\right| = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} = 225°$
$\therefore (-1, -1) \equiv (\sqrt{2}, 225°)$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$\sqrt{2}x - y + 5 = 0$ একটি সরলরেখার সমীকরণ।

24. প্রদত্ত সরলরেখার দ্বারা y-অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য কোনটি? [CB'22]
(a) -5 (b) $-\frac{5}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (d) 5
সমাধান: (d); $\sqrt{2}x - y + 5 = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2}x + 5$
$\therefore$ y অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 5$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$2x - ky + 1 = 0$ এবং $3x + 2y - 6 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ

25. দ্বিতীয় রেখাটির লম্ব রেখার ঢাল কত?
[Ctg.B, Din.B'22; SB, CB'21; SB'17]
(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $-\frac{2}{3}$ (d) $-\frac{3}{2}$
সমাধান: (b); ২য় সরলরেখার সমীকরণ, $3x + 2y - 6 = 0$
$\therefore$ ২য় সরলরেখার ঢাল, $m_1 = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}} = -\frac{3}{2}$; ২য় সরলরেখার লম্ব রেখার ঢাল m_2 হলে,
$m_1 m_2 = -1 \Rightarrow -\frac{3}{2}m_2 = -1 \therefore m_2 = \frac{2}{3}$

26. রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হলে k এর মান কত হবে? [Din.B'22; DB, SB'21]
(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $-\frac{3}{4}$ (d) $-\frac{4}{3}$
সমাধান: (d); রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হলে,
$\frac{2}{3} = \frac{-k}{2} \therefore k = -\frac{4}{3}$

27. $(-3, -4)$ ও $(6, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাটিকে y-অক্ষরেখা যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, তা হলো [MB'22]
(a) 2:1 (b) 1:2 (c) 2:3 (d) 3:2
সমাধান: (b); বিন্দুটি $(0, y)$; ধরি, 1:k অনুপাতে বিভক্ত করে $\therefore R = \left(\frac{-3k+6}{1+k}, \frac{-4k+2}{1+k}\right)$
এখন, $\frac{-3k+6}{1+k} = 0 \Rightarrow -3k + 6 = 0 \Rightarrow -3k = -6$
$\therefore k = 2 \therefore$ 1:2 অনুপাতে।
Shortcut: নির্ণেয় অনুপাত = −(ভুজদ্বয়ের অনুপাত)

28. $3x - 7y - 21 = 0$ সরলরেখাটি **[MB'22] [Ans: d]**
(i) $+\frac{3}{7}$ ঢালবিশিষ্ট
(ii) $(-7, -6)$ বিন্দুগামী
(iii) x- অক্ষ হতে 7 একক দৈর্ঘ্য খণ্ডিত করে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

29. $y \pm x = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ– **[MB'22; RB'21] [Ans: c]**
(a) $45°$ (b) $60°$ (c) $90°$ (d) $120°$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$2x - 3y + 6 = 0$$

30. রেখাটি x অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক- **[DB'21]**
(a) $(-3, 0)$ (b) $(0, -2)$ (c) $(0, 2)$ (d) $(3, 0)$
সমাধান: (a); $y = 0$ বসিয়ে $x = -3$
$\therefore$ x অক্ষের ছেদবিন্দু $(-3, 0)$

31. $r = 3\cos\theta$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ কোনটি? **[RB'21]**
(a) $x^2 + y^2 - 3x = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 3x = 0$
(c) $x^2 + y^2 - 3y = 0$ (d) $x^2 + y^2 + 3y = 0$
সমাধান: (a); $r = 3\cos\theta$ বা, $r^2 = 3r\cos\theta$
বা $x^2 + y^2 = 3x \therefore x^2 + y^2 - 3x = 0$

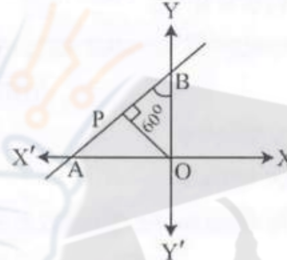
32. $2x - 3y - 1 = 0$ সরলরেখার- **[RB'21]**
(i) ঢাল $= \frac{2}{3}$ (ii) x অক্ষকে $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে
(iii) সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $3x + 2y + 7 = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (a); (i) ঢাল $= -\frac{\text{x এর সহগ}}{\text{y এর সহগ}} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$
(ii) $y = 0$ হলে $x = \frac{1}{2} \therefore$ x অক্ষের ছেদবিন্দু $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
(iii) সমান্তরাল রেখা $2x - 3y + k = 0$

33. $3x - 4y + k = 0$ একটি সরলরেখা- **[Ctg.B'21]**
(i) উহার ঢাল $= \frac{3}{4}$
(ii) উহা y-অক্ষ থেকে $\frac{k}{4}$ একক দৈর্ঘ্য ছেদ করে
(iii) উহা x-অক্ষকে $(3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (a); (i) $m = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$
(ii) $x = 0$ হলে, $y = \frac{k}{4}$ (iii) $y = 0$ হলে, $x = -\frac{k}{3}$
$\therefore$ x অক্ষের ছেদবিন্দু $\left(-\frac{k}{3}, 0\right)$

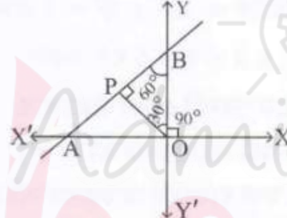
34. $\frac{3}{2}$ ঢালবিশিষ্ট সরলরেখাটি $\lambda x + 3y - 7 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব হলে λ এর মান- **[Ctg.B'21]**
(a) 2 (b) 3 (c) $\frac{9}{2}$ (d) $\frac{9}{4}$
সমাধান: (a); এখানে, $\frac{3}{2} \times \left(-\frac{\lambda}{3}\right) = -1 \Rightarrow \lambda = 2$

35. $px + qy = pq$ সরলরেখাটি x ও y অক্ষদ্বয় হতে যথাক্রমে যে যে অংশ খণ্ডন করে তাদের দৈর্ঘ্য- **[Ctg.B'21]**
(a) p, q (b) q, p (c) $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}$ (d) $\frac{1}{q}, \frac{1}{p}$
সমাধান: (b); $px + qy = pq \Rightarrow \frac{x}{q} + \frac{y}{p} = 1$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



36. OP রেখার ঢাল কত? **[SB'21]**
(a) $-\sqrt{3}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{3}$
সমাধান: (a); ঢাল, $m = \tan(90° + 30°)$
$= -\cot 30° = -\sqrt{3}$



37. $OP = 2$ হলে, AB রেখার সমীকরণ কোনটি? **[SB'21]**
(a) $x + \sqrt{3}y + 4 = 0$ (b) $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$
(c) $\sqrt{3}x + y + 4 = 0$ (d) $\sqrt{3}x - y + 4 = 0$
সমাধান: (b); $x\cos 120° + y\sin 120° = OP$
$\Rightarrow -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2} = 2 \Rightarrow x - \sqrt{3}y + 4 = 0$

38. $3x - 4y + 12 = 0$ সরলরেখা- **[SB'21]**
(i) দ্বারা x-অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য 4 একক
(ii) অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল 12 বর্গ একক
(iii) y-অক্ষকে $(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (b); $3x - 4y = -12 \Rightarrow \frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$
$\therefore$ x-অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য 4 একক।
ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ বর্গ একক।
আবার, y-অক্ষকে $(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

39. মূলবিন্দু হতে 4 একক দূরবর্তী এবং -1 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ নিচের কোনটি? **[BB'21]**

(a) $x + y \pm 4\sqrt{2} = 0$ (b) $y - x \pm 4\sqrt{2} = 0$
(c) $y + 4\sqrt{2}x = 0$ (d) $4\sqrt{2}x - y = 0$

সমাধান: (a); শুধু a এর রেখাটির ঢালই -1।
ধরি, সরলরেখার সমীকরণ, $y = (-1)x + c$
$\therefore x + y - c = 0$
এখন, মূলবিন্দু হতে লম্ব দূরত্ব $= 4 \Rightarrow \frac{|0+0-c|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 4$
$\Rightarrow |c| = 4\sqrt{2} \therefore c = \pm 4\sqrt{2}$
$\therefore$ সমীকরণ, $x + y \pm 4\sqrt{2} = 0$

40. $3x + 4y - 12 = 0$ সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে একটি ত্রিভুজ গঠন করলে- **[BB'21]**

(i) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 6 বর্গএকক
(ii) ত্রিভুজটি ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত
(iii) অক্ষদ্বয় কর্তৃক রেখাটির খণ্ডিত অংশের পরিমাণ 5 একক

নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (d); $3x + 4y = 12 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$
$\therefore$ ত্রিভুজটি ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত
অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশ $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ একক
$\therefore$ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ বর্গ একক।

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$2x + 2y - \sqrt{5} = 0$ একটি সরলরেখার সমীকরণ।

41. উদ্দীপকের সরলরেখাটি দ্বারা স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের সহিত উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নিচের কোনটি? **[BB'21]**

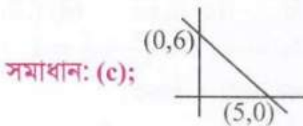
(a) $\frac{5}{8}$ বর্গ একক (b) $\frac{5}{4}$ বর্গ একক
(c) $\frac{5}{2}$ বর্গ একক (d) $4\sqrt{5}$ বর্গ একক

সমাধান: (a); $2x + 2y = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + \frac{y}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = 1$
$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{8}$ বর্গ একক।

42. $\frac{x}{5} + \frac{y}{6} = 1$ রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল কত? **[JB'21]**

(a) 5 বর্গ একক (b) 6 বর্গ একক
(c) 15 বর্গ একক (d) 30 বর্গ একক

সমাধান: (c);



$\Delta = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$ বর্গ একক

43. $2x + 3y = 7$ এবং $3ax - 5by + 15 = 0$ সমীকরণ দুটি একই সরলরেখা প্রকাশ করলে ধ্রুবক a এর মান কত? **[JB'21]**

(a) $\frac{10}{7}$ (b) $-\frac{10}{7}$ (c) $\frac{5}{7}$ (d) $-\frac{5}{7}$

সমাধান: (b); $\frac{2}{3a} = \frac{3}{-5b} = \frac{-7}{15}$
$\Rightarrow a = -\frac{10}{7}$ [১ম ও ৩য় অনুপাত হতে]

44. $x - 3y + 5 = 0$ এবং $2x - 6y + 9 = 0$ রেখাদ্বয়ের ক্ষেত্রে- **[JB'21]**

(i) রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল
(ii) দ্বিতীয় রেখাটির ঢাল $= \frac{1}{3}$
(iii) এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{1}{\sqrt{10}}$

নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); ১ম রেখার ঢাল $= -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$; $2x - 6y + 10 = 0$
২য় রেখার ঢাল $= -\frac{2}{-6} = \frac{1}{3}$; $2x - 6y + 9 = 0$
$\therefore d = \frac{|10-9|}{\sqrt{36+4}} = \frac{1}{2\sqrt{10}}$

45. একটি সরলরেখার ঢাল $\frac{2}{3}$ এবং y- অক্ষের খণ্ডিতাংশ -5 হলে, রেখাটির সমীকরণ- **[CB'21]**

(a) $2x + 3y = 15$ (b) $3x + 2y = 15$
(c) $2x - 3y = 15$ (d) $3x - 2y = 15$

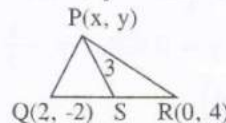
সমাধান: (c); সমীকরণ, $y = \frac{2}{3}x - 5$
$\Rightarrow 3y = 2x - 15 \Rightarrow 2x - 3y = 15$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$P(x, y), Q(2, -2)$ এবং $R(0, 4)$ বিন্দুত্রয় একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

46. P হতে QR এর উপর মধ্যমার দৈর্ঘ্য $\sqrt{3}$ একক হলে, মধ্যমাটির সমীকরণ নিচের কোনটি? **[CB'21]**

(a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 1$
(b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 1$
(c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 1$
(d) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 1$

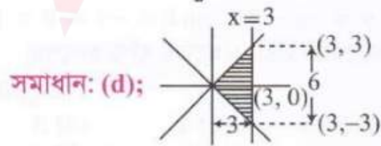
সমাধান: (c); QR এর মধ্যবিন্দু $\equiv S\left(\frac{2+0}{2}, \frac{-2+4}{2}\right)$
$\equiv (1, 1) \therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y = 1$



47. (i) QR এর মধ্যবিন্দুর স্থানাংক $(1, 1)$ [CB'21]
(ii) QR এর সমান্তরাল রেখার ঢাল 3
(iii) QR এর দৈর্ঘ্য $2\sqrt{10}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (b); QR এবং এর সমান্তরাল ঢাল, $m = \frac{4+2}{0-2}$ $= -3$, $QR = \sqrt{(2-0)^2 + (4+2)^2} = 2\sqrt{10}$ একক।

48. $(1, 2)$ ও $(3, -2)$ বিন্দুগামী রেখার অক্ষ দুটির মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য কত? [CB'21]
(a) $2\sqrt{5}$ (b) $3\sqrt{5}$ (c) $5\sqrt{2}$ (d) $5\sqrt{3}$
সমাধান: (a); $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \Rightarrow \frac{y-2}{2+2} = \frac{x-1}{1-3}$
$\Rightarrow \frac{y-2}{4} = \frac{x-1}{-2} \Rightarrow y - 2 = -2x + 2$
$\Rightarrow 2x + y = 4 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$
∴ অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ একক।

49. $3y - 2x + 6 = 0$ রেখাটি- [Din.B'21]
(i) y-অক্ষকে $(0,2)$ বিন্দুতে ছেদ করে
(ii) x-অক্ষ হতে 3 একক অংশ খণ্ডন করে
(iii) অক্ষদ্বয়ের সাথে 3 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ গঠন করে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (c); $2x - 3y = 6 \Rightarrow \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$
∴ y-অক্ষকে $(0, -2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$ ∴ x-অক্ষ হতে খণ্ডিত অংশ 3 একক
∴ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$ বর্গ একক

50. $x = 3$ এবং $y = \pm x$ সরলরেখাগুলো দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [Din.B'21]
(a) 3 (b) $\frac{9}{2}$ (c) 6 (d) 9
সমাধান: (d);


∴ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$ বর্গ একক

51. $y = 2x + 3$ এবং $3x - y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ কত? [Din.B'21]
(a) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{7}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$
(c) $-\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$ (d) $\tan^{-1}(7)$
সমাধান: (b); সরলরেখারদ্বয়ের ঢাল যথাক্রমে 2 এবং 3
সূক্ষ্মকোণ θ হলে, $\tan\theta = \left|\frac{3-2}{1+3.2}\right| = \frac{1}{7}$
∴ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$2x + 5y + 1 = 0$ এবং $-kx - 10y - 3 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

52. রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে k এর মান কত? [Din.B'21]
(a) -4 (b) -3 (c) 21 (d) -25
সমাধান: (d); শর্তমতে, $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$
$\Rightarrow -2k - 50 = 0 \Rightarrow k = -25$

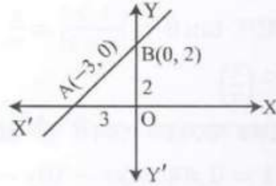
53. $(1, 0)$ বিন্দুগামী প্রথম রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ কোনটি? [Din.B'21]
(a) $2x + 5y - 2 = 0$ (b) $2x + 5y + 2 = 0$
(c) $5x - 2y - 5 = 0$ (d) $5x - 2y + 5 = 0$
সমাধান: (a); নির্ণেয় রেখাটি $2x + 5y = 2.1 + 5.0$
$\Rightarrow 2x + 5y - 2 = 0$

54. $ax + by + c = 0$ সমীকরণটি একটি সরলরেখা নির্দেশ করে। [MB'21]
(i) সরলরেখাটির ঢাল $-\frac{a}{b}$
(ii) $c = 0$ হলে সেটি মূলবিন্দুগামী
(iii) অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|ab|$ বর্গ একক
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (a); (iii) এর ক্ষেত্রে $ax + by = -c$
$\Rightarrow \frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$ ∴ $\Delta = \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{c}{b}\right)\right| = \frac{1}{2} \times \left|\frac{c^2}{ab}\right|$

55. $4x - 3y + 2 = 0$ এবং $8x - 6y - 9 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? [MB'21; SB'19]
(a) $\frac{11}{5}$ (b) $\frac{13}{10}$ (c) $\frac{11}{10}$ (d) $\frac{13}{5}$
সমাধান: (b); $8x - 6y + 4 = 0$ ……… (i)
$8x - 6y - 9 = 0$ ……… (ii)
∴ $d = \frac{|4-(-9)|}{\sqrt{8^2+6^2}} = \frac{13}{10}$ একক।

56. $3x - 4y + 3 = 0$ এবং $4x - 3y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ- [MB'21]
(a) $x + y = 2$ (b) $x - y = 2$
(c) $x + y + 2 = 0$ (d) $x - y + 2 = 0$
সমাধান: (c); $a_1a_2 + b_1b_2 = 12 + 12 = 24 > 0$
∴ স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ $\frac{3x-4y+3}{\sqrt{25}} = \frac{4x-3y+5}{\sqrt{25}}$
$\Rightarrow 3x - 4y + 3 = 4x - 3y + 5 \Rightarrow x + y + 2 = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



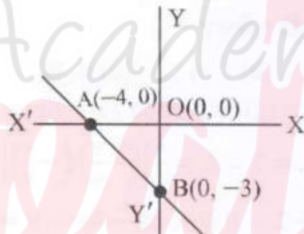
$OA = 3, OB = 2$

57. AB এর সমীকরণ কোনটি? **[MB'21]**
(a) $2x + 3y = 1$ (b) $2x + 3y = 6$
(c) $2x - 3y = -6$ (d) $2x - 3y = 1$
সমাধান: (c); $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow \frac{-2x+3y}{6} = 1$
$\Rightarrow 2x - 3y + 6 = 0 \Rightarrow 2x - 3y = -6$

58. AB এর ঢাল কত? **[MB'21]**
(a) $-\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{3}{2}$
সমাধান: (b); AB এর সমীকরণ $2x - 3y + 6 = 0$ হলে রেখাটির ঢাল, $m = -\frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$

59. দুই সরলরেখা $x + by = 1$ এবং $ax + y = 1$ $(1, 1)$ বিন্দুতে ছেদ করে। a এবং b এর মান কত? **[MB'21]**
(a) 0, 0 (b) 0, 1 (c) 1, 0 (d) 1, 1
সমাধান: (a); $(1, 1)$ বসিয়ে পাই, $1 + b = 1$ বা, $b = 0$ এবং $a + 1 = 1$ বা, $a = 0$

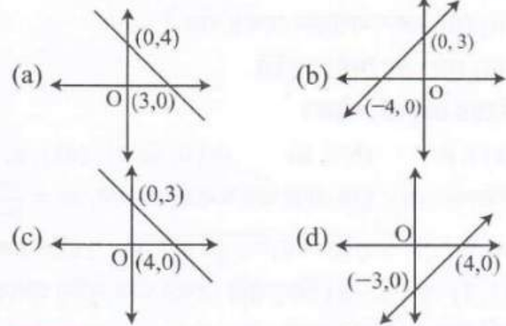
নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



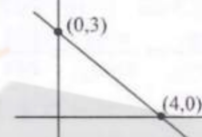
60. মূল বিন্দু থেকে AB এর লম্ব দূরত্ব হলো- **[DB'19]**
(a) 5 (b) 3 (c) $\frac{12}{5}$ (d) $\frac{12}{25}$
সমাধান: (c); [A 4 O, x, 5, 3, B] $\Delta AOB = \frac{1}{2} \times 4 \times 3$
$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 5 \times x = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \therefore x = \frac{12}{5}$

61. k-এর কোন মানের জন্য $2x - y + 7 = 0$ এবং $3x + ky - 5 = 0$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে? **[RB'19]**
(a) −6 (b) $-\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) 6
সমাধান: (d); সরলরেখাদ্বয়ের ঢাল যথাক্রমে 2 এবং লম্ব হলে $2 \times -\frac{3}{k} = -1 \Rightarrow \boxed{k = 6}$

62. $3x + 4y = 12$ সরলরেখাটির লেখচিত্র কোনটি? **[RB'19]**



সমাধান: (c); $3x + 4y = 12 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$



নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
একটি রেখার সমীকরণ $x + 3y + 3 = 0$.

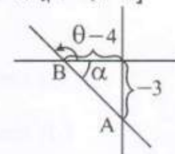
63. রেখাটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? **[RB'19]**
(a) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
(c) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (d) $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
সমাধান: (c); $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-1} = 1$
$\therefore \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ হলো মধ্যবিন্দু।

64. $x - \sqrt{3}y = 7$ সরলরেখার ঢাল কত? **[RB'19]**
(a) $-\sqrt{3}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{3}$
সমাধান: (c); $\sqrt{3}y = x - 7 \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{7}{\sqrt{3}}$
$\therefore \boxed{m = \frac{1}{\sqrt{3}}}$
বিকল্প: ঢাল, $m = \frac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}} = -\frac{1}{(-\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x + y + 3 = 0$

65. উপরোক্ত সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কত ডিগ্রী কোণ উৎপন্ন করে? **[Ctg.B'19]**
(a) 45° (b) 60° (c) 90° (d) 135°
সমাধান: (d); $y = -x - 3 \therefore \tan\theta = -1 \Rightarrow \theta = 135°$

66. উপরোক্ত সরলরেখাটি দ্বারা y-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ কত? **[Ctg.B'19]**
(a) −3 (b) −1 (c) 1 (d) 3
সমাধান: (d); $x = 0$ বসলে পাই $y = -3$ খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য = 3 একক
[Note: দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হয় না]



67. $y = 2x^2 + 3x + 5$ বক্ররেখার (0, 1) বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল কত? **[SB'19]**

(a) -3 (b) $-\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) 3

সমাধান: (b); $\frac{dy}{dx} = y_1 = y_1 = 4x + 3$; (0,1) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= 4 \times 0 + 3 = 3$

$\therefore$ অভিলম্বের ঢাল $= -\frac{1}{3}$

68. $y = x$ সরলরেখাটি- **[SB'19]**

(i) মূলবিন্দুগামী (ii) ঢাল 1

(iii) উভয় অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

69. $y + x = 0$ সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে? **[BB'19]**

(a) 45° (b) 135° (c) 225° (d) 315°

সমাধান: (b); $y + x = 0 \therefore y = -x$

$\theta = \tan^{-1}(-1) = 135°$

70. $x + y = 2$ এবং $y - x = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং x-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নিম্নের কোনটি? **[BB'19 Ctg.B'17]**

(a) $x = 2$ (b) $y = 2$

(c) $y - 1 = 0$ (d) $x - 1 = 0$

সমাধান: (c);

$x + y = 2$
$-x + y = 0$
$(+), 2y = 2$
$\therefore y = 1$

x-অক্ষের সমান্তরাল হলে, $y - 1 = 0$

71. $x - 3y - 8 = 0$ এবং $3x - y + 7 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের মান কত? **[BB'19]**

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ (d) $\tan^{-1}(\infty)$

সমাধান: (b); $3y = x - 8 \therefore y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$

$\therefore$ ঢাল $m_1 = \frac{1}{3}$; $3x - y + 7 = 0$

$\therefore y = 3x + 7 \therefore$ ঢাল $m_2 = 3$

$\tan\varphi = \frac{3-\frac{1}{3}}{1+3.\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \therefore \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

72. $x - \sqrt{3}y - \sqrt{3} = 0$ সরলরেখাটির- **[BB'19]**

(i) ঢাল $= \frac{1}{\sqrt{3}}$

(ii) লম্ব রেখার ঢাল $= -\sqrt{3}$

(iii) x- অক্ষের খন্ডিতাংশ $= \sqrt{3}$ একক

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (d); $\sqrt{3}y = x - \sqrt{3} \therefore y = \frac{x}{\sqrt{3}} - 1$

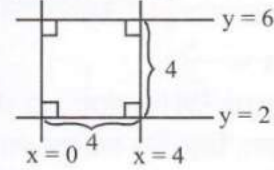
$\therefore$ ঢাল $= \frac{1}{\sqrt{3}} \therefore$ লম্ব রেখার ঢাল $= -\sqrt{3}$

$x - \sqrt{3}y = \sqrt{3} \therefore \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{1} = 1$

73. $x = 0, x = 4, y = 2, y = 6$ রেখাগুলো দ্বারা আবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? **[JB'19]**

(a) 24 (b) 16 (c) 12 (d) 8

সমাধান: (b);



$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= 4 \times 4 = 16$ বর্গ একক

74. 'b' এর মান কত হলে $y = bx(1 - bx)$ বক্ররেখার মুলবিন্দুতে স্পর্শকটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে? **[JB'19]**

(a) $-\sqrt{3}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{3}$

সমাধান: (d); $y = bx - b^2x^2 \therefore m = \frac{dy}{dx} = b - 2b^2x$

$\Rightarrow \tan 60° = b - 2b^2 \times 0 \therefore b = \sqrt{3}$

75. $x + y - 2 = 0$ রেখাটির- **[CB'19]**

(i) সমান্তরাল রেখা $2x + 2y + 3 = 0$

(ii) মূল বিন্দু হতে লম্ব দূরত্ব $\sqrt{2}$ একক

(iii) দ্বারা অক্ষদ্বয়ের সাথে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 2 বর্গ একক।

নিচের কোনটি সঠিক?

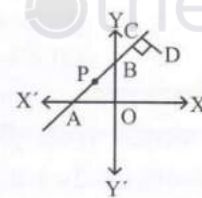
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (d); $2x + 2y + 3 = 0 \therefore x + y + \frac{3}{2} = 0$

$\frac{|0+0-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ একক। $x + y = 2$

$\therefore \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1 \therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ বর্গ একক।

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



AB রেখার সমীকরণ $6x - 4y + 24 = 0$ এবং AP = PB

76. CD রেখার ঢাল কত? **[CB'19]**

(a) $-\frac{3}{2}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $-\frac{2}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$

সমাধান: (c); $6x - 4y + 24 = 0 \therefore 4y = 6x + 24$

$\therefore y = \frac{3}{2}x + 6 \therefore$ CD এর ঢাল $= -\frac{2}{3}$

77. OP রেখার সমীকরণ কোনটি? [CB'19]

(a) $y = -\frac{2}{3}x$ (b) $y = -\frac{3}{2}x$

(c) $y = \frac{2}{3}x$ (d) $y = \frac{3}{2}x$

সমাধান: (b); AB রেখা $6x - 4y + 24 = 0$

$x = 0$ হলে, $B(0,6)$; $y = 0$ হলে, $A(-4,0)$ AB এর মধ্যবিন্দু, $p(-2,3)$ ∴ OP রেখার সমীকরণ, $y = -\frac{3}{2}x$.

বিকল্প: $m_{OP} = -\frac{2}{3}$ OP মূলবিন্দুগামী

$\therefore OP \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x$

78. ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগলো $A(2,0)$, $B(5,0)$ ও $C(5,4)$ হলে, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র কোনটি? [Din.B'19]

(a) $\left(4, \frac{4}{3}\right)$ (b) $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$

(c) $(6, 2)$ (d) $(2, 6)$

সমাধান: (a); ভরকেন্দ্র $= \left(\frac{2+5+5}{3}, \frac{0+0+4}{3}\right) \equiv \left(4, \frac{4}{3}\right)$

79. $x - 2y - 5 = 0$ এবং $2x + 4y - 1 = 0$ দুটি সরলরেখার সমীকরণ। [Din.B'19]

(i) রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $\left(\frac{11}{4}, -\frac{9}{8}\right)$

(ii) দ্বিতীয় রেখার ঢাল $-\frac{1}{2}$

(iii) রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ $0°$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); ছেদবিন্দু 1 টি হলে মধ্যবর্তী কোণ $0°$ হতে পারে না।

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$y = ax(1-x)$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ।

80. বক্ররেখাটির মূল বিন্দুতে ঢাল কত? [All.B'18]

(a) $-a$ (b) a

(c) $a - 2ax$ (d) $a + 2ax$

সমাধান: (b); $y = ax(1-x) \Rightarrow y = ax - ax^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = a - 2ax$, মূলবিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = a$

81. মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ- [All.B'18]

(a) $ax - y = 0$ (b) $ax + y = 0$

(c) $x - ay = 0$ (d) $x + ay = 0$

সমাধান: (a); মূলবিন্দুতে স্পর্শক, $y = mx \Rightarrow ax - y = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x + 2y - 6 = 0$ এবং $x + 2y + 8 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

82. নিচের কোনটি সঠিক? [All.B'18]

(a) রেখাদ্বয় মূলবিন্দু দিয়ে যায়

(b) রেখাদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করে

(c) রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব

(d) রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল

সমাধান: (d); রেখাদ্বয়ের ঢাল সমান

প্রথম রেখার ঢাল= $-\frac{1}{2}$; দ্বিতীয় রেখার ঢাল = $-\frac{1}{2}$

83. $A(-2,3), B(-4,2)$ এবং $C(8,6)$ শীর্ষ বিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভুজের- [All.B'18]

(i) ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$

(ii) AB বাহুর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-3, \frac{5}{2}\right)$

(iii) ΔABC এর ক্ষেত্রফল 4 বর্গ একক

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); ভরকেন্দ্র $\left(\frac{-2-4+8}{3}, \frac{3+2+6}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$

AB বাহুর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{-2-4}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(-3, \frac{5}{2}\right)$

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -4 & 8 & -2 \\ 3 & 2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(-4 - 24 + 24 + 12 - 16 + 12) = \frac{4}{2}$

$= 2$ বর্গ একক।

84. $x + y = 5$ এবং $y - x = 3$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী y- অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ- [All.B'18]

(a) $2y + 1 = 0$ (b) $y + 1 = 0$

(c) $x - 1 = 0$ (d) $2x + y = 0$

সমাধান: (c); রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $= (1,4)$

y অক্ষের সমান্তরাল রেখা $x = a$ ∴ $x = 1 \Rightarrow x - 1 = 0$

85. $y = -7x + 9$ রেখার সাথে লম্ব রেখার নতি কত? [DB'17]

(a) $\frac{1}{7}$ (b) $-\frac{1}{7}$ (c) -7 (d) 7

সমাধান: (a); $y = -7x + 9$ $(m_1 = -7)$ এর লম্ব রেখার নতি m_2 হলে, $m_1 \times m_2 = -1$ ∴ $m_2 = \frac{1}{7}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$3x - 4y - 12 = 0$ রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

86. B বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? [DB'17]

(a) $(4,0)$ (b) $(0,4)$ (c) $(0,-3)$ (d) $(0,3)$

সমাধান: (c); $3 \times 0 - 4y - 12 = 0$

$\Rightarrow 4y = -12 \Rightarrow y = -3$ ∴ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0,-3)$

87. প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব এবং $(1, 2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হলো- [DB'17]

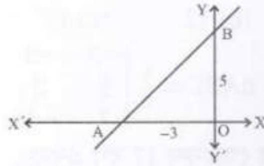
(a) $4x + 3y - 12 = 0$ (b) $4x + 3y - 10 = 0$

(c) $3x - 4y + 12 = 0$ (d) $4x - 3y - 10 = 0$

সমাধান: (b); প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ $4x + 3y + k = 0$ যা $(1,2)$ বিন্দুগামী।

$\therefore k = -10$ ∴ $4x + 3y - 10 = 0$ **(Ans.)**

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

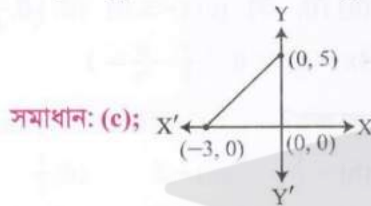


88. OAB ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কোনটি? **[RB'17]**

(a) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{-3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

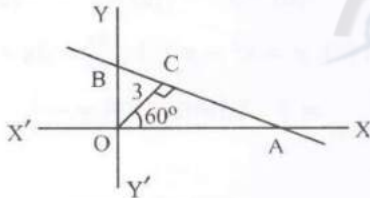
(c) $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$ (d) $\left(\frac{5}{3}, -1\right)$

সমাধান: (c);



$\therefore$ ভরকেন্দ্র $\equiv \left(\frac{0-3+0}{3}, \frac{5+0+0}{3}\right) \equiv \left(-1, \frac{5}{3}\right)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



89. ΔOAC-এর ক্ষেত্রফল কোনটি? **[Ctg.B'17]**

(a) $3\sqrt{3}$ বর্গ একক (b) $\frac{9}{2}$ বর্গ একক

(c) 9 বর্গ একক (d) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক

সমাধান: (d); $\frac{OC}{OA} = \cos 60°$; $OA = 2OC = 6$

$\Delta OAC = \frac{1}{2} \times OA \times OC \times \sin 60°$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক

90. $3x - 2y + 6 = 0$ সরলরেখা দ্বারা x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ কত একক? **[Ctg.B'17]**

(a) −3 (b) −2 (c) 2 (d) 3

সমাধান: (c); $3x - 2y = -6 \Rightarrow \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$

Note: দূরত্ব (−) হয়না।

91. (1, 1) বিন্দুগামী $2x - 3y - 5 = 0$ রেখার উপর লম্বরেখার সমীকরণ কোনটি? **[SB'17]**

(a) $3x + 2y - 5 = 0$ (b) $3x - 2y - 5 = 0$

(c) $2x + 3y + 5 = 0$ (d) $2x + 3y - 5 = 0$

সমাধান: (a); $3x + 2y = 3 + 2 = 5$

92. $x - y - 2 = 0$ এবং $2x - 2y + 4 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব- **[BB'17]**

(a) $3\sqrt{2}$ (b) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (c) $2\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2}$

সমাধান: (c); $x - y - 2 = 0$ ………….(i)

$2x - 2y + 4 = 0 ; x - y + 2 = 0$ ………….(ii)

(i) ও (ii) পরস্পর সমান্তরাল। এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$= \left|\frac{2+2}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

93. $y = -2x$ এবং $2y = x$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ-

(a) 90° (b) $\tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)$ **[BB'17]**

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{-5}{4}\right)$ (d) 0°

সমাধান: (a); $y = -2x ; m_1 = -2$

$2y = x$

$y = \frac{1}{2}x ; m_2 = \frac{1}{2}$ $\therefore m_1 . m_2 = -1$

$\therefore$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 90°।

94. কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্কের কোটি 90° হলে ঐ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের ভুজ- **[BB'17]**

(a) $x = r$ (b) $x = 0$

(c) $y = r$ (d) $y = 0$

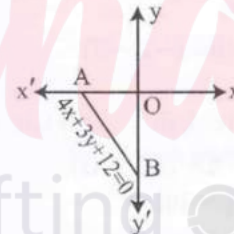
সমাধান: (b); $x = r\cos 90° = 0$

95. x-অক্ষের উপর লম্ব এবং মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ- **[BB'17] [Ans: b]**

(a) $y = 0$ (b) $x = 0$

(c) $y = mx$ (d) $y + k = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



96. মূল বিন্দু হতে AB এর লম্ব দূরত্ব কোনটি? **[JB'17]**

(a) $\frac{25}{12}$ (b) $\frac{12}{25}$ (c) $\frac{12}{5}$ (d) $\frac{5}{12}$

সমাধান: (c); $d = \left|\frac{0+0+12}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \frac{12}{5}$ unit.

97. AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? **[JB'17]**

(a) $\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$ (b) $(-3, -2)$

(c) $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$ (d) $(-\frac{2}{3}, -2$

সমাধান: (a); $4x + 3y + 12 = 0 \Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} = 1$

$\therefore$ AB এর মধ্যবিন্দু $\equiv \left(\frac{-3}{2}, -2\right)$

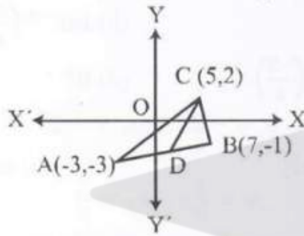
98. $A(1,-2)$ ও $B(-8,1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ BA কে 2:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নিচের কোনটি? **[CB'17]**

(a) $(-5,-1)$ (b) $(-2,-1)$
(c) $(-2,-0)$ (d) $(-5,0)$

সমাধান: (b); A(1,−2) —1— C(x,y) —2— B(−8,1)

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{-8+2}{3}, \frac{1-4}{3}\right) \equiv (-2,-1)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



চিত্রে CD, AB বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা।

99. CD এর দৈর্ঘ্য কত একক? **[CB'17]**

(a) 10 (b) 4 (c) 5 (d) 3

সমাধান: (c); $D \equiv \left(\frac{-3+7}{2}, \frac{-3-1}{2}\right) \equiv (2,-2)$

$\therefore CD = \sqrt{(2-5)^2 + (-2-2)^2} = 5$ একক।

100. ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? **[CB'17]**

(a) 6 (b) 12 (c) 17 (d) 34

সমাধান: (c); $\Delta ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -17$

$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল 17 বর্গ একক।

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$4x - 2y = 6$$

101. সরলরেখাটি x অক্ষকে কোন বিন্দুতে ছেদ করে? **[Din.B'17]**

(a) $\left(\frac{3}{2};0\right)$ (b) $(0,-3)$ (c) $(-3,0)$ (d) $\left(0,\frac{3}{2}\right)$

সমাধান: (a); $4x - 2y = 6 \therefore \frac{x}{\frac{3}{2}} - \frac{y}{3} = 1$

102. সরলরেখাটির ঢাল কত? **[Din.B'17] [Ans: a]**

(a) 2 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) -2 (d) $\frac{1}{2}$

103. $y = x^2 - x + 1$ বক্ররেখার (2,3) বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের ঢাল কোনটি? **[Din.B'17]**

(a) 3 (b) -3 (c) $\frac{1}{3}$ (d) $-\frac{1}{3}$

সমাধান: (d); $y = x^2 - x + 1$; $\frac{dy}{dx} = 2x - 1$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,3)} = 3 \therefore$ অভিলম্বের ঢাল $= -\frac{1}{3}$

MCQ: বিভিন্ন লেখকের মূল বইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

মোঃ কেতাব উদ্দীন স্যার

01. x-অক্ষ ও y-অক্ষ থেকে একটি বিন্দুর দূরত্ব যথাক্রমে 3 ও 2 একক হলে, বিন্দুটির স্থানাঙ্ক-

(i) (2, 3) (ii) $(2,-3)$ (iii) $(-2,-3)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i (b) iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (d); x অক্ষ থেকে বিন্দুর দূরত্ব $= |y|$
এবং y অক্ষ থেকে বিন্দুর দূরত্ব $= |x|$

02. $A\left(4,\frac{\pi}{4}\right)$, B(11, 6) ও $C(-1,1)$ হলে-

(i) A বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
(ii) C বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $\left(\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right)$
(iii) BC = 13

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i (b) iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (c); $A\left(4, \frac{\pi}{4}\right) \equiv \left(4\cos\frac{\pi}{4}, 4\sin\frac{\pi}{4}\right)$
$\equiv (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
$C(-1,1) \equiv \left(\sqrt{2}, \pi - \frac{\pi}{4}\right) \equiv \left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$
$BC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$

03. $A(-3,2)$, $B(-7,-5)$, $C(5,4)$ এবং D বিন্দু ABCD সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু হলে-

(i) D এর স্থানাঙ্ক (9, 11)
(ii) ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র $\left(-\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$
(iii) BC বাহুর ঢাল $= \frac{3}{4}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (d); D(x, y) হলে, $\frac{x-7}{2} = \frac{5-3}{2}$
$\therefore x = 9, \frac{y-5}{2} = \frac{4+2}{2} \therefore y = 11, D(9,11)$
$G\left(\frac{-3-7+5}{3}, \frac{2-5+4}{3}\right) \equiv \left(-\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$; $m_{BC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

04. (7, 7) এবং $(-5,-10)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে y-অক্ষ কোন অনুপাতে ছেদ করে?

(a) 7: 10 (b) 10: 7 (c) 7: 5 (d) 5: 7

সমাধান: (c); অনুপাত $= \frac{\text{১ম বিন্দুর ভুজ}}{\text{২য় বিন্দুর ভুজ}} = \frac{7}{(-5)}$
$= 7:5$ (অন্তর্বিভক্ত)

05. $y = mx + c$ সমীকরণে c নিচের কোনটি? **[Ans: d]**
(a) রেখার ঢাল
(b) রেখাটি অক্ষদ্বয়কে যে বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে তাদের দূরত্ব
(c) x-অক্ষের ছেদক অংশ
(d) y-অক্ষের ছেদক অংশ

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$3x + 4y = 12$ রেখাটি x ও y – অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

06. মূলবিন্দু হতে প্রদত্ত রেখার লম্ব দূরত্ব কত একক? **[Ans: b]**
(a) $\frac{5}{12}$ (b) $\frac{12}{5}$ (c) $\frac{7}{5}$ (d) $\frac{12}{25}$

07. উদ্দীপকের ক্ষেত্রে- **[Ans: d]**
(i) প্রদত্ত রেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে 6 বর্গ একক ক্ষেত্রফলের ত্রিভুজ গঠন করে
(ii) AB এর দৈর্ঘ্য 5 একক
(iii) মূলবিন্দু ও AB এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ $3x - 4y = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
ABCD রম্বসের A, B, C শীর্ষের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2,-1), (1,3), (5,6)$.

08. BD কর্ণের ঢাল কত?
(a) $\frac{5}{3}$ (b) $-\frac{3}{5}$ (c) 1 (d) -1
সমাধান: (d); $m_{BD} \times m_{AC} = -1; m_{BD} = -\frac{1}{\left(\frac{7}{7}\right)} = -1$

09. D বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?
(a) $(2,2)$ (b) $(-2,-2)$
(c) $(-2,2)$ (d) $(2,-2)$
সমাধান: (a); $O(x,y)$ হলে, $\frac{x+1}{2} = \frac{5-2}{2} \therefore x = 2$
$\frac{y+3}{2} = \frac{6-1}{2} \therefore y = 2 ; D(2,2)$

10. $(1,4)$ ও $(9,12)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা যে বিন্দুতে 3: 5 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়, তার স্থানাঙ্ক-
(a) $(7,4)$ (b) $(4,7)$ (c) $(5,8)$ (d) $(8,5)$
সমাধান: (b); ধরি, $p(x,y)$ নির্ণেয় বিন্দু
$x = \frac{(1\times5)+(9\times3)}{8} = 4; y = \frac{(4\times5)+(12\times3)}{8} = 7; p(4,7)$

11. $(3,-1)$ ও $(5,2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা যে বিন্দুতে 3: 4 অনুপাতে বহিঃস্থভাবে বিভক্ত হয়, তার স্থানাঙ্ক- **[Ans: d]**
(a) $\left(\frac{17}{3}, 3\right)$ (b) $\left(\frac{27}{7}, \frac{2}{7}\right)$
(c) $\left(\frac{27}{4}, \frac{4}{3}\right)$ (d) $(-3,-10)$

12. $(2,-1)$, $(a+1, a-3)$ ও $(a+2, a)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে, a এর মান-
(a) 4 (b) 2 (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$
সমাধান: (d); সমরেখ হলে, $m_{12} = m_{23}$
$\Rightarrow \frac{a-3+1}{a-1} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{a-2}{a-1} = 3 \therefore a = \frac{1}{2}$

13. $3x + 5y = 2, 2x + 3y = 0, ax + by + 1 = 0$ সমবিন্দুগামী হলে, a ও b এর সম্পর্ক-
(a) $4a - 6b = 1$ (b) $4a - 6b = 2$
(c) $6a - 4b = 1$ (d) $6a - 4b = 2$
সমাধান: (c); সমবিন্দুগামী হলে, $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ a & b & -1 \end{vmatrix} = 0$
$\Rightarrow 4b - 6a + 1 = 0 \therefore 6a - 4b = 1$

14. $3x + 4y = 7$ রেখার সমান্তরাল এবং $(1,-2)$ বিন্দু হতে 7.5 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ কোনটি?
(a) $3x + 4y = 7$ (b) $4x + 3y = 9$
(c) $4x + 3y = 20.5$ (d) $3x + 4y = 32.5$
সমাধান: (d); $3x + 4y + k = 0 \therefore 7.5 = \frac{|3-8+k|}{5}$
$\Rightarrow |k-5| = 37.5 \therefore k = -32.5$ or $k = 42.5$
নির্ণেয় রেখা, $3x + 4y + 42.5 = 0$
অথবা, $3x + 4y = 32.5$

এস ইউ আহাম্মদ স্যার

15. x এর মান কত হলে $(5,-2), (x,1), (-1,4)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে?
(a) 1 (b) 3 (c) 2 (d) 0
সমাধান: (c); সমরেখ হলে, $m_{12} = m_{23}$
$\Rightarrow \frac{1+2}{x-5} = \frac{4-1}{-1-x} \Rightarrow -3 - 3x = 3x - 15$
$\Rightarrow 6x = 12 \therefore x = 2$

16. মূলবিন্দু এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ কোনটি? **[Ans: b]**
(a) $y = mx$ (b) $y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x$
(c) $y - y_1 = m(x - x_1)$ (d) $y = \frac{x_1}{y_1} \cdot x$

17. যে বর্গের দুইটি বাহুর সমীকরণ, $6x - 8y + 5 = 0$ এবং $3x - 4y + 10 = 0$ তার ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?
(a) $\frac{10}{3}$ (b) $\frac{9}{4}$ (c) $\frac{11}{4}$ (d) $\frac{8}{7}$
সমাধান: (b); $6x - 8y + 5 = 0$
এবং $3x - 4y + 10 = 0$ পরস্পর সমান্তরাল রেখা।
মধ্যবর্তী দূরত্ব, $d = \frac{10-\frac{5}{2}}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{15}{2\times5} = \frac{3}{2}$ একক
ক্ষেত্রফল $= d^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ বর্গ একক

18. $\frac{3}{7}$ ঢালবিশিষ্ট রেখাটি $(-3,5)$ ও $(4,k)$ বিন্দু দিয়ে গেলে k এর মান কত?
(a) 4 (b) 6 (c) 7 (d) 8
সমাধান: (d); $m=\frac{3}{7} \Rightarrow \frac{k-5}{7}=\frac{3}{7} \therefore k=8$

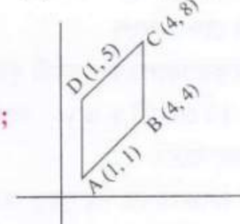
19. $(-1,-2)$ বিন্দু হতে $x-2y=3$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর y স্থানাঙ্ক কত?
(a) -2 (b) 2 (c) 3 (d) -4
সমাধান: (a); $x-2y-3=0 \ldots\ldots$ (i) রেখার উপর লম্ব রেখা, $2x+y=2\times(-1)-2=-4$
$\therefore 2x+y+4=0 \ldots\ldots$ (ii)
(i) ও (ii) রেখার ছেদবিন্দু $(-1,-2)$

20. একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে $(2,7)$ ও $(6,1)$ এবং ভরকেন্দ্র $(6,4)$ হলে এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক -
(a) $(9,5)$ (b) $(10,3)$
(c) $(7,5)$ (d) $(10,4)$
সমাধান: (d); $p(x,y); \frac{x+2+6}{3}=6$
$\therefore x=10; \frac{y+7+1}{3}=4 \therefore y=4 \therefore p(10,4)$

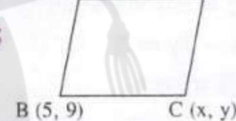
21. $x+y+1=0$ এবং $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ সমীকরণ দুইটি একই সরলরেখা সূচিত করলে α এর মান–
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{5\pi}{4}$
সমাধান: (d); $x+y+1=0; x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$
$\cos\alpha=\sin\alpha=-p \therefore \cos\alpha$ ও $\sin\alpha$ ঋণাত্মক।
$\therefore \alpha=\frac{5\pi}{4}$ হবে।

22. $3x+5y=2,\ 2x+3y=0,\ ax+by+1=0$ সমবিন্দুগামী হলে a এবং b এর সম্পর্ক কোনটি?
(a) $4a-6b=1$ (b) $4a-6b=2$
(c) $6a-4b=1$ (d) $6a-4b=2$
সমাধান: (c); $\left.\begin{array}{l}3x+5y=2\\2x+3y=0\\ax+by=-1\end{array}\right\}$ সমবিন্দুগামী হলে,
$\begin{vmatrix}3&5&2\\2&3&0\\a&b&-1\end{vmatrix}=0 \therefore 6a-4b=1$

23. $x+y=3$ এবং $y-x=1$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী x অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ–
(a) $y=2$ (b) $2y=3$
(c) $x=1$ (d) $x+3=0$
সমাধান: (a); $\left.\begin{array}{l}x+y=3\\y-x=1\end{array}\right\}$ ছেদবিন্দু $(1,2)$
$\therefore$ নির্ণেয় রেখা, $y=2$

24. একটি সামান্তরিকের কৌণিক বিন্দুগুলো $(1,1)$ $(4,4)$ $(4,8)$ এবং $(1,5)$ হলে এর যে কোন একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য হবে–
(a) $3\sqrt{2}$ (b) 4 (c) $\sqrt{10}$ (d) 8
সমাধান: (c);


কর্ণের দৈর্ঘ্য $=AC=\sqrt{3^2+7^2}=\sqrt{58}$ একক এবং $BD=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ একক।

25. $A(2,5), B(5,9)$ এবং $D(6,8)$ বিন্দুগুলো ABCD রম্বসের তিনটি শীর্ষবিন্দু হলে, চতুর্থ শীর্ষবিন্দু C এর স্থানাঙ্ক কোনটি?
(a) $(4,3)$ (b) $(9,12)$ (c) $(4,7)$ (d) $(7,9)$
সমাধান: (b);


$\frac{x+2}{2}=\frac{6+5}{2} \therefore x=9; \frac{y+5}{2}=\frac{8+9}{2}$
$\therefore y=12 \therefore C(9,12)$

26. $3x+4y+3=0$ এবং $4x+3y+4=0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ কোনগুলো?
(a) $x-y+1=0,\ x+y+1=0$
(b) $x-y+2=0,\ x+y+7=0$
(c) $2x+3y=0,\ 3x+2y=0$
(d) $2x-y+2=0,\ 4x+3y+1=0$
সমাধান: (a); $\frac{|3x+4y+3|}{5}=\frac{|4x+3y+4|}{5} \Rightarrow 3x+4y+3$
$=\pm(4x+3y+4) \therefore x-y+1=0$
এবং $7x+7y+7=0 \Rightarrow x+y+1=0$

27. $2x+3y-4=0$ এবং $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ একই রেখা নির্দেশ করলে p এর মান–
(a) $\frac{11}{5}$ (b) $\frac{11}{2\sqrt{13}}$ (c) 3 (d) $\frac{4}{\sqrt{13}}$
সমাধান: (d); $2x+3y-4=0; x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$
$\frac{\cos\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{3}=\frac{p}{4}; \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
$\cos\alpha=\frac{2p}{4}; \sin\alpha=\frac{3p}{4} \Rightarrow p^2\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{16}\right)=1 \therefore p=\frac{4}{\sqrt{13}}$

28. $(6,2)$ বিন্দু থেকে $(3,3)$ এবং $(4,4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার ঢালদ্বয়ের গুণফল হবে?
(a) 3 (b) $\frac{1}{3}$ (c) $-\frac{1}{3}$ (d) -3
সমাধান: (b); $A(6,2), B(3,3), C(4,4)$ $m_{AB}=-\frac{1}{3}$
$m_{AC}=\frac{2}{-2}=-1 \therefore m_{AB}\times m_{AC}=\frac{1}{3}$

অসীম কুমার সাহা স্যার

29. $r(1+\cos\theta)=2$ সমীকরণটি কী প্রকাশ করে?

(a) সরলরেখা (b) বৃত্ত
(c) উপবৃত্ত (d) পরাবৃত্ত

সমাধান: (d); $r(1+\cos\theta)=2 \Rightarrow r+r\cos\theta=2$
$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}+x-2=0 \Rightarrow x^2+y^2=x^2-4x+4$
$\therefore y^2=4-4x$; যা পরাবৃত্তের সমীকরণ।

30. একটি বিন্দুর t সময়ের স্থানাঙ্ক $(t^2,2t)$ হলে বিন্দুটির সঞ্চারপথের সঞ্চারপথের সমীকরণ কোনটি?

(a) $y^2=x$ (b) $y^2=4x$
(c) $x^2=y$ (d) $x^2=4y$

সমাধান: (b); $(x,y)\equiv(t^2,2t), y=2t$
$x=t^2 \Rightarrow x=\left(\frac{y}{2}\right)^2 \therefore y^2=4x$

31. একটি সরলরেখার ঢাল $-\frac{1}{7}$ এবং সরলরেখাটি $(2,5)$ বিন্দুগামী হলে সরলরেখা দ্বারা y অক্ষের ছেদকৃত অংশের দৈর্ঘ্য কত?

(a) $\frac{1}{7}$ (b) $\frac{7}{37}$ (c) 7 (d) $\frac{37}{7}$

সমাধান: (d); $(y-5)=-\frac{1}{7}(x-2)$
$\Rightarrow y=-\frac{x}{7}+\frac{37}{7}\rightarrow c$

32. $x=y$ রেখার সাপেক্ষে$(-2,4)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব কোনটি?

(a) $(2,4)$ (b) $(-2,-4)$
(c) $4,-2)$ (d) $(4,2)$

সমাধান: (c); $y=x$ রেখার সাপেক্ষে $(-2,4)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব $(4,-2)$

33. $x-2y+k=0$ রেখার সাপেক্ষে $(1,4)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব $\left(\frac{31}{5},-\frac{32}{5}\right)$ হলে, k এর মান কত?

(a) -12 (b) -6 (c) 6 (d) 12

সমাধান: (b); R, A ও B এর মধ্যবিন্দু।
$X=\frac{1+\frac{31}{5}}{2}=\frac{18}{5}; y=\frac{4-\frac{32}{5}}{2}=-\frac{6}{5}$
$\therefore R\left(\frac{18}{5},-\frac{6}{5}\right)\Rightarrow x-2y+k=0$
$\Rightarrow \frac{18}{5}+\frac{12}{5}+k=0$
$\therefore k=-6 \therefore x-2y-6=0$

34. $(2,2)$ ও $(-6,4)$ বিন্দু দুটি নিচের কোন সরলরেখাটির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত?

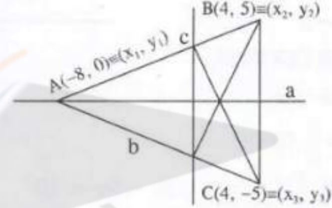
(a) $10x-y=26$
(b) $5x+3y+9=0$
(c) $2x+3y+6=0$
(d) $-10x+2y+39=0$

সমাধান: (b); $5x+3y+9=0$ এর ক্ষেত্রে $(2,2)$ বসালে $(+)$ চিহ্ন আসে $(-6,4)$ বসালে $(-)$ চিহ্ন আসে

35. $(4,5),(4,-5)$ এবং $(-8,0)$ শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র নিচের কোনটি?

(a) $(0,0)$ (b) $\left(\frac{2}{3},0\right)$ (c) $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ (d) $\left(0,\frac{2}{3}\right)$

সমাধান: (b); $a=10; b=13; c=13$
$I_x=\frac{10\times(-8)+(4\times13)+(4\times13)}{10+13+13}=\frac{104-80}{36}=\frac{2}{3}$
$I_y=\frac{10\times0+13(5-5)}{10+13+13}=0 \therefore I\left(\frac{2}{3},0\right)$



36. $(3,2),(3,10)$ ও $(-5,2)$ শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের-
(i) ক্ষেত্রফল 32 বর্গ একক (ii) ভরকেন্দ্র $\left(\frac{1}{3},\frac{14}{3}\right)$
(iii) ত্রিভুজটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ
নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

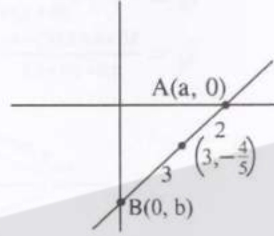
সমাধান: (d); $A(3,2), B(3,10), C(-5,2)$
$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}3 & 3 & -5 & 3\\ 2 & 10 & 2 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\times64=32$ বর্গ একক
$G\left(\frac{6-5}{3},\frac{12+2}{3}\right)\equiv\left(\frac{1}{3},\frac{14}{3}\right)$
$AB=8, BC=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}, CA=8$
তাহলে, $AB=CA; AB^2+CA^2=BC^2$

37. $A(8,10)$ ও $B(18,20)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে Q এবং R বিন্দু দুইটি 2 : 3 অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বর্হিবিভক্ত করলে-
(i) Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (12, 14)
(ii) R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-12,-10)$
(iii) $QR=24\sqrt{2}$ একক
নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (d); $Q(x_1,y_1); R(x_2,y_2)$
$x_1=\frac{(8\times3)+(18\times2)}{2+3}=12; x_2=\frac{(2\times18)-(3\times8)}{2-3}=-12$
$y_1=\frac{(3\times10)+(2\times20)}{2+3}=14; y_2=\frac{(2\times20)-(3\times10)}{2-3}=-10$
$Q=(12,14); R(-12,-10)$
$\therefore QR=\sqrt{24^2+24^2}=24\sqrt{2}$ একক

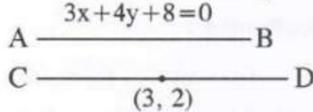
38. একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয় দ্বারা ছেদকৃত অংশ $\left(3, -\frac{4}{5}\right)$ বিন্দুতে 2 : 3 অনুপাতে অন্তঃবিভক্ত হলে-
(i) রেখাটির y অক্ষের খণ্ডিতাংশ -2
(ii) রেখাটির ঢাল $\frac{2}{5}$
(iii) রেখার সমীকরণ, $2x - 5y + 10 = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (a); $3 = \frac{3a+0}{5}$
$\therefore a = 5, -\frac{4}{5} = \frac{2b+0}{5}$
$\therefore b = -2$
y অক্ষের ছেদকাংশ,
$c = b = -2$
$m_{AB} = \frac{2}{5}$, রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 1 \therefore 2x - 5y = 10$



39. $6x - 5y + 17 = 0$ রেখাটির-
(i) লম্ব রেখার সমীকরণ $5x + 6y + 2 = 0$
(ii) সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $6x - 5y + 8 = 0$
(iii) দ্বারা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ $50.2°$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); $6x - 5y + 17 = 0$ রেখার ঢাল $= \frac{6}{5}$
লম্ব রেখার ঢাল $= -\frac{5}{6}$; $\tan\theta = \frac{6}{5} \therefore \theta = 50.2°$ (প্রায়)

40. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি $A(-1, 5), B(-4, 1)$ এবং $C(2, 1)$ হলে, C হতে AB বাহুর ওপর লম্বের দৈর্ঘ্য কত একক?
(a) $\frac{5}{24}$ (b) $\frac{24}{5}$ (c) 5 (d) 24
সমাধান: (b); AB রেখা, $\frac{y-1}{-4} = \frac{x+4}{-3}$
$\Rightarrow 3y - 3 = 4x + 16$
$\Rightarrow 4x - 3y + 19 = 0$
লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{|8-3+19|}{5} = \frac{24}{5}$ একক

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



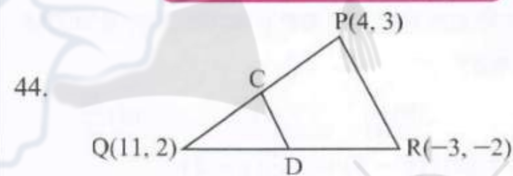
AB||CD

41. CD সরল রেখার সমীকরণ কোনটি?
(a) $3x + 4y - 17 = 0$ (b) $3x - 4y - 1 = 0$
(c) $4x - 3y - 6 = 0$ (d) $3x + 4y + 17 = 0$
সমাধান: (a); CD রেখা, $3x + 4y = (3 \times 3) + (4 \times 2)$
$\therefore 3x + 4y - 17 = 0$

42. AB রেখা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশের মধ্য বিন্দু থেকে মূলবিন্দুর দূরত্ব কত?
(a) $\frac{5}{8}$ (b) $\frac{5}{3}$ (c) $\frac{25}{9}$ (d) $\frac{\sqrt{17}}{3}$
সমাধান: (b); $3x + 4y = -8 \Rightarrow 3x + 4y = -8$
$\Rightarrow \frac{x}{\left(-\frac{8}{3}\right)} + \frac{y}{(-2)} = 1 \therefore OC = \sqrt{\frac{16}{9} + 1} = \frac{5}{3}$

43. $(0, -1)$ বিন্দু এবং $y = 1$ সরলরেখা থেকে সমান দূরত্বের বিন্দুর সঞ্চারপথ কোনটি?
(a) $y^2 + 4x = 0$ (b) $y^2 - 4x = 0$
(c) $x^2 + 4y = 0$ (d) $x^2 - 4y = 0$
সমাধান: (c); $P(x, y) \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = |y - 1|$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 = y^2 - 2y + 1 \Rightarrow x^2 + 4y = 0$

মোঃ রফিকুল ইসলাম স্যার

44.


C ও D যথাক্রমে PQ ও QR এর মধ্যবিন্দু হলে, CD এর দৈর্ঘ্য কত একক?
(a) $\frac{1}{2}\sqrt{26}$ (b) $\sqrt{26}$ (c) $\frac{1}{2}\sqrt{74}$ (d) $\sqrt{74}$
সমাধান: (c); $PR = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74}$
$CD = \frac{1}{2}PR = \frac{1}{2}\sqrt{74}$

45. কে প্রথম জ্যামিতিতে বীজগণিতীয় সূত্রের প্রয়োগ করেন? [Ans: d]
(a) আর্কিমিডিস (b) নিউটন
(c) ম্যাক্স প্ল্যাংক (d) দে কার্ত

46. $2r\sin^2(\theta/2) = 1$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ-
(a) $y^2 = 1 + 2x$ (b) $y^2 = 4(1 - x)$
(c) $y^2 = 4(1 + x)$ (d) $x^2 = 4(1 + y)$
সমাধান: (a); $2r\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 \Rightarrow r(1 - \cos\theta) = 1$
$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - x - 1 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1 \therefore y^2 = 2x + 1$

47. নিচের চারটি বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক দেয়া আছে। কোন বিন্দুটি মূল বিন্দু হতে সবচেয়ে দূরে অবস্থিত? [Ans: a]
(a) $(10, 0)$ (b) $\left(9, \frac{\pi}{4}\right)$
(c) $\left(8, \frac{\pi}{2}\right)$ (d) $\left(7, \frac{3\pi}{4}\right)$

48. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহের পোলার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে পোল, $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ ও $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?
(a) $1 + \sqrt{3}$ (b) $1 - \sqrt{3}$
(c) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$ (d) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$
সমাধান: (d); $O(0,0), A\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) \equiv (1,1), B\left(2, \frac{\pi}{3}\right) \equiv (1, \sqrt{3}) \therefore \Delta OAB = \frac{1}{2}|\sqrt{3} - 1|$
$= \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$ বর্গ একক

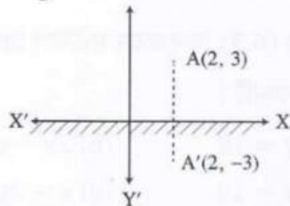
49. $(2, 2 - 2x), (1, 2)$ এবং $(2, b - 2x)$ বিন্দুগুলো সমরেখ হলে, b এর মান-
(a) -1 (b) 1 (c) 2 (d) -2
সমাধান: (c); $m_{12} = m_{23} \Rightarrow \frac{2-(2-2x)}{1-2} = \frac{b-2x-2}{2-1}$
$\Rightarrow \frac{2x}{(-1)} = \frac{(b-2x-2)}{1} \Rightarrow -2x = b - 2x - 2 \therefore b = 2$

50. কোনো সেটের একটি বিন্দু এমন যে, মূলবিন্দু হতে বিন্দুটির দূরত্ব y- অক্ষরেখা থেকে তার দূরত্বের দ্বিগুণ, বিন্দুটির সঞ্চারপথ-
(a) $y^2 = 3x^2$ (b) $x^2 = 3y^2$
(c) $y^2 = 2x$ (d) $y^2 = 4x^2$
সমাধান: (a); $P(x, y); OP = 2.|x|$
$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2|x| \Rightarrow y^2 + x^2 = 4x^2$
$\Rightarrow y^2 = 3x^2$

51. দুইটি সরলরেখা $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত কোনটি? [Ans: a]
(a) $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ (b) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$
(c) $a_1a_2 - b_1b_2 = 0$ (d) $a_1a_2 = b_1b_2$

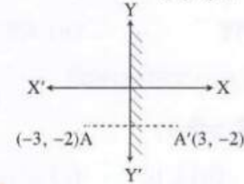
52. ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের লম্ব সমদ্বিখন্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দুকে কী বলে? [Ans: b]
(a) অন্তঃকেন্দ্র (b) পরিকেন্দ্র
(c) লম্বকেন্দ্র (d) ভরকেন্দ্র

53. (1, 1) বিন্দুর সাপেক্ষে (3, 4) বিন্দুর প্রতিবিম্ব কোনটি?
(a) $(-2, -3)$ (b) $(-1, -2)$
(c) $(-3, -4)$ (d) $(-2, 3)$
সমাধান: (b); ধরি, প্রতিবিম্ব $(x, y); \frac{x+3}{2} = 1$
$\therefore x = -1; \frac{y+4}{2} = 1 \therefore y = -2 \therefore P(-1, -2)$



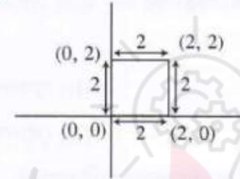
54. x- অক্ষের সাপেক্ষে $(2, -3)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবির স্থানাঙ্ক কোনটি? [Ans: b]
(a) $(-2, 3)$ (b) $(2, 3)$ (c) $(0, 3)$ (d) $(2, 0)$

55. y- অক্ষের সাপেক্ষে $(-3, -2)$ এর প্রতিবিম্বের স্থানাংক কত?
(a) $(3, 2)$ (b) $(-3, -2)$
(c) $(2, 3)$ (d) $(3, -2)$
সমাধান: (d);



এ.টি.এস.এম. মাসুদুল হাকিম স্যার

56. কোনো চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু $(0, 0), (2, 0), (2, 2)$ এবং $(0, 2)$ হলে, চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল কত?
(a) 2 বর্গ একক (b) 3 বর্গ একক
(c) 4 বর্গ একক (d) 5 বর্গ একক
সমাধান: (c); $A = 2^2 = 4$ বর্গ একক।



57. $P(x, y)$ হতে $(-2, 0)$ এবং $(2, 0)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্বের বর্গের যোগফল সর্বদা 40 হলে, P বিন্দুর সঞ্চারপথটি হবে?
(a) বৃত্ত (b) পরাবৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত
সমাধান: (a); $P(x, y), A(-2, 0), B(2, 0)$
$AP^2 + PB^2 = 40$
$\Rightarrow (x + 2)^2 + y^2 + (x - 2)^2 + y^2 = 40$
$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + x^2 - 4x + 4 + y^2 = 40$
$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 32 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 16 = 0$ যা বৃত্তের সমীকরণ।

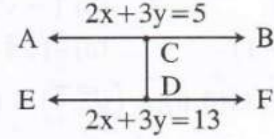
58. $8x + 7y + 16 = 0$ রেখা দ্বারা–
(i) x অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য 2 একক
(ii) y অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $\frac{16}{7}$ একক
(iii) উভয় অক্ষের সাথে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{8}{7}$ বর্গ একক
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (a); $8x + 7y + 16 = 0 \Rightarrow \frac{x}{(-2)} + \frac{y}{\left(-\frac{16}{7}\right)} = 1$
$\Delta = \frac{1}{2}|a||b| = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{16}{7} = \frac{16}{7}$ বর্গ একক

59. $y = \frac{1}{2}x + 5$ সরলরেখা– [Ans: c]
(i) $(2, -6)$ বিন্দুগামী (ii) এর ঢাল $= \frac{1}{2}$
(iii) y অক্ষকে 5 একক দূরত্বে ছেদ করে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

60. $2x - y + 3 = 0$ ও $3x + 6y - 2 = 0$ রেখাদ্বয়–
(i) পরস্পর লম্ব (ii) এর ছেদবিন্দু $\left(-\frac{16}{15}, \frac{13}{15}\right)$ (iii) মূলবিন্দুগামী
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); $m_1 = 2; m_2 = -\frac{1}{2}; m_1m_2 = -1$
∴ রেখাদ্বয় লম্ব ছেদবিন্দু $\left(-\frac{16}{15}, \frac{13}{15}\right)$ [Use Calculator]

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



61. C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, \alpha)$ হলে, $\alpha =$?
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 5
সমাধান: (a); $C \Rightarrow 2x + 3y - 5 = 0$
$\Rightarrow 2 + 3\alpha - 5 = 0 \therefore \alpha = 1$

MCQ: সম্ভাব্য নমুনা প্রশ্ন ও সমাধান

01. কোনো তিনটি বিন্দু সমরেখ হলে ঐ বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল- [Ans: a]
(a) শূন্য (b) অসীম
(c) অনির্দিষ্ট (d) অনির্ণেয়

02. দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হলে তাদের ঢালদ্বয়ের- [Ans: b]
(a) গুণফল 1 (b) গুণফল −1
(c) যোগফল 1 (d) যোগফল −1

03. নিচের কোনটি সরলরেখার সমীকরণ? [Ans: d]
(a) $x^2 + y = 1$ (b) $x^2 + y^2 = 2$
(c) $x^3 + y^3 = 1$ (d) $x + y = 1$

04. x অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার ঢাল- [Ans: b]
(a) 1 (b) 0 (c) ∞ (d) −∞

05. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সমীকরণে x অক্ষের খণ্ডাংশ কত? [Ans: a]
(a) a (b) b (c) a + b (d) a − b

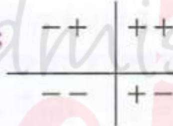
নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
দুইটি সরলরেখা $(4, -5)$ বিন্দুগামী এবং তারা যথাক্রমে x অক্ষের সমান্তরাল ও তার উপর লম্ব।

06. x অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণর কোনটি?
(a) $y - 5 = 0$ (b) $y + 5 = 0$
(c) $x + 4 = 0$ (d) $x - 4 = 0$
সমাধান: (b); $y = b \Rightarrow y = -5 \Rightarrow y + 5 = 0$

07. x অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ কত?
(a) $y + 5 = 0$ (b) $y - 5 = 0$
(c) $x - 4 = 0$ (d) $x + 4 = 0$
সমাধান: (c); $x = a \Rightarrow x = 4 \therefore x - 4 = 0$

08. $A(-1, 2)$ ও $B(3, -4)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে Y অক্ষ কত অনুপাতে বিভক্ত করে?
(a) 1:2 (b) 2:1 (c) 1:3 (d) 2:3
সমাধান: (c); k: 1 অনুপাতে বিভক্ত করলে, $\frac{3k-1}{k+1} = 0$
$\Rightarrow k = \frac{1}{3} \Rightarrow k : 1 = 1 : 3$

09. $(7, -2)$ বিন্দুটি কোন চতুর্ভাগে?
(a) প্রথম (b) দ্বিতীয় (c) তৃতীয় (d) চতুর্থ
সমাধান: (d);



10. $(3, 90°)$ এবং $(1, -2)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?
(a) $\sqrt{26}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) 5 (d) $2\sqrt{26}$
সমাধান: (a); $(3, 90°) = (0,3) \therefore (0,3)$ I $(1, -2)$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{1 + 5^2} = \sqrt{26}$

11. y- অক্ষ ও $(7, 2)$ বিন্দু থেকে $(a, 5)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান কত?
(a) $\frac{25}{7}$ (b) $\frac{5}{7}$ (c) $\frac{31}{7}$ (d) $\frac{29}{7}$
সমাধান: (d); $\sqrt{(a-7)^2 + (5-2)^2} = a \Rightarrow a = \frac{29}{7}$

12. (2,1) এবং (6,3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার লম্বদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ কোনটি?
(a) $2x + y = 10$ (b) $2x - y = 8$
(c) $x + 2y = 10$ (d) $x - 2y = 0$

সমাধান: (a); মধ্যবিন্দু (4,2)

(4,2) বিন্দুগামী এবং (2,1) ও (6,3) এর সংযোগ সরলরেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$y - y_1 = -\frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3}(x - x_1)$

$\Rightarrow y - 2 = -\frac{2-6}{1-3}(x-4) \Rightarrow y - 2 = -\frac{-4}{-2}(x-4)$

$\Rightarrow y - 2 = -2x + 8 \therefore 2x + y = 10$

বিকল্প: মধ্যবিন্দু (4, 2) এবার উক্ত বিন্দু দ্বারা option test.

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি বিন্দুর স্থানাংক A (1, −2) এবং একটি সরলরেখার সমীকরণ $3x + 4y - 5 = 0$

13. A বিন্দুগামী এবং উদ্দীপকে উল্লিখিত রেখাটির সমান্তরাল রেখার সমীকরণ কোনটি?

(a) $4x - 3y + 10 = 0$ (b) $4x - 3y - 10 = 0$
(c) $3x + 4y - 5 = 0$ (d) $3x + 4y + 5 = 0$

সমাধান: (d); $3x + 4y = 3(1) + 4(-2)$
$= 3 + (-8) \therefore 3x + 4y + 5 = 0$

14. $3x + 4y - 24 = 0$ রেখাটির y অক্ষের ছেদবিন্দুর স্থানাংক কত?

(a) (8,0) (b) (0,−6) (c) (−8,0) (d) (0,6)

সমাধান: (d); $3x + 4y - 24 = 0 \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$

$\therefore$ y অক্ষের ছেদবিন্দু (0,6)

15. [চিত্র: A(1,1), B(-2,-3)] হলে, AB রেখার সমীকরণ কোনটি?

(a) $4x + 3y - 2 = 0$ (b) $4x + 3y + 2 = 0$
(c) $4x - 3y - 1 = 0$ (d) $4x + 3y + 2 = 0$

সমাধান: (c); $\frac{x-1}{1+2} = \frac{y-1}{1+3} \Rightarrow 4.(x-1) = 3(y-1)$
$\Rightarrow 4x - 4 = 3y - 3 \Rightarrow 4x - 3y - 1 = 0$

16. মূলবিন্দুগামী রেখা– **[Ans: d]**

(i) $y = mx$ (ii) $x = 0$ (iii) $x = y$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি A(−3, −2), B(−3, 9) এবং C(5, −8)।

17. $2x + y = 3$ রেখাটি-

(i) y অক্ষকে (0, 3) বিন্দুতে ছেদ করে
(ii) $x - 2y = 0$ রেখার সাথে লম্ব
(iii) (1, 1) বিন্দুগামী

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, iii (b) i, ii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (d); $2x + y = 3 \Rightarrow y = -2x + 3$

$\therefore$ y অক্ষের ছেদাংশ = 3 এবং $m_1 = -2$

$X - 2y = 0$ রেখার ঢাল $m_2 = \frac{1}{2} \therefore m_1 \times m_2 = -1$

$\therefore$ লম্ব (1,1) বিন্দুটি বসাই, $L.H.S = 1 \times 3 + 1$
$= 3 = R.H.S$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$4x - 3y + 12 = 0$ এবং $3x + 4y - 9 = 0$

সমীকরণদ্বয় পৃথক দুইটি সরলরেখা নির্দেশ করে।

18. দ্বিতীয় রেখার ঢাল কত?

(a) $-\frac{4}{3}$ (b) $-\frac{3}{4}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{4}{3}$

সমাধান: (b); $ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c$

$\Rightarrow y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$

$\therefore ax + by + c = 0$ এর ঢাল $= \frac{-a}{b} = -\frac{3}{4}$

19. $y^2 = 4(x+1)$ সমীকরণটির পোলার আকৃতি কোনটি?

(a) $r(1 - \cos\theta) = 2$ (b) $r(1 + \cos\theta) = 2$
(c) $r(1 - \sin\theta) = 2$ (d) $r(1 + \sin\theta) = 2$

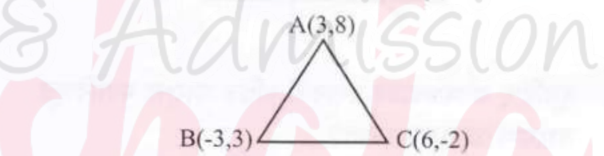
সমাধান: (a); $r^2 . \sin^2\theta = 4(r.\cos\theta + 1)$

$\Rightarrow r^2 = 4r\cos\theta + 4 + r^2\cos^2\theta$

$\Rightarrow r = r\cos\theta + 2 [\because r \geq 0]$

$\Rightarrow r(1 - \cos\theta) = 2$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



20. B বিন্দুর পোলার স্থানাংক কোনটি? **[Ans: c]**

(a) $\left(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ (b) $\left(3\sqrt{2}, \frac{-\pi}{4}\right)$
(c) $\left(3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $\left(3\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$

21. উদ্দীপকের ক্ষেত্রে –

(i) ΔABC এর ভর কেন্দ্র (2, 3)
(ii) AB সরল রেখার সমীকরণ $5x - 6y = -33$
(iii) BC এর দৈর্ঘ্য = 5

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); ভরকেন্দ্র $\left(\frac{3-3+6}{3}, \frac{8+3+(-2)}{3}\right) = (2,3)$

AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x-3}{3+3} = \frac{y-8}{8-3} \Rightarrow 5x - 6y = -33$

$BC = \sqrt{(-3-6)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{9^2 + 5^2} = \sqrt{106}$

22. $x + \sqrt{3}y - 3 = 0$ সরলরেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কত ডিগ্রী কোণ উৎপন্ন করে?

(a) $60°$ (b) $30°$ (c) $120°$ (d) $150°$

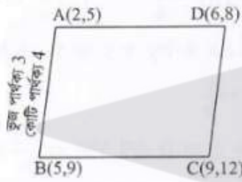
সমাধান: (d); $x + \sqrt{3}y - 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 150$

23. $A(2,5), B(5,9)$ এবং $D(6,8)$ বিন্দুগুলো ABCD রম্বসের তিনটি শীর্ষবিন্দু হলে, চতুর্থ শীর্ষবিন্দু C এর স্থানাঙ্ক কোনটি?

(a) $(4,3)$ (b) $(9,12)$ (c) $(4,7)$ (d) $(7,9)$

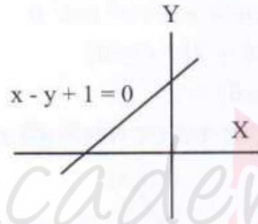
সমাধান: (b);



24. y অক্ষের উপর লম্ব এবং x অক্ষের 3 একক নিচে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ কোনটি? **[Ans: c]**

(a) $x = -3$ (b) $x = 3$ (c) $y = -3$ (d) $y = 3$

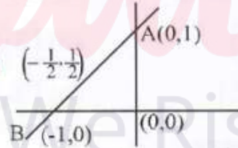
নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



25. মূলবিন্দু ও অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার ঢাল কত?

(a) 1 (b) -2 (c) 2 (d) -1

সমাধান: (d);



$; x - y + 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{x}{-1} + y = 1 \quad \therefore$ ঢাল $= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$

26. রেখাটি কর্তৃক x ও y অক্ষের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য-

(a) 1 (b) 2 (c) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{3}$

সমাধান: (c); দৈর্ঘ্য $AB = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

27. $(a,0), (0,b)$ ও $(1,1)$ বিন্দুগুলো সমরেখ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

(a) $a - b = ab$ (b) $a + b = ab$
(c) $a - b = -ab$ (d) $a + b = -ab$

সমাধান: (b); $\frac{a}{-b} = \frac{-1}{b-1} \Rightarrow b = ab - a \Rightarrow a + b = ab$

28. $r^2\sin2\theta = 2a^2$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ কোনটি?

(a) $xy = a^2$ (b) $xy = \frac{1}{a^2}$
(c) $2xy = a^2$ (d) $xy = 2a^2$

সমাধান: (a); $r^2 \sin 2\theta = 2a^2$

$\Rightarrow 2 r \sin\theta \, r\cos\theta = 2a^2 \Rightarrow 2xy = 2a^2 \Rightarrow xy = a^2$

29. $y = mx + c$ রেখার পোলার সমীকরণ কোনটি? **[Ans: c]**

(a) $r\tan\theta = c$
(b) $r\sin2\theta = c$
(c) $r(\tan\theta - m) = \operatorname{cosec}\theta$
(d) $r\cos\theta = mr\sin\theta + c$

30. একটি সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য 5 একক এবং তার এক প্রান্ত $(2,-2)$ অপর প্রান্তের ভুজ 5 হলে কোটি-

(i) -6 (ii) 6 (iii) 2

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); $\sqrt{(2-5)^2 + (-2-a)^2} = 5$

$\therefore a = -6, 2$

31. $3x - 4y - 12 = 0$ সরলরেখাটি-

(i) মূলবিন্দুগামী
(ii) অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য = 5
(iii) y- অক্ষের ছেদবিন্দু $(0,-3)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); $4y = 3x - 12 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - 3$

y অক্ষের ছেদবিন্দু $(0,-3)$; $\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$

$\therefore$ অতিআংশ $= \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = 5$

32. A(3,2) এবং B(5,4) দুটি বিন্দু-

(i) AB রেখার ঢাল = 1
(ii) AB রেখার সমীকরণ $x - y - 1 = 0$
(iii) AB কে বাহু ধরে অংকিত বর্গের ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); AB এর সমীকরণ, $\frac{x-3}{3-5} = \frac{y-2}{2-4}$

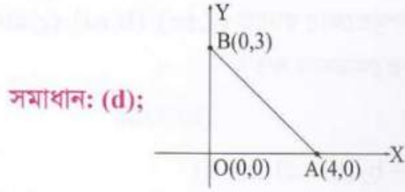
$\Rightarrow x - y - 1 = 0 \quad \therefore$ ঢাল $= \frac{2-4}{3-5} = 1$

ক্ষেত্রফল $= \left(\sqrt{(3-5)^2 + (2-4)^2}\right)^2 = 2^2 + 2^2 = 8$

33. $x = 0, y = 0$ এবং $3x + 4y = 12$ রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত?

(a) 4 sq. units (b) 8 sq. units
(c) 10 sq. units (d) 6 sq. units

সমাধান: (d);



$\Delta OAB = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$

34. $4x - y + 5 = 0$ এবং $9x - 2y - 12 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে tanθ এর ধনাত্মক মান কত?

(a) $\frac{1}{38}$ (b) $\frac{5}{37}$ (c) $\frac{1}{37}$ (d) $\frac{5}{38}$

সমাধান: (a); $\tan\theta = \frac{\pm(m_1 - m_2)}{1 + m_1 m_2} = \frac{\pm\left(4 - \frac{9}{2}\right)}{1 + 4 \times \frac{9}{2}} = \frac{1}{38}$ (ধনাত্মক মান)

35. একটি বিন্দুর সঞ্চারপথ হতে পারে- [Ans: d]

(i) রেখা (ii) ত্রিভুজ (iii) অধিবৃত্ত

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) ii, iii (b) i (c) i, ii (d) i, ii, iii

36. AD মধ্যমার ভরকেন্দ্র $(-1, 1)$। $D(-3, -1)$ হলে, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি?

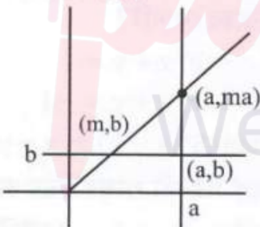
(a) $(3, 5)$ (b) $(1, 3)$
(c) $(7, 9)$ (d) $(-7, -5)$

সমাধান: (a); $\frac{-6 + x}{3} = -1 \Rightarrow x = 3$; $\frac{-2 + y}{3} = 1 \Rightarrow y = 5$

37. $x = a, y = b$ এবং $y = mx$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল-

(a) $\frac{1}{2m}(b - ma)^2$ (b) $\frac{1}{2m}(ma - b)^2$
(c) $\frac{1}{m}(ma + b)$ (d) $\frac{m}{2}(b - ma)^2$

সমাধান: (a);



$\left|\frac{1}{2} \times (ma - b) \times \left(\frac{b}{m} - a\right)\right|$

$= \left|\frac{1}{2m} \times (am - b) \times (b - am)\right|$

$= \left|\frac{1}{2m}\right| \times (am - b)^2$

38. x অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা (3, 4) বিন্দু দিয়ে যায় সরলরেখাটির ঢাল কত?

(a) 3 (b) 4 (c) 0 (d) অসংজ্ঞায়িত

সমাধান: (c); $m = \tan 0° = 0$

39. $A(x_1, \beta)$ এবং $B(x_2, \beta)$ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব কত একক? [Ans: c]

(a) $|x_1 + x_2|$ (b) $|x_1 \times x_2|$
(c) $|x_1 - x_2|$ (d) $|x_2 \div x_1|$

40. সরলরেখা তিনটি সমবিন্দুগামী হলে a এর মান কত?

(a) -1 (b) 1 (c) -2 (d) 2

সমাধান: (d); $x + y = 0 \cdots\cdots$ (i)

$x + ay - 1 = 0 \cdots\cdots$ (ii)

$x - y + 2 = 0 \cdots\cdots$ (iii)

(i) ও (iii) এর ছেদবিন্দু $(-1, 1)$ (ii) এ বসাই, $-1 + a - 1 = 0 \Rightarrow a = 2$

41. (3, 1) বিন্দু হতে $2x + y - 3 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু-

(a) $\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$ (b) $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$
(c) $\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: (b); (3, 1) গামী $2x + y - 3 = 0$ এর উপর লম্ব রেখা: $x - 2y - 1 = 0$

এদের Solve করে পাই $\equiv \left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$

42. (1; 3) বিন্দুগামী এবং $2x + y = 7$ রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ কয়টি সরলরেখা সম্ভব?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) সম্ভব নয়

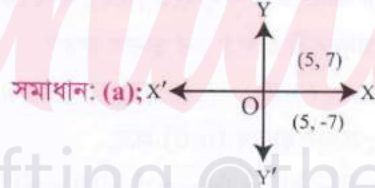
সমাধান: (b); $\tan 45° = \pm\frac{m - (-2)}{1 + m(-2)}$

$\Rightarrow m = -\frac{1}{3}, 3 \therefore$ 2 টি সম্ভব।

43. (5, 7) এর x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব-

(a) $(5, -7)$ (b) $(-7, 5)$ (c) $(-5, 7)$ (d) $(7, -5)$

সমাধান: (a);



44. $2x + 3y + 1 = 0$ এর x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিবিম্ব-

(a) $2x + 3y + 4 = 0$ (b) $-2x - 3y + 1 = 0$
(c) $2x - 3y + 1 = 0$ (d) $-2x + 3y + 1 = 0$

সমাধান: (c); কেবল y এর সহগের চিহ্ন পরিবর্তন করতে হয়। y এর স্থলে $-y$ বসাও।

45. m এর কোন মানের জন্য-

$(m - 1)x + (m + 1)y + 7 = 0$

এবং $3x + 5y - 7 = 0$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল হবে?

(a) 1 (b) 4 (c) 3 (d) 10

সমাধান: (b); $m - 1 = 3 \Rightarrow m = 4$ or, $m + 1 = 5 \Rightarrow m = 4$

46. $(3,-6)$ বিন্দুগামী এবং y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নিচের কোনটি?

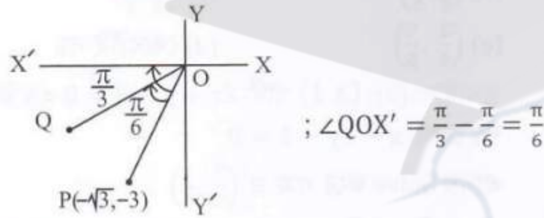
(a) $x=-6$ (b) $y=-6$
(c) $x=3$ (d) $y=3$

সমাধান: (c); $x=$ ধ্রুবক $\therefore x=3$

47. OP রেখাংশকে ঘড়ির কাঁটার দিকে $\frac{\pi}{6}$ কোণে ঘুরানোতে নতুন অবস্থান হলো OQ। P এর স্থানাঙ্ক $(-\sqrt{3},-3)$ হলে Q এর পোলার স্থানাঙ্ক হবে-

(a) $\left(-2\sqrt{3},\frac{7\pi}{6}\right)$ (b) $\left(-2\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right)$
(c) $\left(2\sqrt{3},\frac{7\pi}{6}\right)$ (d) $\left(2\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right)$

সমাধান: (c);



$;\angle QOX'=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$

$OQ=OP=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-3)^2}=2\sqrt{3}$

P এর পোলার স্থানাঙ্ক $\left(2\sqrt{3},\frac{-2\pi}{3}\right)$ $\therefore$ Q এর পোলার স্থানাঙ্ক $\left(2\sqrt{3},-\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)\equiv\left(2\sqrt{3},\frac{-5\pi}{6}\right)$
$\equiv\left(2\sqrt{3},\frac{7\pi}{6}\right)$

48. x অক্ষের উপর অবস্থিত P বিন্দু হতে $(0,2)$ এবং $(6,4)$ বিন্দু দুইটি সমদূরবর্তী হলে P এর স্থানাঙ্ক কত?

(a) $(2,0)$ (b) $(3,0)$ (c) $(5,0)$ (d) $(4,0)$

সমাধান: (d); P এর স্থানাঙ্ক $(\alpha,0)$ হলে,
$(\alpha-0)^2+(0-2)^2=(\alpha-6)^2+(0-4)^2$
$\Rightarrow 4=-12\alpha+36+16\therefore \alpha=4$

49. $3x+5y=2, 2x+3y=0, ax+by+1=0$ সমবিন্দুগামী হলে a ও b এর সম্পর্ক-

(a) $4a-6b=1$ (b) $4a-6b=2$
(c) $6a-4b=1$ (d) $6a-4b=2$

সমাধান: (c); $\begin{vmatrix}3&5&-2\\2&3&0\\a&b&1\end{vmatrix}=0$
$\Rightarrow -2(b-3a)+1(9-10)=0$
$\Rightarrow 6a-4b-1=0\therefore 6a-4b=1$

50. A, B, C বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক $(a,bc),(b,ca),(c,ab)$ হলে ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত?

(a) $\frac{1}{2}abc$ (b) $3abc$
(c) $\frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a)$
(d) $\frac{1}{2}(b-a)(b-c)(ca)$

সমাধান: (c); $\Delta ABC=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a&bc&1\\b&ca&1\\c&ab&1\end{vmatrix}$
$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a-b&bc-ca&0\\b-c&ca-ab&0\\c&ab&1\end{vmatrix}\begin{matrix}r_1'=r_1-r_2\\r_2'=r_2-r_3\end{matrix}$
$=\frac{1}{2}[(a-b)(ca-ab)-(b-c)(bc-ca)]$
$=\frac{1}{2}[a(a-b)(c-b)]-c(b-c)(b-a)]$
$=\frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a)$

51. নিচের কোন সরলরেখাটি $(3,6)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং মূল বিন্দু থেকে উহার লম্ব দূরত্ব 6 একক?

(a) $4x+3y-30=0$ (b) $4x-3y-30=0$
(c) $3x+4y-30=0$ (d) $3x+4y+10=0$

সমাধান: (a); সরলরেখাটি $y-6=m(x-3)$
$\therefore mx-y+6-3m=0$
শর্তমতে, $\left|\frac{6-3m}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}\right|=6\Rightarrow|2-m|=2\sqrt{m^2+1}$
$\Rightarrow m^2-4m+4=4m^2+4\Rightarrow 3m^2+4m=0$
$\therefore m=0,\frac{-4}{3}\therefore y-6=\frac{-4}{3}(x-3)\Rightarrow 3y-18$
$=-4x+12\therefore 4x+3y-30=0$

52. একটি সরলরেখা $(2,1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x অক্ষের ঋণাত্মক দিকের সাথে 135° কোণ উৎপন্ন করলে, সরলরেখাটির সমীকরণ নিচের কোনটি?

(a) $y-x=1$ (b) $x+y=1$
(c) $x-y=1$ (d) $x+y=-1$

সমাধান: (c); $y-1=\tan45^\circ(x-2)\Rightarrow x-y=1$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$8x-ay-9=0$ এবং $4x-3y+2=0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।

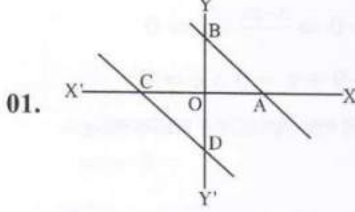
53. $(1,0)$ বিন্দু হতে দ্বিতীয় রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ কোনটি?

(a) $3x-4y-3=0$ (b) $3x+4y-3=0$
(c) $4x-3y-4=0$ (d) $4x+3y-4=0$

সমাধান: (b); $3x+4y=3\times1+4\times0=3$
$\therefore 3x+4y-3=0$

সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

CQ: বিগত বছরসমূহের বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান

01. 

[DB'22]

$AB = 4x + 3y - 12 = 0$ এবং $AB \parallel CD$

(ক) AB কে ঢাল আকারে প্রকাশ করে ইহার ঢাল নির্ণয় কর। 2

(খ) মূল বিন্দু হতে AB ও CD রেখার দূরত্ব সমান হলে CD রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) দেখাও যে, ABCD একটি রম্বস। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $AB = 4x + 3y - 12 = 0$

$\Rightarrow 3y = -4x + 12$

$\therefore y = -\frac{4}{3}.x + 4 \ldots\ldots\ldots (i)$

(i) নং সমীকরণটি AB কে ঢাল আকারে প্রকাশিত রূপ।

(i) কে $y = mx + c$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$m = -\frac{4}{3}$ এবং $c = 4$

খ. $AB = 4x + 3y - 12 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

$AB||CD$

ধরি, CD রেখার সমীকরণ, $4x + 3y + k = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

মূলবিন্দু হতে AB রেখার দূরত্ব, $d_1 = \left|\frac{0+0-12}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \frac{12}{5}$

মূলবিন্দু হতে CD রেখার দূরত্ব, $d_2 = \left|\frac{0+0+k}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \left|\frac{k}{5}\right|$

শর্তমতে, $d_1 = d_2 \Rightarrow \frac{12}{5} = \left|\frac{k}{5}\right| \Rightarrow \frac{12}{5} = \pm\frac{k}{5}$

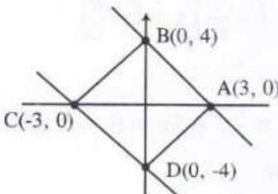
$\therefore k = \pm 12$

$k = -12$ হলে AB এর সমীকরণ পাওয়া যায়।

$\therefore$ CD এর জন্য, $k = +12$

$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ, $4x + 3y + 12 = 0$ **(Ans.)**

গ.



$AB = 4x + 3y - 12 = 0 \Rightarrow 4x + 3y = 12$

$\therefore \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \ldots\ldots\ldots (i)$

$CD = 4x + 3y + 12 = 0 \Rightarrow 4x + 3y = -12$

$\therefore \frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} = 1 \ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii) সমীকরণ হতে A, B, C, D বিন্দুসমূহ চিহ্নিত করে পাই,

$A(3,0), B(0,4), C(-3,0), D(0,-4)$

এখন, $AB = \sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2} = 5$

$BC = \sqrt{(0+3)^2 + (4-0)^2} = 5$

$CD = \sqrt{(-3-0)^2 + (0+4)^2} = 5$

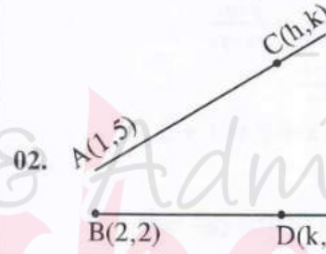
$AD = \sqrt{(3-0)^2 + (0+4)^2} = 5$

আবার, $AC = \sqrt{(3+3)^2 + 0} = 6$

$BD = \sqrt{0 + (4+4)^2} = 8$

এখানে, $AB = BC = CD = AD$ এবং $AC \neq BD$

অর্থাৎ, ABCD চতুর্ভুজের চারটি বাহু পরস্পর সমান এবং কর্ণদ্বয় অসমান। সুতরাং, ABCD একটি রম্বস। **(Showed)**

02. 

[RB'22]

(ক) $2x - 3y + k = 0$ এবং $2x - 3y = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $2\sqrt{13}$ একক হলে k এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) AC এবং BD রেখাদ্বয়ের ঢাল যথাক্রমে -2 এবং -1 হলে x- অক্ষকে CD রেখা যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

(গ) AB রেখাংশের লম্ব-দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $2x - 3y + k = 0$ এবং $2x - 3y = 0$ রেখাদ্বয়ের

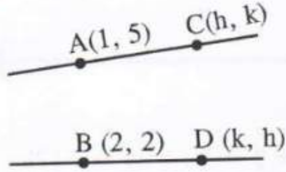
মধ্যবর্তী দূরত্ব,$d = \left|\frac{k-0}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}\right| = \left|\frac{k}{\sqrt{4+9}}\right| = \left|\frac{k}{\sqrt{13}}\right|$

এখন, $d = 2\sqrt{13} \Rightarrow \left|\frac{k}{\sqrt{13}}\right| = 2\sqrt{13}$

$\Rightarrow \pm\frac{k}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13} \Rightarrow \pm k = 2\sqrt{13}.\sqrt{13}$

$\Rightarrow \pm k = 2 \times 13 \therefore k = \pm 26$

খ.



ঢাল= $\frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর}}$

$\therefore$ AC এর ঢাল $= \frac{k-5}{h-1}$

$\therefore$ BD এর ঢাল $= \frac{h-2}{k-2}$

দেওয়া আছে, AC এর ঢাল $= -2$ এবং BD এর ঢাল $= -1$

শর্তমতে, $\frac{k}{h-1} = -2 \Rightarrow k - 5 = -2h + 2$

$\therefore k + 2h = 7 \ldots\ldots\ldots \text{(i)}$

আবার, $\frac{h-2}{k-2} = -1 \Rightarrow h - 2 = -k + 2$

$\therefore h + k = 4 \ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$

এখন, $\text{(i)} - \text{(ii)} \Rightarrow (k + 2h) - (h + k) = 7 - 4$

$\Rightarrow k + 2h - h - k = 3 \therefore h = 3$

$\text{(ii)} \Rightarrow 3 + k = 4 \therefore k = 1$

$\therefore$ C ও D বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে C(3,1) এবং D(1,3)

$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ, $\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2}$

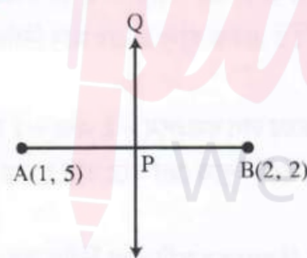
$\Rightarrow \frac{x-3}{3-1} = \frac{y-1}{1-3} \Rightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-2}$

$\Rightarrow x - 3 = -(y - 1) \Rightarrow x + y = 1 + 3$

$\Rightarrow x + y = 4 \therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$

$\therefore$ CD রেখা x অক্ষকে (4,0) বিন্দুতে ছেদ করে।

গ.



ধরি, AB রেখা লম্ব-দ্বিখণ্ডক PQ যা AB এর মধ্যবিন্দু P(x, y) বিন্দুগামী।

এখন, $x = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ এবং $y = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}$

$\therefore P(x, y) = P\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

এখন, AB এর সমীকরণ: $\frac{x-1}{1-2} = \frac{y-5}{5-2} \Rightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y-5}{3}$

$\Rightarrow 3x - 3 = -y + 5 \Rightarrow 3x + y - 3 - 5 = 0$

$\therefore 3x + y - 8 = 0 \ldots\ldots\ldots \text{(i)}$

$\therefore$ AB এর লম্বরেখার সমীকরণ:

$x - 3y + c = 0 \ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$

যেহেতু রেখাটি $P\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ বিন্দুগামী তাই,

$\text{(Ii)} \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{3.7}{2} + c = 0 \Rightarrow \frac{3-21}{2} + c = 0$

$\Rightarrow -\frac{18}{2} + c = 0 \Rightarrow -9 + c = 0 \therefore c = 9$

$\therefore$ PQ রেখা তথা AB এর লম্ব-দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ-$x - 3y + 9 = 0$ **(Ans.)**

03. (ক) $(3, -11)$ বিন্দু থেকে সর্বদা 5 একক দূরত্বে অবস্থিত কোনো চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[Ctg.B'22]**

সমাধান

ক. মনে করি, বিন্দুটি (x, y)

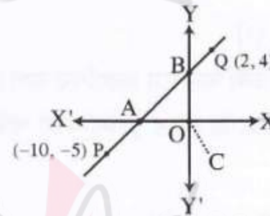
প্রশ্নমতে, $\sqrt{(3-x)^2 + (-11-y)^2} = 5$

$\Rightarrow (x-3)^2 + (y+11)^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 22y + 121 = 25$

$\therefore x^2 + y^2 - 6x + 22y + 105 = 0$ **(Ans.)**

04.



[Ctg.B'22]

এবং **OC** রেখার ঢাল $= \frac{-4}{3}$

(ক) $(3, 6)$ বিন্দুগামী $\frac{1}{3}x + 5y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) ΔOAB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

(গ) দেখাও যে, **OC** রেখা ও **x**-অক্ষরেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব। 4

সমাধান

ক. (3, 6) বিন্দুগামী ও m ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ:

$y - 6 = m(x - 3) \ldots\ldots\ldots \text{(i)}$

এখন, $\frac{x}{3} + 5y + 8 = 0 \Rightarrow 5y = -\frac{x}{3} - 8$

$\Rightarrow y = -\frac{x}{15} - \frac{8}{5} \therefore y = \left(-\frac{1}{15}\right)x + \left(-\frac{8}{5}\right)$

অর্থাৎ, $m = -\frac{1}{15}$

সুতরাং, (3, 6) বিন্দুগামী ও $\frac{1}{3}x + 5y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ:

$y - 6 = -\frac{1}{15}(x - 3)$ **(Ans.)**

খ. AB রেখার সমীকরণ:

$\frac{Y-4}{4+5} = \frac{x-2}{2+10} \Rightarrow \frac{y-4}{9} = \frac{x-2}{12} \Rightarrow \frac{y-4}{3} = \frac{x-2}{4}$

$\Rightarrow 4y - 16 = 3x - 6$

$\Rightarrow 3x - 4y - 6 + 16 = 0 \Rightarrow 3x - 4y + 10 = 0$

$\Rightarrow 3x - 4y = -10 \therefore \frac{x}{\frac{-10}{3}} + \frac{y}{\frac{10}{4}} = 1 \therefore \frac{x}{\frac{-10}{3}} + \frac{y}{\frac{5}{2}} = 1$

$\therefore A\left(-\frac{10}{3}, 0\right), B\left(0, \frac{5}{2}\right), O(0,0)$

$\therefore \Delta OAB$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -\frac{10}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\left|\left\{0 + \left(-\frac{10}{3}\right) \times \left(\frac{5}{2}\right) + 0 - 0 - 0 - 0\right\}\right|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times \left|\left(-\frac{50}{6}\right)\right|$ বর্গ একক $= \left|-\frac{25}{6}\right|$ বর্গ একক

$= \frac{25}{6}$ বর্গ একক

গ. OC রেখার ঢাল $-\frac{4}{3}$ ও ইহা $O(0,0)$ বিন্দুগামী।

$\therefore y = -\frac{4}{3}x \Rightarrow 3y = -4x \Rightarrow 3y + 4x = 0$

$\therefore 4x + 3y = 0$

আবার, x-অক্ষরেখার সমীকরণ, $y = 0$

এখন, $\frac{4x+3y}{\sqrt{4^2+3^2}} = \pm\frac{y}{1} \Rightarrow \frac{4x+3y}{5} = \pm y$

$\Rightarrow 4x + 3y = \pm 5y$

এখানে, $4x + 3y = 5y \Rightarrow 4x - 2y = 0$

$\therefore 2x - y = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

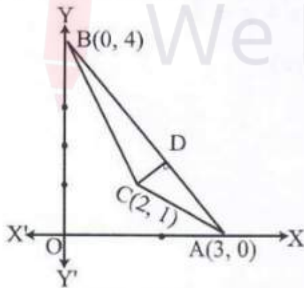
আবার, $4x + 3y = -5y \Rightarrow 4x + 8y = 0$

$\therefore x + 2y = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) নং রেখার ঢাল, $m_1 = 2$ (ii) নং রেখার ঢাল, $m_2 = -\frac{1}{2}$

এখন, $m_1 \times m_2 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

সুতরাং, OC রেখা ও x-অক্ষরেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব। **(Showed)**

05. 

[SB'22]

(ক) $\mathbf{x^2 + y^2 - 3y = 0}$ কে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর। 2

(খ) **D** বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

(গ) **∠ACB** এর সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $X^2 + y^2 - 3y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3y$

$\Rightarrow r^2 = 3r\sin\theta \therefore r = 3\sin\theta$

খ. দেওয়া আছে, $A(3,0), B(0, 4)$

AB রেখার সমীকরণ: $\frac{x-3}{3-0} = \frac{y-0}{0-4} \Rightarrow \frac{x-3}{3} = \frac{y}{-4}$

$\Rightarrow 4x - 12 = -3y \therefore 4x + 3y - 12 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

(i) নং রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ $3x - 4y + k = 0$ ও ইহা $(2, 1)$ বিন্দুগামী।

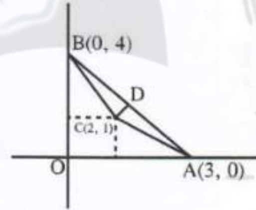
$\therefore 6 - 4 + k = 0 \Rightarrow k = -2$

$\therefore$ লম্ব রেখার সমীকরণ:$3x - 4y - 2 = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii)$\Rightarrow \frac{x}{-6-48} = \frac{y}{-36+8} = \frac{1}{-16-9}$

$\Rightarrow \frac{x}{-54} = \frac{y}{-28} = \frac{1}{-25}$

$\therefore x = \frac{54}{23}, y = \frac{28}{25} \therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{54}{25}, \frac{28}{25}\right)$

গ. 

চিত্র হতে পাই,

∠ACB এর সমদ্বিখণ্ডক হলো

BC এবং AC বাহুর স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক।

BC বাহুর সমীকরণ, $\frac{x-0}{0-2} = \frac{y-4}{4-1}$

$\Rightarrow \frac{x}{-2} = \frac{y-4}{3} \Rightarrow 3x = -2y + 8 \Rightarrow 3x + 2y - 8 = 0$

AC বাহুর সমীকরণ, $\frac{x-3}{3-2} = \frac{y-1}{1-0} \Rightarrow \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{1}$

$\Rightarrow x - y - 3 + 1 = 0 \Rightarrow x - y - 2 = 0$

$\therefore a_1a_1 + b_1b_2 = 3 \times 1 + 2 \times (-1) = 1 > 0$

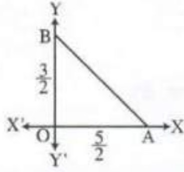
$\therefore$'+' চিহ্ন নিয়ে স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ পাওয়া যাবে।

∠ACB এর সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ, $\frac{3x+2y-8}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{x-y-2}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$

$\Rightarrow \frac{3x+2y-8}{\sqrt{13}} = \frac{x-y-2}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 3\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 8\sqrt{2} = \sqrt{13}x - \sqrt{13}y - 2\sqrt{13}$

$\Rightarrow (3\sqrt{2} - \sqrt{13})x + (2\sqrt{2} + \sqrt{13})y - 8\sqrt{2} + 2\sqrt{13} = 0$

06. 

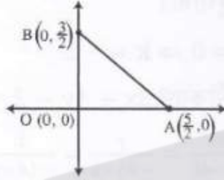
[BB'22]

(ক) ΔOAB এর ক্ষেত্রফল ও তার ভরকেন্দ্র নির্ণয় কর। 2

(খ) AB এর সমীকরণ নির্ণয় কর এবং তার সমত্রিখণ্ডন বিন্দুদ্বয়ের স্থানাংক নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. প্রদত্ত চিত্র হতে O, A, B বিন্দুসমূহ চিহ্নিত করে পাই,



ΔOAB এর ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2} \times OA \times OB = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$

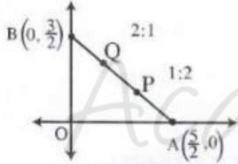
ΔOAB এর ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (x, y) হলে,

$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{0+\frac{5}{2}+0}{3} = \frac{5}{6}$

$y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = \frac{0+0+\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ ভরকেন্দ্র $\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right)$

খ.



AB সরলরেখা কর্তৃক

x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ, $a = OA = \frac{5}{2}$

y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ, $b = OB = \frac{3}{2}$

$\therefore$ AB সরলরেখার সমীকরণ

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{5} + \frac{2y}{3} = 1$

$\therefore \boxed{6x + 10y = 15}$

ধরি, AB এর সমত্রিখণ্ডক বিন্দুদ্বয় P ও Q। এক্ষেত্রে, P ও Q বিন্দুদ্বয় AB কে যথাক্রমে 1: 2 এবং 2: 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{1\times0+2\times\frac{5}{2}}{1+2}, \frac{1\times\frac{3}{2}+2\times0}{1+2}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{2\times0+1\times\frac{5}{2}}{1+2}, \frac{2\times\frac{3}{2}+1\times0}{1+2}\right) = \left(\frac{5}{6}, 1\right)$

$\therefore$ AB এর সমত্রিখন্ডক বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{2}\right)$ এবং $\left(\frac{5}{6}, 1\right)$

07. দৃশ্যকল্প-১: $3x - 4x + 7 = 0,\ 4x - 3y + 2 = 0$

[BB'22]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. দৃশ্যকল্প-১ এ,

$3x - 4y + 7 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

$a_1 = 3, b_1 = -4, c_1 = 7$

$4x - 3y + 2 = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

$a_2 = 4, b_2 = -3, c_2 = 2$

(i) ও (ii) নং রেখা দুইটির মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডক দুটির সমীকরণ,

$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \ldots\ldots\ldots (iii)$

এখানে, $a_1a_2 + b_1b_2 = 3 \times 4 + (-4)(-3) = 24$

যেহেতু $a_1a_2 + b_1b_2 > 0$

তাই, (iii) হতে (+) চিহ্নযুক্ত সমীকরণ নিলে স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক পাওয়া যাবে।

$\therefore$ স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ-

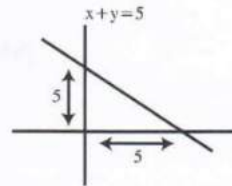
$\frac{A_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = + \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

$\Rightarrow \frac{3x-4y+7}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = + \frac{4x-3y+2}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \Rightarrow \frac{3x-4y+7}{5} = \frac{4x-3y+2}{5}$

$\Rightarrow 3x - 4y - 4x + 3y = 2 - 7$

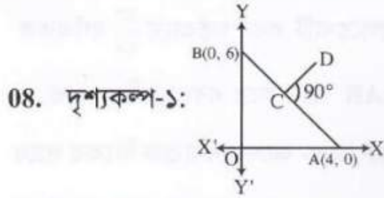
$\Rightarrow -x - y = -5 \Rightarrow x + y = 5$

$\therefore \frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1 \ldots\ldots\ldots (iv)$



(iv) নং রেখাটি অর্থাৎ, স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক দ্বারা অক্ষদ্বয়ের সাথে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$A = \frac{1}{2}|ab| = \frac{1}{2} \times 5 \times 5$ $\boxed{A = \frac{25}{2}}$ **(Ans.)**

08. দৃশ্যকল্প-১: 

[BB'22]

এখানে C, AB এর মধ্যবিন্দু

দৃশ্যকল্প-২: $4x - 3y = -4,\ 3x - 4y = -5.$

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে CD সরলরেখার সমীকরণ ও তার ঢাল নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. AB এর ঢাল, $M_{AB} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{6-0}{0-4} = -\frac{3}{2}$

যেহেতু, $CD \perp AB$ তাই CD এর ঢাল CD হলে,

$M_{AB} \times M_{CD} = -1$

$\Rightarrow -\frac{3}{2} \times M_{CD} = -1$

$\therefore M_{CD} = \frac{2}{3}$

আবার, C, AB এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = (2,3)$

$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ, $y - 3 = M_{CD}(x-2)$

$\Rightarrow y - 3 = \frac{2}{3}(x-2) \Rightarrow 3y - 9 = 2x - 4$

$\therefore 2x - 3y + 5 = 0$

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে সমীকরণ দুটিতে পক্ষান্তর করে পাই,

$4x - 3y + y = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

$3x - 4y + 5 = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

এখানে, $a_1 = 4, b_1 = -3, c_1 = 4$

$a_2 = 3, b_2 = -4, c_2 = 5$

রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ-

$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \ldots\ldots\ldots (iii)$

এখন, $a_1a_2 + b_1b_2 = (4\times3 + (-3)(-4)) = 24$

$\therefore a_1a_2 + b_1b_2 > 0$

$\therefore$ (iii) নং সমীকরণে (−)ve চিহ্নযুক্ত সমীকরণ নিলে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ পাওয়া যাবে।

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ-

$\frac{4x-3y+4}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = -\frac{3x-4y+5}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$

$\Rightarrow 4x - 3y + 4 = -(3x - 4y + 5)$

$\Rightarrow 4x - 3y + 4 = -3x + 4y - 5$

$\Rightarrow 4x - 3y + 3x - 4y = -5 - 4$

$\Rightarrow 7x - 7y = -9 \Rightarrow \frac{7x}{-9} - \frac{7y}{(-9)} = 1$

$\therefore \frac{x}{\frac{-9}{7}} + \frac{y}{\frac{9}{7}} = 1 \ldots\ldots\ldots (iv)$

(iv) নং সমীকরণে, $a = -\frac{9}{7}, b = \frac{9}{7}$

$\therefore$ রেখাটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের সাথে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$\Delta = \frac{1}{2}|ab| = \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{9}{7}\right)\left(\frac{9}{7}\right)\right| = \frac{81}{98}$ একক। **(Ans.)**

09. **$L(2,-1)$, $M(-3,3)$ এবং $2x - y + 1 = 0$.** **[JB'22]**

(ক) **(1, 1)** বিন্দু থেকে যে সকল বিন্দুর দূরত্ব সর্বদাই **5** একক, ঐ সকল বিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) **L** ও **M** বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্ব দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) **L** বিন্দুগামী এবং উদ্দীপকের সরলরেখাটির সাথে $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. আমরা জানি, দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব,

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

ধরি, A(1,1) এবং B(x, y) এবং দূরত্ব, d = 5

$\therefore 5 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 - 25 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$

$\therefore$ বিন্দুটির সঞ্চার পথের সমীকরণ:

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$

খ. 02 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

গ. দেওয়া আছে, $L(2,-1)$

$2x - y + 1 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

L বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হলো:

$(Y+1) = m(x-2) \Rightarrow y + 1 = mx - 2m$

$\Rightarrow y = mx - 2m - 1$

ধরি, বিন্দুগামী রেখার ঢাল, $m_1 = m$

(i) নং রেখার ঢাল, $m_2 = \frac{-2}{-1} = 2$

প্রশ্নমতে, রেখা দুইটির মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ হলো $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$\therefore \tan\theta = \pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} \Rightarrow \tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right) = \pm\frac{m-2}{1+2m}$

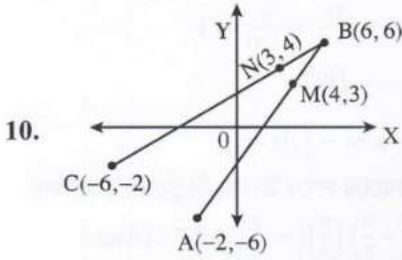
$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{\pm(m-2)}{1+2m} \Rightarrow 1 + 2m = \pm3m - 6$

$\therefore 1 + 2m = 3m - 6 \Rightarrow 3m - 2m = 1 + 6 \Rightarrow m = 7$

অথবা, $1 + 2m = -3m + 6 \Rightarrow 5m = 5 \Rightarrow m = 1$

$\therefore$ সরলরেখাটির সমীকরণ হলো: $y = 7x - 15$

এবং $y = x - 5$

10. 

[CB'22]

(ক) AM রেখাটি x- অক্ষ দ্বারা যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়, তা নির্ণয় কর। 2

(খ) B (6,6) বিন্দু হতে AC সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর। 4

(গ) দেখাও যে, ∠B এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $A(-2,-6)$ ও $M(4,3)$
মনেকরি, AM রেখাটি x-অক্ষ দ্বারা $k:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়।
প্রশ্নমতে, $\frac{3k-6}{k+1}=0 \Rightarrow 3k=6 \therefore k=2$
সুতরাং, AM রেখাটি x-অক্ষ দ্বারা $2:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়।

খ. দেওয়া আছে, $A(-2,-6)$ ও $C(-6,-2)$
AC সরলরেখার সমীকরণ: $\frac{x+2}{-2+6}=\frac{y+6}{-6+2} \Rightarrow \frac{x+2}{4}=\frac{y+6}{-4}$
$\Rightarrow x+2=-y-6 \therefore x+y+8=0$
$\therefore B(6,6)$ বিন্দু হতে AC সরলরেখার লম্ব দূরত্ব:
$\left|\frac{6+6+8}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|=\left|\frac{20}{\sqrt{2}}\right|=10\sqrt{2}$ একক

গ. দেওয়া আছে, $M(4,3), N(3,4), B(6,6)$
MB রেখার সমীকরণ: $\frac{x-6}{6-4}=\frac{y-6}{6-3} \Rightarrow \frac{x-6}{2}=\frac{y-6}{3}$
$\Rightarrow 3x-18=2y-12$
$\therefore 3x-2y-6=0 \ldots\ldots\ldots (i)$
BN রেখার সমীকরণ: $\frac{x-6}{6-3}=\frac{y-6}{6-4} \Rightarrow \frac{x-6}{3}=\frac{y-6}{2}$
$\Rightarrow 2x-12=3y-18$
$\therefore 2x-3y+6=0 \ldots\ldots\ldots (ii)$
এখন, $\frac{3x-2y-6}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\pm\frac{2x-3y+6}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}$
$\Rightarrow 3x-2y-6=\pm 2x-3y+6$
(+) নিয়ে, $3x-2y-6=2x-3y+6$
$\Rightarrow x+y-12=0 \ldots\ldots\ldots (iii)$
(−) নিয়ে, $3x-2y-6=-2x+3y-6$
$\Rightarrow 5x-5y=0 \therefore x-y=0 \ldots\ldots\ldots (iv)$
(iii) নং রেখার ঢাল, $m_1=-1$
(iv) নং রেখার ঢাল, $m_2=1$
এখন, $m_1 \times m_2=(-1)\times 1=-1$
সুতরাং ∠B এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব। **(Showed)**

11. উদ্দীপকে-১: **AB** সরলরেখাটি প্রথম চর্তুভাগে $\frac{32}{\sqrt{3}}$ বর্গএকক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট **Δ OAB** গঠন করে এবং মূলবিন্দু হতে **AB** এর উপর লম্ব **OP** যা **x-** অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে **60°** কোণে আনত। **[CB'22]**

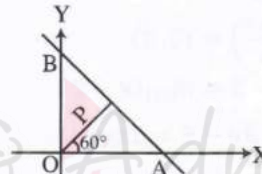
(ক) **(4,2)** বিন্দুগামী এবং $6x+8y+17=0$ রেখার সাথে সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত **AB** এর সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

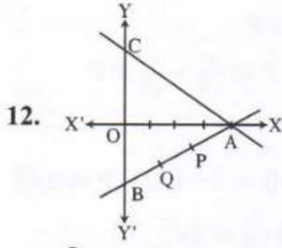
সমাধান

ক. মনেকরি, $6x+8y+17=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $6x+8y+k=0$ ও ইহা $(4,2)$ বিন্দুগামী।
$\therefore 24+16+k=0 \Rightarrow k=-40$
$\therefore$ নির্ণেয় সমান্তরাল রেখার সমীকরণ: $6x+8y-40=0$

খ.



মনে করি, সরলরেখাটির সমীকরণ:
$x\cos\alpha+y\sin\alpha=P$
$x\cos 60°+y\sin 60°=P$ [প্রদত্ত $\alpha=60°$]
$\Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}y}{2}=P \Rightarrow \frac{x}{2P}+\frac{\sqrt{3}y}{2P}=1 \Rightarrow \frac{x}{2P}+\frac{y}{\frac{2P}{\sqrt{3}}}=1$
এটিকে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ এর সাথে তুলনা করে পাই,
$a=2P, b=\frac{2P}{\sqrt{3}}$
প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}\times 2P\times\frac{2P}{\sqrt{3}}=\frac{32}{\sqrt{3}}$
$2P^2=32 \Rightarrow P^2=16$
$\therefore P=4$ [$\because$ P সর্বদা ধনাত্মক]
$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ: $\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}y}{2}=4$
$\Rightarrow x+\sqrt{3}y-8=0$ **(Ans.)**

12. 

[Din.B'22]

চিত্রে $OA = 4, OB = 2$ এবং $OC = 3$

(ক) $(2, -3)$ বিন্দুগামী এবং x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

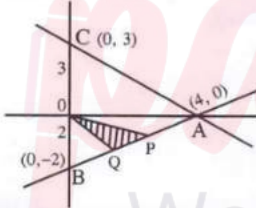
(খ) $AP = PQ = QB$ হলে ΔOPQ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

(গ) A বিন্দুগামী এবং AC রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, কোনো সরলরেখা $(2, -3)$ বিন্দুগামী এবং x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।
$\therefore$ সরলরেখাটির ঢাল, $m = \tan 45° = 1$
$\therefore$ সরলরেখাটির সমীকরণ: $(y + 3) = 1(x - 2)$
$\Rightarrow y + 3 = x - 2 \Rightarrow x - y - 5 = 0$
$\therefore$ সরলরেখাটির সমীকরণ হলো $x - y - 5 = 0$

খ. দেওয়া আছে, $OA = 4, OB = 2, OC = 3$ এবং $AP = PQ = QB$
O বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$
A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4, 0)$
B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -2)$
C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 3)$
চিত্র হতে পাই,



BA রেখাংশকে Q বিন্দু 1: 2 এবং P বিন্দু 2: 1 অনুপাত অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{1\times4+2\times0}{1+2}, \frac{1\times0+2\times(-2)}{1+2}\right)$
$= \left(\frac{4}{3}, \frac{-4}{3}\right)$

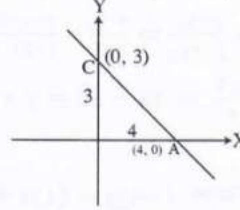
$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{2\times4+1\times0}{1+2}, \frac{2\times0+1\times(-2)}{1+2}\right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

$\therefore \Delta OPQ$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{-8}{9} + \frac{32}{9}\right) = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$ বর্গএকক?

$\therefore \Delta OPQ$ এর ক্ষেত্রফল $\frac{4}{3}$ বর্গএকক

গ. চিত্র হতে পাই, $A = (4, 0)$, $C = (0, 3)$



AC রেখার সমীকরণ: $\frac{x-4}{4-0} = \frac{y-0}{0-3}$
$\Rightarrow -3x + 12 = 4y \Rightarrow 3x + 4y - 12 = 0$
AC রেখার ঢাল $m_1 = -\frac{3}{4}$
ধরি, A বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $(y - 0) = m(x - 4)$
$\Rightarrow y = mx - 4m$
রেখাটির ঢাল, $m_2 = m$

$\therefore \tan 45° = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow 1 = \pm\frac{-\frac{3}{4} - m}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)m}$

$\Rightarrow 1 \pm \frac{\frac{-3-4m}{4}}{\frac{4-3m}{4}}$

$\Rightarrow 4 - 3m = \pm(-3 - 4m)$
$\therefore 4 - 3m = -3 - 4m \Rightarrow m = -7$
অথবা, $4 - 3m = -(-3 - 4m)$
$\Rightarrow 4 - 3m = 3 + 4m \therefore m = \frac{1}{7}$
A বিন্দুগামী সরলরেখাটির সমীকরণ হলো:
$y = (-7)x + 7 \times 4) \Rightarrow y = -7x + 28$
$\Rightarrow y + 7x - 28 = 0$
অথবা, $y = \left(\frac{1}{7}\right)x - \left(\frac{1}{7}\right)4 \Rightarrow 7y = x - 4$
$\Rightarrow 7y - x + 4 = 0$
$\therefore$ A বিন্দুগামী সরলরেখা দুটির সমীকরণ হলো:
$y + 7x - 28 = 0$ এবং $7y - x + 4 = 0$

13. **A $(3, -2)$, B $(5, 6)$ দুটি বিন্দু $3x + 4y - 1 = 0$ ও $5x - 12y + 3 = 0$ দুটি সরলরেখার সমীকরণ** [Din.B'22]

(ক) $(5, -5)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

(খ) AB এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক রেখাটি y- অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকে বর্ণিত রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. ধরি, $A = (5, -5) \therefore r = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$
A বিন্দুটি চতুর্থ চর্তুভাগে অবস্থিত। $\therefore \theta = -\tan^{-1}\left|\frac{-5}{5}\right|$
$= -\tan^{-1}|-1| = \frac{-\pi}{4}$
$\therefore$ A কে পোলার স্থানাঙ্কে স্থানান্তর করে পাই, $\left(5\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$

খ. দেওয়া আছে, A (3, −2), B (5,6)

AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} \Rightarrow \frac{x-3}{3-5} = \frac{y-(-2)}{(-2)-6}$

$\Rightarrow \frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{-8} \Rightarrow x-3 = \frac{y+2}{4} \Rightarrow 4x-12 = y+2$

$\Rightarrow y - 4x + 14 = 0$

AB রেখাংশের লম্ব রেখার সমীকরণ, $(-4)y - (1)x + k = 0 \Rightarrow -4y - x + k = 0 \Rightarrow 4y + x + k = 0$

রেখাটি AB রেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, অতএব, এটি $\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+6}{2}\right)$ বিন্দুগামী

$\therefore 4(2) + 4 + k = 0 \Rightarrow k = -12$

∴ লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ, $4y + x - 12 = 0$

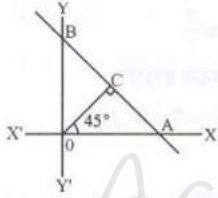
$\Rightarrow 4y - 12 = 0 \Rightarrow y = 3$

∴ y অক্ষকে (0, 3) বিন্দুতে ছেদ করে

অথবা, $4y + x - 12 = 0 \Rightarrow 4y + x = 12$

$\Rightarrow \frac{y}{3} + \frac{x}{12} = 1$

গ. 07 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

14. 

[MB'22]

(ক) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ রেখার উপর লম্ব এবং প্রদত্ত রেখা x -অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা ঐ বিন্দুগামী। 2

(খ) যদি $\Delta AOB = 8$ বর্গ একক হয়, তবে AB রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) ∠BAX এর সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow bx - ay - ab = 0$ ……… (i)

∴ প্রদত্ত রেখার সমীকরণ $bx - ay - ab = 0$ ও ইহা x-অক্ষকে (a, 0) বিন্দুতে ছেদ করে।

(i) নং রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ $ax + by + k = 0$ ও ইহা (a, 0) বিন্দুগামী।

$\therefore a^2 + k = 0 \Rightarrow k = -a^2$

∴ নির্ণেয় লম্ব রেখার সমীকরণ $ax + by - a^2 = 0$

খ. মনে করি, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$

$\Rightarrow x\cos 45° + y\cos 45° = P \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = P$

$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}P} + \frac{y}{\sqrt{2}P} = 1$

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2} \times \sqrt{2}P \times \sqrt{2}P = 8 \Rightarrow P^2 = 8 \therefore P = 2\sqrt{2}$

∴ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ: $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow x + y = 4 \therefore x + y - 4 = 0$ **(Ans.)**

গ. (খ) হতে পাই,

AB রেখার সমীকরণ, $x + y - 2 = 0 \Rightarrow x + y = 2$

$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$

∴ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক হলো, (2, 0)

B বিন্দুর স্থানাঙ্ক হলো, (0, 2)

∴ ∠BAX সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ, A বিন্দুগামী এবং এর ঢাল AB রেখার ঢালের অর্ধেক। AB রেখার x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কোণ,

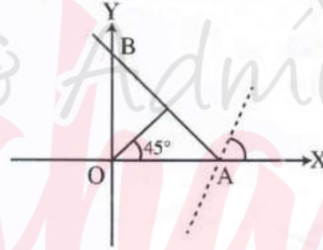
$\theta_1 = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{1}{1}\right| = \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$

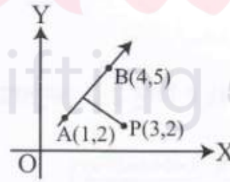
এর সমদ্বিখণ্ডকের ঢাল, $\tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) \approx 2.414$

∴ ∠BAX এর সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$(y - 0) = 2.414(x - 2)$

$\Rightarrow y = 2.414x - 4.828$



15. 

[DB'21]

(ক) $(-\sqrt{3}, -1)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক হতে, AB = 3BC হলে, AC এর লম্বদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপক হতে, P বিন্দু থেকে AB রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 13 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $\frac{AB}{BC}=\frac{3}{1}$ এবং $A(1,2), B(4,5)$

ধরি, $C \equiv (x, y)$

A(1,2) B(4,5) C(x,y)

$\therefore \frac{3x+1}{3+1}=4$ এবং $\frac{3y+2}{3+1}=5$

$\Rightarrow x=5 \Rightarrow y=6$

$\therefore C \equiv (5,6)$

$\therefore$ AC রেখার মধ্যবিন্দু $R(x,y) \equiv \left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+6}{2}\right) \equiv (3,4)$

AC রেখার ঢাল $=\frac{6-2}{5-1}=1$

$\therefore$ AC রেখার লম্বসমদ্বিখণ্ডকের ঢাল $=-1$ ও এটি $(3,4)$ বিন্দুগামী

$\therefore$ AC রেখার লম্বসমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

$(y-4)=-(x-3) \Rightarrow x+y-7=0$ **(Ans.)**

গ. AB রেখার ঢাল $m=\frac{5-2}{4-1}=1$

ধরি, পাদবিন্দু $Q(x,y)$

$\therefore$ PQ রেখার ঢাল -1 ও এটি $P(3,2)$ বিন্দুগামী

$\therefore$ PQ রেখার সমীকরণ, $y-2+x-3=0$

$\Rightarrow x+y-5=0 \cdots\cdots\cdots$ (i)

আবার, AB রেখার সমীকরণ, $\frac{y-2}{5-2}=\frac{x-1}{4-1}$

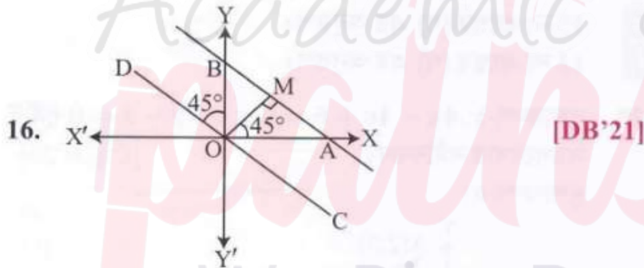
$\Rightarrow x-y+1=0 \cdots\cdots\cdots$ (ii)

$\therefore$ (i) ও (ii) হতে পাই, $x+1=5-x \Rightarrow x=2$

এবং $y=3$

$\therefore$ P থেকে AB এর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু $(2,3)$ **(Ans.)**

16. **[DB'21]**



(ক) **Y-অক্ষ ও $(2,2)$ বিন্দু থেকে $(a,5)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান নির্ণয় কর।** 2

(খ) **উদ্দীপক হতে, CD সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।** 4

(গ) **উদ্দীপক বর্ণিত ΔOAB এর ক্ষেত্রফল 18 বর্গ একক হলে, AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।** 4

সমাধান

ক. y-অক্ষ থেকে $(a,5)$ বিন্দুর দূরত্ব a একক।

$\therefore \sqrt{(a-2)^2+(5-2)^2}=a$

$\Rightarrow a^2-4a+4+9=a^2$ [বর্গ করে]

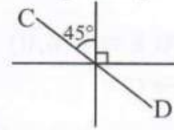
$\Rightarrow -4a+4+9=0 \Rightarrow a=\frac{13}{4}$ **(Ans.)**

খ. x-অক্ষের সাথে CD সরলরেখার উৎপন্ন কোণ $90°+45°=135°$

আবার, CD সরলরেখা $(0,0)$ বিন্দুগামী

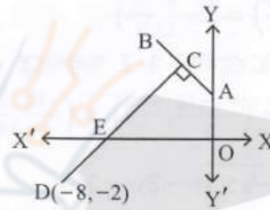
$\therefore$ CD সরলরেখার সমীকরণ, $y-0=(\tan 135°)(x-0)$

$\Rightarrow y=-(x) \Rightarrow x+y=0$ **(Ans.)**



গ. **14 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।**

17. **[RB'21]**



AB রেখার সমীকরণ $x+y=4$; C, AB এর মধ্যবিন্দু।

(ক) **AB রেখা x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।** 2

(খ) **E বিন্দুগামী AB এর সমান্তরাল সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** 4

(গ) **O বিন্দু এবং EC রেখার সমত্রিখণ্ডন বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।** 4

সমাধান

ক. AB রেখার ঢাল, $m=-\frac{1}{1}=-1$

ধরি, x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ তৈরি করে,

$\therefore m=\tan\theta$ বা, $\tan\theta=-1=\tan 135°$

$\therefore \theta=135°$ **(Ans.)**

খ. AB রেখার ঢাল $=-1$, CD রেখার ঢাল m হলে

$m(-1)=-1$ বা, $m=1$, CD রেখা $(-8,-2)$ বিন্দুগামী

$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ $y+2=x+8$

বা, $x-y+6=0$ ……………(i)

(ii) নং রেখায় $y=0$ বসিয়ে পাই, $x=-6$

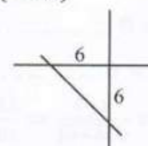
$\therefore E=(-6,0)$

$\therefore$ E বিন্দুগামী ও AB এর সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ,

$y=-1(x+6)$ বা, $x+y=-6$ বা, $\frac{x}{-6}+\frac{y}{-6}=1$

$\therefore$ উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\Delta=\frac{1}{2}\times 6\times 6$

$=18$ বর্গ একক **(Ans.)**



গ. 'খ' হতে

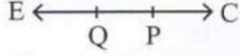
CD রেখার সমীকরণ $x - y + 6 = 0$ .... (i)

AB রেখার সমীকরণ $x + y - 4 = 0$ .... (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $4 - x = x + 6$ বা, $x = -1$

এবং $y = 5$

$\therefore c \equiv (-1,5)$ এবং $E \equiv (-6,0)$



EC রেখাকে P বিন্দু 2: 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে

$p(x_1, y_1) = \left(\frac{-2-6}{3}, \frac{10+0}{3}\right) = \left(-\frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right)$

আবার, $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু EC রেখাকে 1: 2 অনুপাতে বিভক্ত করলে $Q(x_2, y_2) = \left(\frac{-1-12}{3}, \frac{5+0}{3}\right) = \left(\frac{-13}{3}, \frac{5}{3}\right)$

OP রেখার সমীকরণ, $y = \frac{\frac{10}{3}}{-\frac{8}{3}} x \Rightarrow -8y - 10x$

$\Rightarrow 5x + 4y = 0$

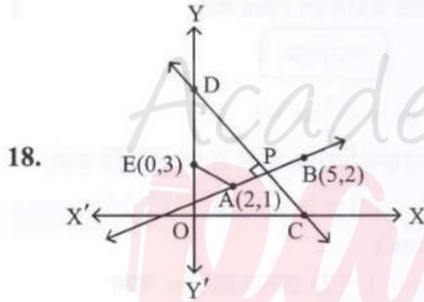
OQ রেখার সমীকরণ, $y = \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{13}{3}} x \Rightarrow -13y = 5x$

$\Rightarrow 5x + 13y = 0$

নির্ণেয় সমীকরণদ্বয়, $5x + 4y = 0$

$\Rightarrow 5x + 13y = 0$ **(Ans.)**

18. **[RB'21]**



(ক) $4x - 3y + 2 = 0$ এবং $8x - 6y - 9 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। 2

(খ) P, AB এর মধ্যবিন্দু হলে CD রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) AE এবং CD রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $4x - 3y + 2 = 0$

বা, $8x - 6y + 4 = 0$ .... (i)

এবং $8x - 6y - 9 = 0$ .... (ii)

$\therefore$ মধ্যবর্তী দূরত্ব $d = \frac{4+9}{\sqrt{36+64}} = \frac{13}{10}$ একক **(Ans.)**

খ. $A(2,1)$ ও $B(5,2)$ এর মধ্যবিন্দু $P(x,y)$

$\therefore P(x,y) \equiv \left(\frac{5+2}{2}, \frac{2+1}{2}\right) \equiv \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

আবার, AB রেখার ঢাল, $m_1 = \frac{2-1}{5-2} = \frac{1}{3}$

$CD \perp AB$

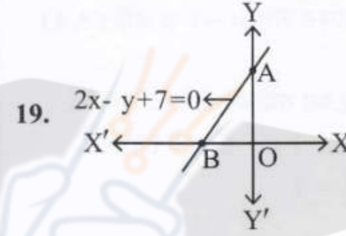
$\therefore$ CD রেখার ঢাল, -3 এবং CD রেখা $P\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ বিন্দুগামী।

$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ, $y - \frac{3}{2} = -3\left(x - \frac{7}{2}\right)$

বা, $3x + y - 12 = 0$ **(Ans.)**

গ. **07 নং প্রশ্নের (খ) এবং 13 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।**

19. **[Ctg.B'21]**



(ক) $(3,4)$ এবং $(-1,1)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। 2

(খ) $(3,1)$ বিন্দু থেকে AB রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

(গ) দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(-1,2)$ বিন্দুগামী এবং AB রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। 4

সমাধান

ক. $(3,4)$ ও $(-1,1)$ বিন্দুর দূরত্ব

$D = \sqrt{\{3-(-1)\}^2 + (4-1)^2}$

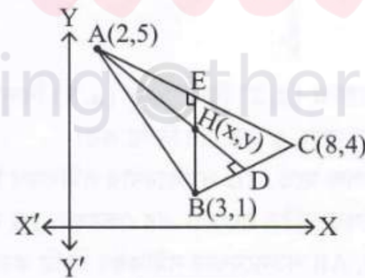
$= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ একক **(Ans.)**

খ. **15 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।**

গ. **12 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।**

20. **দৃশ্যকল্প-১: $4x - 4y + 6 = 0, x + 7y - 3 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ।** **[Ctg.B'21]**

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) $(-\sqrt{3}, -1)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে ABC ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র $H(x,y)$ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 13 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. 08 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

গ. এখানে, BC রেখার ঢাল $\frac{4-1}{8-3} = \frac{3}{5}$

$AD \perp BC$

$\therefore$ AD রেখার ঢাল, $-\frac{5}{3}$

$\therefore$ AD রেখার সমীকরণ, $(y-5) = -\frac{5}{3}(x-2)$

$\Rightarrow 3y - 15 + 5x - 10 = 0$

$\therefore 5x + 3y - 25 = 0 \cdots\cdots (i)$

AC রেখার ঢাল, $\frac{5-4}{2-8} = \frac{-1}{6}$

$\therefore BE \perp AC \therefore$ BE রেখার ঢাল, 6

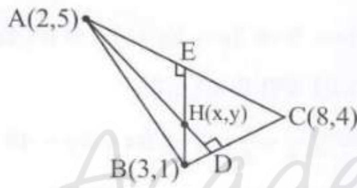
$\therefore$ BE রেখার সমীকরণ, $(y-1) = 6(x-3)$

$\Rightarrow 6x - y - 17 = 0 \cdots\cdots (ii)$

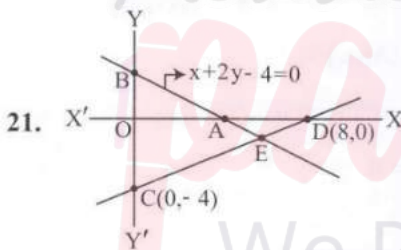
(i) ও (ii) হতে পাই, $\frac{25-5x}{3} = 6x - 17$

$\Rightarrow 23x = 76 \Rightarrow x = \frac{76}{23}$

(ii) হতে পাই, $y = \frac{65}{23} \therefore$ লম্বকেন্দ্র $H\left(\frac{76}{23}, \frac{65}{23}\right)$ **(Ans.)**



21. **[SB'21]**



(ক) $(-6, 2)$ বিন্দুগামী এবং X-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) E বিন্দুগামী এবং AB রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, AB সরলরেখা ও Y-অক্ষের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব। 4

সমাধান

ক. নির্ণেয় সমীকরণ $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y - 2 = \tan 60°(x+6)$

$\Rightarrow y - 2 = \sqrt{3}x + 6\sqrt{3}$

$\Rightarrow \sqrt{3}x - y + 2 + 6\sqrt{3} = 0$ **(Ans.)**

খ. DC রেখার সমীকরণ $\frac{x}{8} + \frac{y}{-4} = 1$

$\Rightarrow x - 2y - 8 = 0 \cdots\cdots (i)$

AB রেখার সমীকরণ $x + 2y - 4 = 0 \cdots\cdots (ii)$

Solving (i) & (ii) $\Rightarrow E(6, -1)$

$\therefore$ AB রেখার উপর লম্ব এবং E বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ,

$2x - y = 12 + 1 \Rightarrow 2x - y - 13 = 0$ **(Ans.)**

গ. AB রেখাটি $x + 2y - 4 = 0$; y-অক্ষ $x = 0$

$\therefore$ সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় $\frac{x+2y-4}{\sqrt{5}} = \pm x \Rightarrow x + 2y - 4 = \pm\sqrt{5}x$

$(+) \Rightarrow x(1-\sqrt{5}) + 2y - 4 = 0$

$(-) \Rightarrow x(1+\sqrt{5}) + 2y - 4 = 0$

$m_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, m_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$; $m_1m_2 = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})(-1-\sqrt{5}) = \frac{1}{4}\{1-5\} = \frac{1}{4} \times (-4) = -1$

$\therefore$ সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব (প্রমাণিত)

22. $7x - y = 5 \cdots\cdots (i)$
$x + y = -7 \cdots\cdots (ii)$ **[SB'21]**

(ক) $5x - 10y = 7$ সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

(খ) $(-1, 5)$ বিন্দুগামী এবং (i) নং রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্কের মাধ্যমে বিন্দুটি হতে রেখাটির লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় কর। 4

(গ) $(3, 5)$ বিন্দুগামী এবং (ii) নং রেখার সাথে $30°$ কোণ উৎপন্নকারী সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $5x - 10y = 7 \Rightarrow \frac{x}{\frac{7}{5}} - \frac{y}{\frac{7}{10}} = 1 \therefore$ অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু $\left(\frac{7}{5}, 0\right), \left(0, -\frac{7}{10}\right)$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যবিন্দু $\equiv \left(\frac{7}{10}, \frac{-7}{20}\right)$ **(Ans.)**

খ. নির্ণেয় লম্ব রেখাটি $x + 7y = -1 + 35$

$\Rightarrow x + 7y - 34 = 0 \cdots\cdots (iii)$

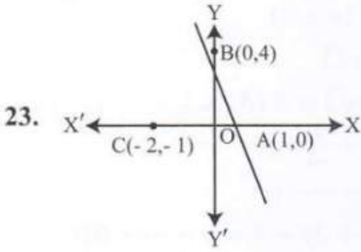
$7x - y - 5 = 0 \cdots\cdots (i)$

Solving (i) & (iii) → পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{69}{50}, \frac{233}{50}\right)$

$\therefore$ নির্ণেয় লম্ব দূরত্ব $= \sqrt{\left(\frac{69}{50}+1\right)^2 + \left(\frac{233}{50}-5\right)^2}$ একক

$= \frac{17}{5\sqrt{2}}$ একক **(Ans.)**

গ. 12 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

23. 

[BB'21]

(ক) একটি ত্রিভুজের দুটি কৌণিক বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-3, 4)$ এবং $(5, 2)$। এর ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(1, 4)$ হলে তৃতীয় কৌণিক বিন্দুর স্থানাঙ্ক বের কর। 2

(খ) C হতে AB এর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

(গ) দেখাও যে, $(1, -1)$ বিন্দুগামী এবং AB রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে, এরূপ রেখা দুটি পরস্পর লম্ব। 4

সমাধান

ক. ধরি, ৩য় কৌণিক বিন্দু (α, β) $\therefore -3 + 5 + \alpha = 3$

$\Rightarrow \alpha = 1$

আবার, $4 + 2 + \beta = 12 \Rightarrow \beta = 6$

$\therefore (\alpha, \beta) = (1, 6)$ **(Ans.)**

খ. AB রেখাটি $x + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow 4x + y - 4 = 0 \cdots\cdots\cdots (i)$

$\therefore C(-2, -1)$ বিন্দুগামী AB এর সাথে লম্ব রেখার সমীকরণ $x + 4y = -2 + 4$

$\Rightarrow x - 4y - 2 = 0 \cdots\cdots\cdots (ii)$

Solving (i) & (ii) $\Rightarrow (x, y) = \left(\frac{18}{17}, -\frac{4}{17}\right)$ **(Ans.)**

গ. (খ) থেকে পাই, AB রেখার ঢাল $m_1 = -4$, নির্ণেয় রেখার ঢাল m_2 হলে,

$\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

$\Rightarrow \tan 45° = \pm\frac{-4 - m_2}{1 - 4m_2}$

$(+) \Rightarrow 1 - 4m_2 = -4 - m_2$

$\Rightarrow 3m_2 = 5 \Rightarrow m_2 = \frac{5}{3}$

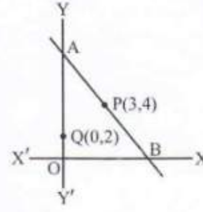
$\therefore$ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব। **(Showed)**

$(-) \Rightarrow$

$1 - 4m_2' = 4 + m_2' \Rightarrow 5m_2' = -3$

$\Rightarrow m_2' = -\frac{3}{5}$

এখানে, $m_2 m_2' = -1$

24. 

[BB'21]

এখানে, **AP = BP**

(ক) $(0, -3)$ ও $(5, 0)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমান্তরাল এবং $(3, 5)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) Q বিন্দু হতে AB রেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর। 4

(গ) Q বিন্দুগামী এবং P বিন্দু হতে 2 একক দূরবর্তী রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. নির্ণেয় রেখাটির ঢাল, $m = \frac{3}{5}$

$\therefore$ রেখাটি $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = \frac{3}{5}(x - 3)$

$\Rightarrow 5y - 25 = 3x - 9 \Rightarrow 3x - 5y + 16 = 0$ **(Ans.)**

খ. শর্তমতে, $A \equiv (0, 8)$ এবং $B \equiv (6, 0)$

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1 \Rightarrow 8x + 6y - 48 = 0$

$\therefore$ Q বিন্দু হতে AB রেখার লম্ব দূরত্ব $= \left|\frac{12 - 48}{\sqrt{6^2 + 8^2}}\right|$

$= \frac{36}{10} = \frac{18}{5}$ একক **(Ans.)**

গ. ধরি, Q বিন্দুগামী একটি রেখা $y - 2 = mx$

$\Rightarrow mx - y + 2 = 0$

শর্তমতে,

$\frac{3m - 4 + 2}{\sqrt{m^2 + 1}} = \pm 2 \Rightarrow \frac{3m - 2}{\sqrt{m^2 + 1}} = \pm 2$

$\Rightarrow 9m^2 - 12m + 4 = 4m^2 + 4$

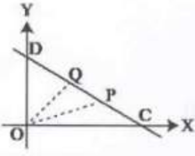
$\Rightarrow 5m^2 = 12m$

$\therefore m = 0, \frac{12}{5}$

অর্থাৎ 1টি রেখা x অক্ষের সমান্তরাল। তাই রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right) = 67.38°$ (Ans)

স্থূলকোণ $= (180 - 67.38)° = 112.62°$ **(Ans.)**

25. দৃশ্যকল্প:  [JB'21]

AB রেখার সমীকরণ $2x + 3y = 12$ এবং CD রেখার উপর $(6, 4)$ একটি বিন্দু।

(ক) $(-3, -3)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

(খ) AB ∥ CD এবং CD রেখার সমত্রিখণ্ডক বিন্দুদ্বয় P ও Q হলে, ΔOPQ এর ক্ষেত্রফল বের কর। 4

(গ) $(5, 5)$ বিন্দু হতে AB রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 13 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. CD ∥ AB

∴ CD রেখার সমীকরণ, $2x + 3y = k \cdots\cdots (i)$

এটি $(6, 4)$ বিন্দুগামী। ∴ $k = 2 \times 6 + 3 \times 4 = 24$

∴ CD রেখার সমীকরণ $2x + 3y = 24$

$\Rightarrow \frac{x}{12} + \frac{y}{8} = 1 \cdots\cdots (ii)$

∴ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $(12, 0)$; D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 8)$

∴ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $\left(\frac{12\times2+0}{2+1}, \frac{0\times2+8}{2+1}\right) \equiv \left(8, \frac{8}{3}\right)$

Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $\left(\frac{12+0\times2}{1+2}, \frac{0\times1+8\times2}{1+2}\right) = \left(4, \frac{16}{3}\right)$

∴ OPQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & \frac{8}{3} & 1 \\ 4 & \frac{16}{3} & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{128}{3} - \frac{32}{3}\right)$ বর্গএকক $= 16$ বর্গএকক **(Ans.)**

গ. 23 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

26. দৃশ্যকল্প: $A \equiv 3x + y - 15, B \equiv 4x + 3y - 12$ [JB'21]

$C \equiv 3x - 4y + 16, D \equiv 4x - 3y + 12.$

(ক) $3x - 4y + 2 = 0$ এবং $6x - 8y - 7 = 0$ সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। 2

(খ) দুইটি সরলরেখা $(7, -1)$ বিন্দুগামী এবং $A = 0$ রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর 4

(গ) যদি $B = 0, C = 0$ এবং $D = 0$ ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সমীকরণ হয় তবে ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 18 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $A = 0 \Rightarrow 3x + y - 15 = 0 \cdots\cdots (i)$

(i) নং রেখার ঢাল, $m_1 = -\frac{3}{1} = -3$

ধরি, অপর দুটি রেখার ঢাল m_2

∴ $\tan 45° = \pm\frac{m_2+3}{1-3m_2}$

(+) নিয়ে পাই, $m_2 + 3 = 1 - 3m_2 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{2}$

(−) নিয়ে পাই, $m_2 + 3 + 1 - 3m_2 = 0 \Rightarrow m_2 = 2$

$m_2 = -\frac{1}{2}$ হলে, সরলরেখার সমীকরণ,

$(y + 1) = -\frac{1}{2}(x - 7)$

$\Rightarrow x + 2y - 5 = 0 \cdots\cdots (ii)$

$M_2 = 2$ হলে, সরলরেখার সমীকরণ, $(y + 1) = 2(x - 7)$

$\Rightarrow 2x - y - 15 = 0 \cdots\cdots (iii)$

(ii) ও (iii) নির্ণেয় সরলরেখা। **(Ans.)**

গ. $B \equiv 4x + 3y - 12 = 0 \cdots\cdots (i)$

$C \equiv 3x - 4y + 16 = 0 \cdots\cdots (ii)$

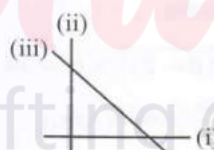
$D \equiv 4x - 3y + 12 = 0 \cdots\cdots (iii)$

এখানে (i) ও (ii) নং সমীকরণের ঢালের গুণফল

$\left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) = -1$

∴ (i) ও (ii) নং রেখা পরস্পর লম্ব।

∴ (i) ও (iii) নং রেখার সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক এবং (ii) ও (iii) নং রেখার সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দুই অন্তকেন্দ্র।



(i) ও (iii) এর ক্ষেত্রে $a_1a_2 + b_1b_2 = 16 - 9 > 0$

∴ সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক $\frac{4x+3y-12}{\sqrt{16+9}} = -\frac{4x-3y+12}{\sqrt{16+9}}$

$\Rightarrow 8x = 0 \Rightarrow x = 0 \cdots\cdots (iv)$

(ii) ও (iii) এর ক্ষেত্রে $a_1a_2 + b_1b_2 = 12 + 12 > 0$

∴ সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক $\frac{3x-4y+16}{\sqrt{9+16}} = -\frac{4x-3y+12}{\sqrt{9+16}}$

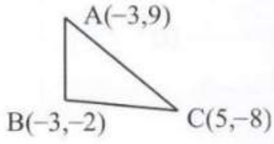
$\Rightarrow 7x - 7y + 28 = 0 \Rightarrow x - y + 7 = 0 \cdots\cdots (v)$

(iv) ও (v) হতে পাই, $x = 0$ ও $y = 7 + x = 7$

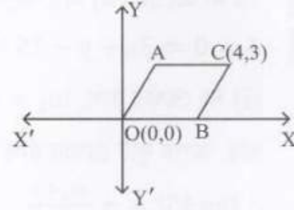
∴ অন্তঃকেন্দ্র $(0, 7)$ **(Ans.)**

27. **[CB'21]**

উদ্দীপক ১:



উদ্দীপক ২:



(ক) $(-4,-4)$ কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কে রূপান্তর কর। 2

(খ) উদ্দীপক-১ এর প্রদর্শিত ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সাহায্যে A বিন্দু হতে BC এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপক-2 এ প্রদর্শিত OBCA একটি সামান্তরিক এবং OA রেখার সমীকরণ $y = 3x$. AB কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $r = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

$\theta = -\left\{\pi - \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right)\right\} = -\frac{3\pi}{4}$

$\therefore$ পোলার স্থানাঙ্ক $\equiv \left(4\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4}\right)$

অথবা, $\theta = r + \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right) = r + \frac{r}{4} = \frac{5r}{4}$

পোলার স্থানাঙ্ক $\left(4\sqrt{2}, \frac{5r}{4}\right)$ **(Ans.)**

খ. ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 9 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}[-3(-2+8) - 9(-3-5) + 1(24+10)]$

$= \frac{1}{2}(88)$ বর্গ একক $= 44$ বর্গ একক

শর্তমতে, $\frac{1}{2} \times \sqrt{(-3-5)^2 + (8-2)^2} \times h = 44$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 10 \times h = 44 \Rightarrow h = \frac{44}{5}$ একক **(Ans.)**

গ. $B = (a, 0)$ এবং $A = (b, 3b)$

এখানে, AB এর মধ্যবিন্দু = OC এর মধ্যবিন্দু

$O = (0,0)$ এবং $C = (4,3)$

$\therefore \frac{a+b}{2} = \frac{4+0}{2} \Rightarrow a + 1 = 4 \Rightarrow a = 3$

$\frac{0+3b}{2} = \frac{3+0}{2} \Rightarrow b = 1$

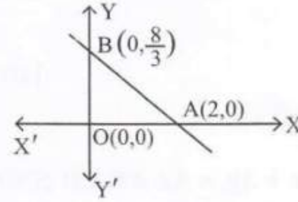
$A = (1,3), B = (3,0)$

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ, $y - 3 = \frac{3-0}{1-3}(x-1)$

$\Rightarrow y - 3 = \frac{3}{-2}(x-1) \Rightarrow -2y + 6 = 3x - 3$

$\Rightarrow 3x + 2y - 9 = 0$ **(Ans.)**

28. **[CB'21]**



(ক) $(2,-1)$ বিন্দু থেকে যে সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্ব 1 একক সেই সেটের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। 2

(খ) AB সরলরেখার সমান্তরাল এবং তা হতে 2 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর, যা $(1,2)$ বিন্দুগামী এবং AB সরলরেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। 4

সমাধান

ক. 09 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{2} + \frac{y}{\frac{8}{3}} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{3y}{8} = 1$

$\Rightarrow 4x + 3y = 8 \Rightarrow 4x + 3y - 8 = 0$

নির্ণেয় রেখাটি $4x + 3y + C = 0$ শর্তমতে, $\frac{C+8}{5} = \pm 2$

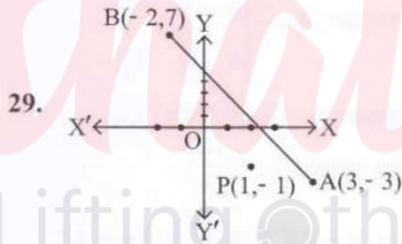
$\Rightarrow C + 8 = \pm 10 \therefore C = 2, -18$

$\therefore$ রেখাদ্বয় $4x + 3y + 2 = 0$

এবং $4x + 3y - 18 = 0$ **(Ans.)**

গ. 12 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

29. **[Din.B'21]**



(ক) AB সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর। 2

(খ) P বিন্দু হতে AB রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

(গ) P বিন্দুগামী রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর যার $y = x$ সরলরেখার সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। 4

সমাধান

ক. AB রেখার ঢাল $m_{AB} = \frac{-3-7}{3+2} = -2$ **(Ans.)**

খ. 15 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

গ. $y = x$ রেখার ঢাল, $m_1 = 1$

শর্তমতে, $\tan 30° = \pm\frac{1-m_2}{1+m_2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{1-m_2}{1+m_2}$

$\Rightarrow \pm\sqrt{3} = \frac{1+m_2}{1-m_2} \Rightarrow \frac{\pm\sqrt{3}+1}{\pm\sqrt{3}-1} = \frac{1}{m_2}$

$\Rightarrow m_2 = \frac{\pm\sqrt{3}-1}{\pm\sqrt{3}+1} \Rightarrow m_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}, \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

$\therefore$ ১ম রেখাটি, $y + 1 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}(x-1)$

$\Rightarrow y + 1 = (2-\sqrt{3})(x-1)$

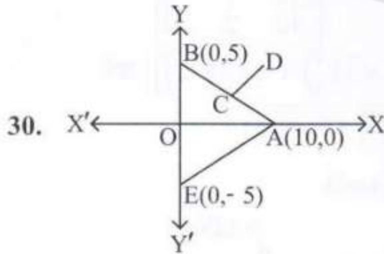
$\Rightarrow y + 1 = (2-\sqrt{3})x - (2-\sqrt{3})$

$\Rightarrow (2-\sqrt{3})x - y - 3 + \sqrt{3} = 0$ **(Ans.)**

২য় রেখাটি, $y + 1 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}(x-1)$

$\Rightarrow y + 1 = (2+\sqrt{3})x - 2 - \sqrt{3}$

$\Rightarrow (2+\sqrt{3})x - y - 3 - \sqrt{3} = 0$ **(Ans.)**

30. 

[Din.B'21]

(ক) ΔABE এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 2

(খ) $\angle AOE$ এর সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) $CD \perp AB$ এবং $AC : BC = 2 : 3$ হলে CD রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50$ বর্গ একক **(Ans.)**

খ. OA রেখার সমীকরণ $y = 0$

OE রেখার সমীকরণ $x = 0$

$\therefore$ সমদ্বিখণ্ডক $y = \pm x$

কিন্তু, নির্ণেয় রেখার ঢাল ঋণাত্মক $\therefore$ রেখাটি $y = -x$

$\Rightarrow x + y = 0$ **(Ans.)**

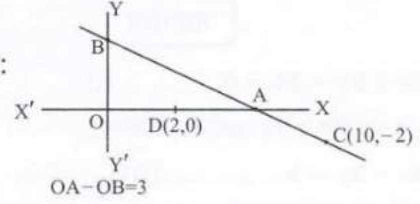
গ. $C \equiv \left(\frac{0+30}{5}, \frac{10+0}{5}\right) \equiv (6, 2)$

AB রেখার ঢাল $= \frac{5-0}{0-10} = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ CD রেখার ঢাল $= 2$

$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ, $y - 2 = 2(x - 6)$

$\Rightarrow y - 2 = 2x - 12 \Rightarrow 2x - y - 10 = 0$ **(Ans.)**

31. দৃশ্যকল্প: 

[MB'21]

(ক) $(-2, 3)$ ও $(1, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $3 : 2$ অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

(খ) AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) CD এর সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং $(4, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, y) \equiv \left(\frac{3\times1-2(-2)}{3-2}, \frac{3\times2-2\times3}{3-2}\right)$

$\equiv (7, 0)$ **(Ans.)**

খ. ধরি, AB সরলরেখার সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ... ... (i)

$\therefore OA = a, OB = b \therefore a - b = 3$ ... ... (ii)

এবং (i) নং রেখা $(10, -2)$ বিন্দুগামী, $\therefore \frac{10}{a} + \frac{-2}{b} = 1$

$\Rightarrow 10b - 2a = ab \Rightarrow 10b - 2(b + 3) = b(b + 3)$

$\Rightarrow 8b - 6 = b^2 + 3b \Rightarrow b^2 - 5b + 6 = 0$

$\Rightarrow b^2 - 3b - 2b + 6 = 0$

$\Rightarrow b(b - 3) - 2(b - 3) = 0$

$\Rightarrow (b - 3)(b - 2) = 0 \therefore b = 3$ অথবা $b = 2$

$\Rightarrow a = 6$ অথবা $a = 5 \therefore$ AB এর সমীকরণ $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$

$\Rightarrow x + 2y - 6 = 0$ অথবা, $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$

$\Rightarrow 2x + 5y - 10 = 0$ **(Ans.)**

গ. 12 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

32. দৃশ্যকল্প: $3x + 8y - 24 = 0$. **[MB'21]**

(ক) দৃশ্যকল্পের রেখাটির উপর লম্ব এবং $(3, 8)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) প্রদত্ত রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশের মধ্যবিন্দু ও মূলবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকের রেখা এবং $8x + 3y + 48 = 0$ রেখার অন্তর্ভুক্ত স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক দ্বারা y-অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $3x+8y-24=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

(i) এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$8x-3y=k \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

এটি (3, 8) বিন্দুগামী $\therefore k = 3\times 8 - 3\times 8 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ $8x-3y=0$ **(Ans.)**

খ. $3x+8y-24=0$ বা, $\frac{x}{8}+\frac{y}{3}=1 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

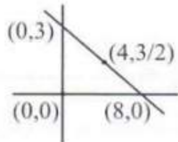
$\therefore$ অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের x অক্ষের ছেদবিন্দু (8, 0)

y অক্ষের ছেদবিন্দু (0,3)

$\therefore$ ছেদবিন্দুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু $\equiv \left(\frac{8+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right) \equiv \left(4, \frac{3}{2}\right)$

$\therefore \left(4, \frac{3}{2}\right)$ ও (0, 0) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার সমীকরণ,

$\frac{y-0}{\frac{3}{2}-0} = \frac{x-0}{4-0}$ বা, $4y = \frac{3}{2}x$ বা, $3x-8y=0$ **(Ans.)**



গ. $3x+8y-24=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$8x+3y+48=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

এখানে, $a_1a_2+b_1b_2 = 24+24 = 48 > 0$

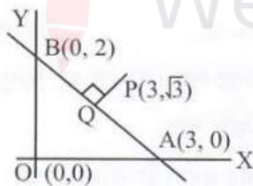
$\therefore$ (+) চিহ্ন দ্বারা স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ পাওয়া যাবে,

$\therefore$ স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ, $\frac{3x+8y-24}{\sqrt{9+64}}$

$= \frac{8x+3y+48}{\sqrt{64+9}}$

বা, $5x-5y+72=0$ বা, $\frac{x}{\frac{-72}{5}}+\frac{y}{\frac{72}{5}}=1$

$\therefore$ y অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $\frac{72}{5}$ একক **(Ans.)**

33. 

[DB'19]

(ক) **P বিন্দুর পোলার-স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।** 2

(খ) **AQ : QB = 2 : 3 হলে, ΔPQB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** 4

(গ) **PA এবং AB সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।** 4

সমাধান

ক. $P(3, \sqrt{3}) \equiv P(x,y)$; $x=3$; $y=\sqrt{3}$

$\therefore r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+3} = \sqrt{12}$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} \therefore P(3, \sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $\left(\sqrt{12}, \frac{\pi}{6}\right)$ **(Ans.)**

খ. ধরি, Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

$$\underset{B(0,\,2)}{\vdash}\overset{3}{\text{———}}\underset{Q(x,\,y)}{+}\overset{2}{\text{———}}\underset{A(3,\,0)}{\dashv}$$

$\frac{AQ}{BQ} = \frac{2}{3} \therefore$ Q এর স্থানাঙ্ক $\equiv \left(\frac{2\times 0+3\times 3}{2+3}, \frac{2\times 2+3\times 0}{2+3}\right)$

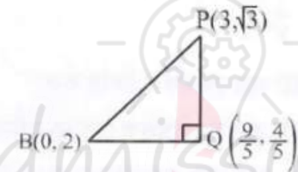
$\equiv \left(\frac{9}{5}, \frac{4}{5}\right)$

এখন, ΔPQB G, $P(3, \sqrt{3})$; $Q\left(\frac{9}{5}, \frac{4}{5}\right)$ ও $B(0, 2)$

$\therefore$ ΔPQB এর ক্ষেত্রফল $= \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{3} & 1 \\ \frac{9}{5} & \frac{4}{5} & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right|$ বর্গ একক।

$= \left|\frac{1}{2}\left\{3\left(\frac{4}{5}-2\right) - \sqrt{3}\left(\frac{9}{5}\right) + 1\left(\frac{9}{5}\times 2\right)\right\}\right|$ বর্গ একক। $= \left|\frac{1}{2}\times -\frac{9\sqrt{3}}{5}\right|$ বর্গ একক।

$= \frac{9\sqrt{3}}{10}$ বর্গ একক। **(Ans.)**



গ. $P(3, \sqrt{3})$ ও $A(3, 0)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ:

$\frac{x-3}{y-0} = \frac{3-3}{\sqrt{3}-0} \Rightarrow x-3=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$A(3, 0)$ ও $B(0, 2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ:

$\frac{y-2}{x-0} = \frac{0-2}{3-0} \Rightarrow 3(y-2) = -2x$

$\Rightarrow 3y-6 = -2x$

$\Rightarrow 2x+3y=6$

$\Rightarrow 2x+3y-6=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii) সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ:

$\frac{x-3}{\sqrt{1^2+0^2}} = \pm\frac{2x+3y-6}{\sqrt{2^2+3^2}} \Rightarrow x-3 = \pm\frac{2x+3y-6}{\sqrt{13}}$

$\Rightarrow \sqrt{13}(x-3) = \pm(2x+3y-6) \ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$

(+) নিয়ে, $\sqrt{13}(x-3) = 2x+3y-6$

$\Rightarrow x(\sqrt{13}-2) - 3y - 3\sqrt{13} + 6 = 0$

$\Rightarrow x(\sqrt{13}-2) - 3y - (3\sqrt{13}-6) = 0 \ldots\ldots\ldots (iv)$

(−) নিয়ে, $\sqrt{13}(x-3) = -(2x+3y-6)$

$\Rightarrow x(\sqrt{13}+2) + 3y - (3\sqrt{13}+6) = 0 \ldots\ldots\ldots (v)$

(iv) ও (v) ই নির্ণেয় সমীকরণ। **(Ans.)**

34. একটি সরলরেখার সমীকরণ $4x - 3y + c = 0$ এর উপর দুটি বিন্দু $P(4, 3)$ I $Q(-8, -5)$। **[RB'19]**

(ক) **PQ** রেখাকে **x**-অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা বের কর। 2

(খ) **PQ** রেখার লম্ব সমদ্বিখন্ডক দ্বারা **x** -অক্ষের ছেদাংশ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

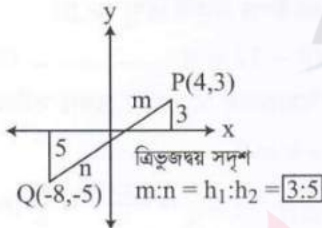
ক. ধরি, L হল নির্ণেয় বিন্দু (m, n; P(4,3) L(P,0) Q(-8,-5))

যা x - অক্ষের উপর অবস্থিত, যা m: n অনুপাত বিভক্ত করেছে

$\therefore \frac{-5m+3n}{m+n} = 0$; $5m = 3n \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{3}{5}$ [x-অক্ষের উপর কোনো বিন্দুর কোটি 0]

$\therefore$ PQ রেখাকে x অক্ষ 3: 5 অনুপাতে বিভক্ত করে।

বিকল্প:



খ. PQ এর মধ্যবিন্দু $(-2, -1)$.

PQ এর ঢাল, $m_1 = \frac{3-(-5)}{4-(-8)} = \frac{2}{3}$

PQ এর লম্বসমদ্বিখন্ডকের ঢাল, $m_2 = \frac{-3}{2}$

$(-2, -1)$ বিন্দুগামী PQ এর লম্ব দ্বিখন্ডকের সমীকরণ,

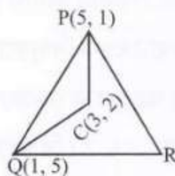
$y - (-1) = m_2(x + 2) \Rightarrow y + 1 = \frac{-3}{2}(x + 2)$

$\Rightarrow 3x + 2y + 8 = 0 \longrightarrow$ (i)

$y = 0$ হলে, (i) $\Rightarrow x = -\frac{8}{3}$

$\therefore$ x অক্ষের ছেদাংশ $= \frac{8}{3}$ একক

35. $\overline{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, $\overline{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\overline{C} = a\hat{i} - 7\hat{j} + 10\hat{k}$. **[RB'19]**

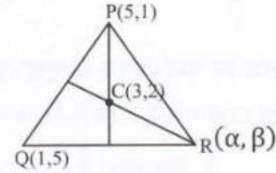


(গ) **PQR** ত্রিভুজের লম্ববিন্দু **C(3, 2)** হলে **ΔPQR** এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

গ. ধরি, $R(\alpha, \beta)$; $\left(\frac{\beta-5}{\alpha-1}\right)\left(\frac{1-2}{5-3}\right) = -1$

$\Rightarrow \left(\frac{\beta-5}{\alpha-1}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 ; \beta = 2\alpha + 3 \longrightarrow$ (i)



$\left(\frac{1-5}{5-1}\right)\left(\frac{\beta-2}{\alpha-3}\right) = -1 \Rightarrow \frac{\beta-2}{\alpha-3} = 1$

$\Rightarrow \beta - 2 = \alpha - 3 \Rightarrow 2\alpha - \alpha = -3 - 1$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = -4}$; $\boxed{\beta = -5}$

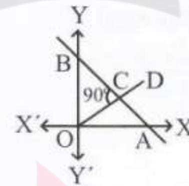
$\therefore R(-4, -5)$

$\therefore \Delta PQR$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(15 + 21 + 24)$ বর্গ একক

$= 30$ বর্গ একক **(Ans.)**

36.



[Ctg.B'19]

AB সরলরেখার সমীকরণ, $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

(গ) **AB ও OD** সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডক সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

গ. AB রেখার সমীকরণ: $y = -\frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow 2y = -3x + 6$

$\Rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$ ..... (i)

বা, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \therefore A(2,0)$ ও $B(0,3)$

OD রেখার সমীকরণ: $2x - 3y + k = 0$

যা, $O(0,0)$ গামী

$\therefore 2 \times 0 - 3 \times 0 + k = 0; k = 0$

$\therefore$ সমীকরণ $2x - 3y = 0$ ... ... (ii)

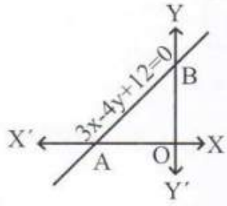
(i) ও (ii) এর অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ:

$\frac{3x+2y-6}{\sqrt{3^2+2^2}} = \pm \frac{2x-3y}{\sqrt{2^2+3^2}}$

(+) নিয়ে, $\frac{3x+2y-6}{\sqrt{13}} = \frac{2x-3y}{\sqrt{13}} = \boxed{x + 5y - 6 = 0}$

(−) নিয়ে, $\frac{3x+2y-6}{\sqrt{13}} = -\frac{2x-3y}{\sqrt{13}}$

$\Rightarrow 5x - y - 6 = 0$ **(Ans.)**

37. 

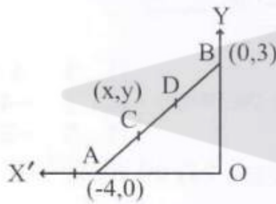
[SB'19]

(খ) **AB** রেখাংশের সমত্রিখণ্ডক বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দুর সংযোজক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. $3x - 4y + 12 = 0 \Rightarrow 3x - 4y = -12 \Rightarrow \frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 0$

$\therefore A(-4, 0)$ ও $B(0, 3)$



C ও D বিন্দু AB রেখাংশকে সমত্রিখণ্ডিত করে। অর্থাৎ, C বিন্দু AB কে 1: 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$x = \frac{1.0+2(-4)}{1+2} = -\frac{8}{3}$ এবং $y = \frac{1.3+2.0}{1+2} = 1$

$\therefore$ C বিন্দু $\left(-\frac{8}{3}, 1\right)$

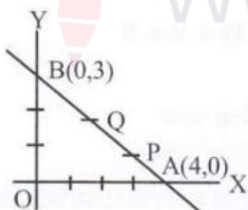
D, BC রেখার মধ্যবিন্দু

$\therefore$ D বিন্দুটি হল $\left(\frac{-\frac{8}{3}+0}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$ বা, $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$

A ও B এর সমত্রিখন্ডক বিন্দুদ্বয় হলো $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$ ও $\left(-\frac{8}{3}, 1\right)$

$\frac{y-0}{0-2} = \frac{3x}{4}$ $\therefore 3x + 2y = 0$

আবার, $\frac{y-0}{0-1} = \frac{3x}{8}$ $\therefore 3x + 8y = 0$ **(Ans.)**

38. 

[BB'19]

P এবং **Q** বিন্দু দুটি**AB** কে সমান তিনভাগ করে।

(খ) **OP** ও **OQ** সরলরেখার সমীকরণসমূহ নির্ণয় কর। 4

(গ) **PQ** সরলরেখার সমান্তরাল এবং $2\frac{2}{5}$ একক দূরবর্তী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. P এবং Q বিন্দু দুটিAB কে সমান তিনভাগ করে।

অর্থাৎ, AB কে P বিন্দুটি 1:2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $\left(\frac{1\times0+2\times4}{2+1}, \frac{1\times3+2\times0}{2+1}\right)$ বা $\left(\frac{8}{3}, 1\right)$

আবার, PB এর মধ্যবিন্দু Q.

$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{\frac{8}{3}+0}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$ বা $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$

OP এর সমীকরণ, $y = \frac{1}{\frac{8}{3}}x \Rightarrow 8y = 3x$

$\therefore 3x - 8y = 0$

OQ এর সমীকরণ, $y = \frac{2}{\frac{4}{3}}x \Rightarrow 2y = 3x$

$\therefore 3x - 2y = 0$ **(Ans.)**

গ. PQ সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

$\therefore 3x + 4y - 12 = 0$ ……………… (i)

ধরি, PQ এর উপর একটি বিন্দু (α, β)

$\therefore 3\alpha + 4\beta - 12 = 0$ ……………… (ii)

(i) নং এর সমান্তরাল যেকোনো রেখার সমীকরণ,

$3x + 4y + k = 0$ ……… (iii)

এখন, $\frac{|3\alpha+4\beta+k|}{\sqrt{9+16}} = 2\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{|12+k|}{5} = \frac{12}{5}$ [ii নং হতে]

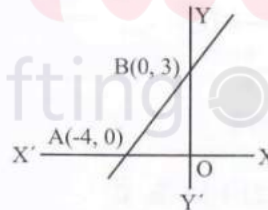
$\Rightarrow |12 + k| = 12$

এখন, '+' নিয়ে, $12 + k = 12$ $\therefore k = 0$

$\therefore 3x + 4y = 0$

আবার, '–' নিয়ে, $12 + k = -12$ $\therefore k = -24$

$\therefore 3x + 4y - 24 = 0$ **(Ans.)**

39. 

[JB'19]

(ক) $(-1, \sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

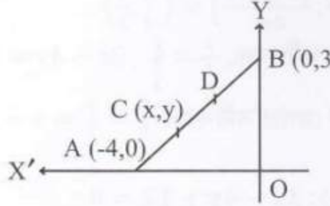
(খ) **AB** রেখার সমত্রিখণ্ডক বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূলবিন্দু যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

(গ) দুটি সরলরেখা $(-1, 2)$ বিন্দুগামী এবং **AB** রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 13 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ.



C ও D বিন্দু AB রেখাকে সমত্রিখণ্ডিত করে। অর্থাৎ, C বিন্দু AB কে 1: 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$x = \frac{1.0+2(-4)}{1+2} = -\frac{8}{3}$ এবং $y = \frac{1.3+2.0}{1+2} = 1$

$\therefore$ C বিন্দু $\left(-\frac{8}{3}, 1\right)$

D, BC রেখার মধ্যবিন্দু

$\therefore$ D বিন্দুটি হল $\left(\frac{-\frac{8}{3}+0}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$ বা, $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$

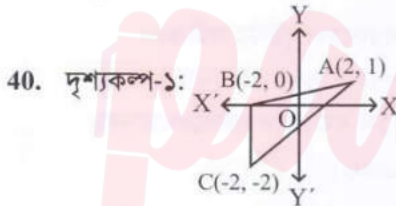
সমত্রিখণ্ডক বিন্দুদ্বয় $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$ ও $\left(-\frac{8}{3}, 1\right)$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & 2 \\ -\frac{8}{3} & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2} \times 4 = 2$ sq. unit (**Ans.**)

গ. 12 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

40. দৃশ্যকল্প-১: **[CB'19]**



(খ) **AB** ও **AC** এর অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. AB এর সমীকরণ, $\frac{y-1}{1-0} = \frac{x-2}{2+2} \Rightarrow 4y - 4 = x - 2$

$\therefore x - 4y + 2 = 0$

AC এর সমীকরণ, $\frac{y-1}{1+2} = \frac{x-2}{2+2} \Rightarrow 4y - 4 = 3x - 6$

$\therefore 3x - 4y - 2 = 0$

এখন, সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ, $\frac{x-4y+2}{\sqrt{17}} = \pm\frac{3x-4y-2}{5}$

$\Rightarrow 5x - 20y + 10 = \pm(3\sqrt{17}x - 4\sqrt{17}y - 2\sqrt{17})$

এখন, '+' নিয়ে পাই, $5x - 20y + 10$

$= 3\sqrt{17}x - 4\sqrt{17}y - 2\sqrt{17}$

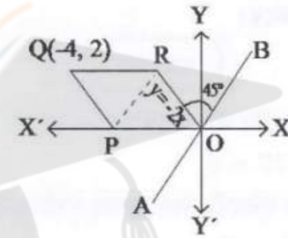
$\therefore (5 - 3\sqrt{17})x + (4\sqrt{17} - 20)y + (10 + 2\sqrt{17}) = 0$

আবার, '−' নিয়ে পাই, $5x - 20y + 10$

$= -3\sqrt{17}x + 4\sqrt{17}y + 2\sqrt{17}$

$\therefore (5 + 3\sqrt{17})x - (20 + 4\sqrt{17})y + (10 - 2\sqrt{17}) = 0$ (**Ans.**)

41. চিত্রে **OPQR** একটি সামান্তরিক **[Din.B'19]**



(খ) উদ্দীপক হতে **AB** সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপক হতে **PR** কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. $y = -2x$ হতে $m_1 = -2$

ধরি, AB সরলরেখার ঢাল m

$\therefore \pm\frac{(m-m_1)}{1+mm_1} = \tan 45° \Rightarrow \frac{m+2}{1-2m} = \pm 1$

$\therefore m = -\frac{1}{3}, 3$

চিত্র হতে পাই, $m \neq -\frac{1}{3}$ $\therefore m = 3$

$\therefore$ AB সরলরেখাটি $y = 3x$ (**Ans.**)

গ. QR সরলরেখার সমীকরণ $y = 2$; $y = 2$ হলে $y = -2x$ হতে $x = -1$

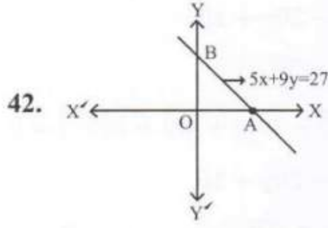
$\therefore$ R বিন্দুটি $(-1, 2)$; $O(0, 0)$ ও $Q(-4, 2)$ এর মধ্যবিন্দু$(-2, 1)$

ধরি, P বিন্দু (x_1, y_1) $\therefore \frac{x_1-1}{2} = -2$

$\Rightarrow x_1 = -3$; $\frac{y_1+2}{2} = 1$ $\therefore y_1 = 0$

$\therefore P(-3,0)$ ও $R(-1, 2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ:

$y - 0 = \frac{2-0}{-1+3}(x + 3) \Rightarrow y = x + 3$ (**Ans.**)

42. 

[All.B'18]

(ক) $(-4, -4)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

(খ) AB রেখার 4 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(5, 4)$ বিন্দুগামী এবং AB সরলরেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। 4

সমাধান

ক. 13 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $5x + 9y - 27 = 0$

ধরি, 4 একক দূরবর্তী সরলরেখার সমীকরণ

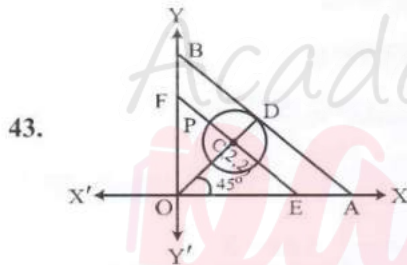
$5x + 9y + k = 0$

অর্থাৎ $\left|\frac{k+27}{\sqrt{5^2+9^2}}\right| = 4$

$\Rightarrow k + 27 = \pm 4\sqrt{106} \therefore k = \pm 4\sqrt{106} - 27$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $5x + 9y - 27 \pm 4\sqrt{106} = 0$ (Ans.)

গ. 12 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

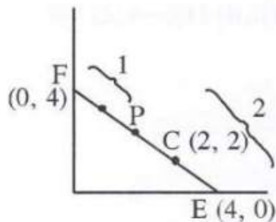
43. 

[All.B'18]

(খ) যদি P বিন্দু EF রেখাংশের সমত্রিখণ্ডক বিন্দুদ্বয়ের একটি বিন্দু হয় তবে OP রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ.



C, EF এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore E \equiv (2 \times 2, 0) = (4, 0)$

$F \equiv (0, 2 \times 2) = (0, 4)$

শর্তমতে, P বিন্দুটি, EF কে 2:1 অনুপাতে বা 1: 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore P \equiv \left(\frac{2\times0+1\times4}{2+1}, \frac{2\times4+1\times0}{2+1}\right) \equiv \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$ অথবা $P \equiv \left(\frac{1\times0+2\times4}{2+1}, \frac{1\times4+2\times0}{2+1}\right) \equiv \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$

OP রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{\frac{4}{3}} = \frac{y}{\frac{8}{3}}$; $8x - 4y = 0 \Rightarrow y = 2x$

অথবা OP রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{\frac{8}{3}} = \frac{y}{\frac{4}{3}} \Rightarrow x = 2y$ (Ans.)

44. দৃশ্যকল্প-১: $3x - 4y + 12 = 0$. [DB'17]

দৃশ্যকল্প-২: $8x + 15y - 12 = 0$

(খ) দৃশ্যকল্প-২: নং সরলরেখার সমান্তরাল 2 একক দূরবর্তী সরলরেখার মূলবিন্দু হতে লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-১ এবং দৃশ্যকল্প-২ সমীকরণদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের যে সমদ্বিখণ্ডক ও x অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে তার ঢাল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. $8x + 15y - 12 = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল এরূপ যেকোনো রেখার সমীকরণ, $8x + 15y + k = 0$ ... ... (i)

প্রশ্নমতে, প্রদত্ত সরলরেখা এবং তার সমান্তরাল সরলরেখা (1) এর মধ্যবর্তী দূরত্ব 2 একক।

অতএব, $\frac{|k+12|}{\sqrt{64+225}} = 2 \Rightarrow \frac{|k+12|}{17} = 2$

$\Rightarrow |k + 12| = 34 \Rightarrow k + 12 = \pm 34$

$\Rightarrow k = -46, 22$

সুতরাং, সমান্তরাল সরলরেখা দুইটির সমীকরণ

$8x + 15y - 46 = 0$ ও $8x + 15y + 22 = 0$

এখন মূলবিন্দু হতে ১ম সমান্তরাল সরলরেখার দূরত্ব

$= \frac{|0+0-46|}{17} = \frac{46}{17}$ একক।

এবং মূলবিন্দু হতে ২য় সমান্তরাল সরলরেখার দূরত্ব

$= \frac{|0+0+22|}{17} = \frac{22}{17}$ একক। (Ans.)

গ. $3x - 4y + 12 = 0$ I $8x + 15y - 12 = 0$

সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ

$\frac{(3x-4y+12)}{5} = \pm \frac{(8x+15y-12)}{17}$

(+) ও (−) চিহ্ন নিয়ে, সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ যথাক্রমে

$x - 13y + 24 = 0$ এবং $91x + 7y + 144 = 0$

১ম সমদ্বিখন্ডকের ঢাল $= \frac{1}{13}$ এবং ২য় সমদ্বিখন্ডকের ঢাল $= -\frac{91}{7}$ সুতরাং ১ম সমদ্বিখন্ডকটি x অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে। $\therefore$ নির্ণেয় ঢাল $= \frac{1}{13}$ (Ans.)

45. $A(2,4), B(3,1), C(4,5); 2x-y+2=0, x-2y+3=0$ **[RB'17]**

(ক) y-অক্ষ এবং (k, 4) বিন্দু থেকে A (2, 4) বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে k এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) C বিন্দু থেকে AB সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকের আলোকে রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. y অক্ষ থেকে (2, 4) বিন্দুর দূরত্ব = 2

(k, 4) বিন্দু থেকে (2, 4) বিন্দুর দূরত্ব

$=\sqrt{(k-2)^2+(4-4)^2}=\sqrt{k^2-4k+2^2+0}$

$=\sqrt{k^2-4k+4}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{k^2-4k+4}=2 \Rightarrow k^2-4k+4=4$

$\Rightarrow k^2-4k=0 \Rightarrow k(k-4)=0$

$\therefore k=0,4$ **(Ans.)**

খ. 15 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

গ. $2x-y+2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$x-2y+3=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii) এর মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডকদ্বয়ের সমীকরণ, $\frac{2x-y+2}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\pm\frac{x-2y+3}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$

$\Rightarrow \frac{2x-y+2}{\sqrt{5}}=\pm\frac{x-2y+3}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow 2x-y+2=\pm(x-2y+3) \ldots\ldots\ldots (iii)$

এখানে, $a_1a_2+b_1b_2=2.1+(-1)(-2)$

$=2+2=4>0$

$\therefore$ (iii) এর ডানপক্ষে (−) নিলে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক পাওয়া যাবে।

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক, $2x-y+2=-(x-2y+3)$

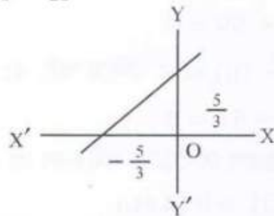
$\Rightarrow 2x-y+2=-x+2y-3$

$\Rightarrow 3x-3y+5=0 \Rightarrow 3x-3y=-5$

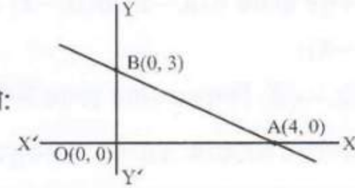
$\Rightarrow \frac{3x}{-5}-\frac{3y}{-5}=1 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{5}{3}}+\frac{y}{\frac{5}{3}}=1$

$\therefore$ অক্ষদ্বয়ের সাথে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$=\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}=\frac{25}{18}$ বর্গ একক। **(Ans.)**



46. দৃশ্যকল্প: **[Ctg.B'17]**



(ক) (3, 5) ও (6, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্ব দ্বিখণ্ডকের ঢাল নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্পের আলোকে AB রেখা হতে 3 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয়কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্পের মূলবিন্দু ও AB রেখাংশের সমত্রিখণ্ডন বিন্দুদ্বয় যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. (3, 5) ও (6, 7) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $\frac{x-3}{3-6}=\frac{y-5}{5-7}$

$\Rightarrow \frac{x-3}{-3}=\frac{y-5}{-2} \Rightarrow 2x-6=3y-15$

$\Rightarrow 2x-3y+9=0$ এর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$3x+2y+k=0 \quad \therefore$ ঢাল $=-\frac{3}{2}$ **(Ans.)**

খ. AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1 \Rightarrow 3x+4y=12$

$\Rightarrow 3x+4y-12=0$ এর সমান্তরাল রেখার সমীকরণ,

$3x+4y+k=0$

শর্তমতে, $\frac{|k+12|}{\sqrt{(3)^2+4^2}}=3 \Rightarrow \frac{|k+12|}{\sqrt{25}}=3 \Rightarrow \frac{|k+12|}{5}=3$

$\Rightarrow |k+12|=15 \Rightarrow k+12=\pm15$

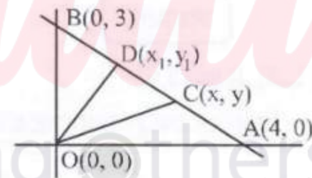
(+) চিহ্ন নিয়ে, $k=3$

(−) চিহ্ন নিয়ে, $k=-27$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $3x+4y+3=0$

$3x+4y-27=0$ **(Ans.)**

গ.



ধরি, সমত্রিখণ্ডন বিন্দুদ্বয়, C(x, y) এবং $D(x_1, y_1)$ C বিন্দুটি AB কে 1:2 অনুপাতে অন্তঃবিভক্ত করে।

$C\left(\frac{1\times0+2\times4}{1+2},\frac{1\times3+2\times0}{1+2}\right)\equiv C\left(\frac{8}{3},1\right)$

আবার, D বিন্দুটি BC এর মধ্যবিন্দু।

$D\left(\frac{0+8/3}{2},\frac{3+1}{2}\right)\equiv D\left(\frac{4}{3},2\right)$

ΔOCD এর ক্ষেত্রফল, $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&0&1\\\frac{8}{3}&1&1\\\frac{4}{3}&2&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\frac{8}{3}&1\\\frac{4}{3}&2\end{vmatrix}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{16}{3}-\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{12}{3}=\frac{1}{2}\times4=2$ বর্গ একক। **(Ans.)**

47. তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(a,-1), B(0,-2)$ এবং $C(-2,-4)$। **[SB'17]**

(ক) $(-2,-\sqrt{2})$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপকের আলোকে AB এর মধ্যবিন্দুর ভুজ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ হলে, C বিন্দুগামী AB-এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 13 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $\therefore \frac{a+0}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}; \therefore a=\sqrt{5}$

$(\sqrt{5},-1)$& $(0,-2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$\frac{x-\sqrt{5}}{0-\sqrt{5}}=\frac{y+1}{-2+1} \Rightarrow x-\sqrt{5}\,y-2\sqrt{5}=0$

উক্ত রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ $\sqrt{5}\,x+y+k=0$ যা $(-2,-4)$ বিন্দুগামী।

$\therefore k=2\sqrt{5}+4$ $\therefore$ সরলরেখার সমীকরণ

$\sqrt{5}\,x+y+2\sqrt{5}+4=0$ **(Ans.)**

48. দৃশ্যকল্প ১: $x-2y+1=0$ **[BB'17]**

(ক) (1, 2) এবং (3, 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে যে বিন্দু 2:3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ দ্বারা প্রকাশিত সরলরেখার সহিত 45° কোণ উৎপন্ন করে এবং (1, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এরূপ দুটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. ধরি, $A\equiv(1,2), B\equiv(3,6)$

ধরি, $D(x,y)$ বিন্দু AB কে 2:3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করেছে।

$\therefore x=\frac{2.3+3.1}{2+3}=\frac{6+3}{5}=\frac{9}{5}$ এবং $y=\frac{2.6+3.2}{2+3}$

$=\frac{12+6}{5}=\frac{18}{5}$ $\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $\left(\frac{9}{5},\frac{18}{5}\right)$ **(Ans.)**

খ. (1, 2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$y-2=m(x-1)$ ....(i)

প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ, $x-2y+1=0$

$\Rightarrow 2y=x+1 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ ......(ii)

ধরি, (i) এর ঢাল, $m_1=m$ ও (ii) এর ঢাল, $m_2=\frac{1}{2}$

প্রশ্নমতে, (i) ও (ii) নং রেখার মধ্যবর্তী কোণ 45°

$\therefore \tan 45°=\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} \Rightarrow 1=\pm\left(\frac{m-\frac{1}{2}}{1+m.\frac{1}{2}}\right)$

$\Rightarrow 1=\pm\left(\frac{\frac{2m-1}{2}}{\frac{2+m}{2}}\right) \Rightarrow 1=\pm\left(\frac{2m-1}{2+m}\right)$ ......(iii)

ডানপক্ষে '+' নিয়ে পাই, $1=\frac{2m-1}{2+m}$

$\Rightarrow 2m-1=2+m \therefore m=3$

আবার, ডানপক্ষে '−' নিয়ে পাই, $1=-\left(\frac{2m-1}{2+m}\right)$

$\Rightarrow 2+m=-2m+1$

$\Rightarrow 3m=-1 \Rightarrow m=-\frac{1}{3}$

$M=3$, (i) নং এ বসিয়ে পাই, $y-2=3(x-1)$

$\Rightarrow y-2=3x-3$

$\Rightarrow y-2-3x+3=0 \Rightarrow 3x-y-1=0$

এবং $m=-\frac{1}{3}$, (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$y-2=-\frac{1}{3}(x-1)$

$\Rightarrow 3y-6=-x+1 \Rightarrow x+3y-7=0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণদ্বয়, $3x-y-1=0$

ও $x+3y-7=0$ **(Ans.)**

49. দৃশ্যকল্প-২: $4x-3y-7=0$. **[BB'17]**

(গ) দৃশ্যকল্প ২ দ্বারা বর্ণিত রেখাটির সমান্তরাল রেখাগুলোর সমীকরণ নির্ণয় কর যাদের দূরত্ব (1, 2) বিন্দু হতে $5\frac{1}{2}$ একক। 4

সমাধান

গ. $4x-3y-7=0$ ...... (i) রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ - $4x-3y+k=0$ .... (ii)

(1, 2) বিন্দু থেকে (ii) নং রেখার লম্ব দূরত্ব

$=\left|\frac{4.1-3.2+k}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right|=\left|\frac{4-6+k}{\sqrt{16+9}}\right|=\left|\frac{k-2}{\sqrt{25}}\right|=\left|\frac{k-2}{5}\right|$

প্রশ্নমতে, $\left|\frac{k-2}{5}\right|=\frac{11}{2} \Rightarrow \frac{k-2}{5}=\pm\frac{11}{2} \Rightarrow 2k-4=\pm 55$

$\Rightarrow 2k=\pm 55+4 \Rightarrow k=\frac{\pm 55+4}{2}$ .... (iii)

(iii) এর ডানপক্ষে ' + ' নিয়ে পাই, $k=\frac{55+4}{2}=\frac{59}{2}$

এবং ডানপক্ষে ' − ' নিয়ে পাই, $k=\frac{-55+4}{2}=\frac{-51}{2}$

$K=\frac{59}{2}$, (ii) নং এ বসিয়ে পাই, $4x-3y+\frac{59}{2}=0$

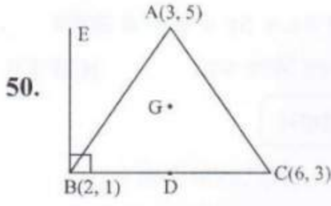
$\Rightarrow 8x-6y+59=0$

এবং $k=\frac{-51}{2}$, (ii) নং এ বসিয়ে পাই, $4x-3y-\frac{51}{2}=0$

$\Rightarrow 8x-6y-51=0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের সমীকরণ $8x-6y+59=0$

$8x-6y-51=0$ **(Ans.)**

50. 

[JB'17]

চিত্রে: **G**, **ΔABC**এর ভরকেন্দ্র; **D**, **BC** এর মধ্যবিন্দু, **EB⊥BC**

(ক) **ΔABC** এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 2

(খ) দেখাও যে, **G** বিন্দুটি **AD** রেখাকে **2: 1** অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। 4

(গ) **∠EBC** কোণের সমদ্বিখন্ডক রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. Δ ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(3+6+30-9-6-10)$ বর্গ একক

$= \left(\frac{1}{2}\times 14\right)$ বর্গ একক $= 7$ বর্গ একক **(Ans.)**

খ. G এর স্থানাংক $\left(\frac{3+6+2}{3}, \frac{5+3+1}{3}\right) \equiv \left(\frac{11}{3}, 3\right)$

D এর স্থানাংক $\equiv \left(\frac{2+6}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \equiv (4,2)$

$\therefore AG = \sqrt{\left(3-\frac{11}{3}\right)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{\frac{40}{9}}$

$\therefore GD = \sqrt{\left(\frac{11}{3}-4\right)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{\frac{10}{9}}$

$\therefore AG : GD = \sqrt{\frac{40}{9}} : \sqrt{\frac{10}{9}} = 2:1$

$\therefore$ G বিন্দু AD কে 2: 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। **(Showed)**

গ. BC এর সমীকরণ, $\frac{y-3}{1-3} = \frac{x-6}{2-6} \Rightarrow 2y-6 = x-6$

$\therefore x - 2y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$\therefore$ BE এর সমীকরণ, $2x + y = 0$

$2\times 2 + 1 + k = 0$ [(2,1) বিন্দুগামী।

$\Rightarrow k = -5 \quad \therefore 2x + y - 5 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii) এর অন্তর্ভুক্ত কোনদ্বয়ের সমদ্বিখন্ডক

$\frac{x-2y}{\sqrt{1^1+(-2)^2}} = \pm\frac{2x+y-5}{\sqrt{(2)^2+(1)^2}}$

$x - 2y = \pm(2x + y - 5)$

$(+) \Rightarrow x - 2y = 2x + y - 5$

$\therefore x + 3y - 5 = 0 \rightarrow$ **(Ans.)**

$(-) \Rightarrow x - 2y = -2x - y + 5$

$\therefore 3x - y - 5 = 0 \rightarrow$ **(Ans.)**

51. $\mathbf{5x - 4y - 1 = 0}$ ও $\mathbf{-8x + 7x + 1 = 0}$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু স্টেশনমাস্টারের কক্ষে অবস্থিত। **[CB'17]**

$\mathbf{4x + 3y - 5 = 0}$ রেখা বরাবর রেলপথের একটি লাইন অবস্থিত।

(ক) $(-1, 2)$ ও $(3, -5)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) স্টেশনমাস্টারের কক্ষ বিন্দু হতে রেললাইনের উপর অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) রেললাইনের সাথে $\mathbf{3x - 4y + 6 = 0}$ রেখা দ্বারা উৎপন্ন সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $(-1, 2)$ ও $(3, -5)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$\frac{x-(-1)}{-1-3} = \frac{y-2}{2-(-5)}$

$\Rightarrow \frac{x+1}{-4} = \frac{y-2}{2+5} \Rightarrow \frac{x+1}{-4} = \frac{y-2}{7}$

$\Rightarrow 7x + 7 = -4y + 8 \Rightarrow 7x + 4y - 1 = 0$ **(Ans.)**

খ. $5x - 4y - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

$-8x + 7y + 1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii) থেকে বজ্রগুণনের নিয়মে পাই, $\frac{x}{-4+7}$

$= \frac{y}{8-5} = \frac{1}{35-32}$

$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{3} = \frac{1}{3} \therefore x = \frac{3}{3} = 1$ এবং $y = \frac{3}{3} = 1$

$\therefore$ ছেদবিন্দু $= (1, 1)$

এখন, $4x + 3y - 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$3x - 4y + k = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$,

যা (1,1) বিন্দুগামী।

$\therefore$ সিদ্ধ করে পাই, $3.1 - 4.1 + 1 = 0$

$\Rightarrow 3 - 4 + k = 0 \Rightarrow k = 1$

k এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই নির্ণেয় লম্ব রেখার সমীকরণ, $3x - 4y + 1 = 0$ **(Ans.)**

গ. $4x + 3y - 5 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

এবং $3x - 4y + 6 = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

এখানে, $a_1 = 4, b_1 = 3$

$a_2 = 3, b_2 = -4 \therefore a_1a_2 + b_1b_2 = 12 - 12 = 0$

যেহেতু, $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

অতএব (i) ও (ii) নং রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব এবং এদের অন্তর্গত কোণগুলো সমকোণ।

∴ সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখন্ডক নেই। **(Ans.)**

52. (ক) মূলবিন্দুগামী যে রেখা $2x + 5y + 6 = 0$ রেখার উপর লম্ব তার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[CB'17]**

সমাধান

ক. $2x + 5y + 6 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$ রেখার উপর লম্ব সমীকরণ,

$5x - 2y + k = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$, যা $(0, 0)$ বিন্দুগামী।

∴ সিদ্ধ করে পাই, $5.0 - 2.0 + k = 0 \Rightarrow k = 0$

k এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $5x - 2y = 0$

যা নির্ণেয় লম্বরেখার সমীকরণ। **(Ans.)**

CQ: সম্ভাব্য প্রশ্ন ও সমাধান

01. $4x - 3y + 12 = 0$ এবং $3x + 4y - 9 = 0$ দুইটি সরলরেখা।

(ক) রেখা দুইটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। 2

(খ) সরলরেখাদ্বয়ের অন্তঃস্থ কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু এবং $3x + 4y - 19 = 0$ এর উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = \pm\tan^{-1}\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2}$

$= \pm\tan^{-1}\frac{-9-16}{12-12} = 90°$

খ. অন্তঃ স্থ কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ, $\frac{4x-3y+12}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$

$= \pm\frac{3x+4y-9}{\sqrt{3^2+4^2}}$

(+) নিয়ে পাই, $\frac{4x-3y+12}{5} = \frac{3x+4y-9}{5}$

$\Rightarrow 4x - 3y + 12 = 3x + 4y - 9$

$\Rightarrow x - 7y + 21 = 0$

আবার, (−) নিয়ে পাই, $\frac{4x-3y+12}{5} = -\frac{3x+4y-9}{5}$

$\Rightarrow 4x - 3y + 12 = -3x - 4y + 9$

$\therefore 7x + y + 3 = 0$

গ. $4x - 3y + 12 = 0$

$3x + 4y - 9 = 0$

রেখা দুটির ছেদবিন্দু $\left(-\frac{21}{25}, \frac{72}{25}\right)$

$\left(-\frac{21}{25}, \frac{72}{25}\right)$ বিন্দুগামী এবং $3x + 4y - 19 = 0$ এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$4x - 3y = 4 \times \left(-\frac{21}{25}\right) - 3\left(\frac{72}{25}\right)$

$\therefore 4x - 3y + 12 = 0$

02. তোমাদের কলেজের গণিত বিষয়ের একজন শিক্ষক ক্লাসে শিক্ষার্থীদের প্রশ্ন করলেন দুইটি সরলরেখা কখন লম্ব হয়? একজন শিক্ষার্থী দাড়িয়ে সঠিক উত্তর দিল। অতঃপর শিক্ষক শ্রেণিতে $L_1: x\cos\theta + y\sin\theta = p$ (রেখাটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে) ও $L_2: x + 7y + 5 = 0$ সরলরেখা দুইটির উপর বিশ্লেষণমূলক বাড়ির কাজ দিলেন।

(ক) $ax + 3y + 1 = 0$ ও $2x - 3by + 2 = 0$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত নির্ণয় কর। 2

(খ) θ কে পরিবর্তনশীল ধরে AB এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) যদি $\theta = 45°$ এবং $p = 2\sqrt{2}$ হয়, তবে দেখাও যে, L_1 ও L_2 রেখাদ্বয়ের অন্তর্বর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব। 4

সমাধান

ক. $m_1 = -\frac{a}{3}; m_2 = \frac{2}{3b} \therefore m_1 \times m_2 = -1$

$\Rightarrow \frac{-a}{3} \times \frac{2}{3b} = -1 \Rightarrow a = \frac{9b}{2}$

∴ নির্ণেয় শর্ত $a = \frac{9b}{2}$

খ. প্রদত্ত সমীকরণ, $x\cos\theta + y\sin\theta = p$

$\Rightarrow \frac{x}{\frac{p}{\cos\theta}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin\theta}} = 1$

A বিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{p}{\cos\theta}, 0\right)$

B বিন্দুর স্থানাংক $\left(0, \frac{p}{\sin\theta}\right)$

AB এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{p}{2\cos\theta}, \frac{p}{2\sin\theta}\right)$

∴ মধ্যবিন্দুর ভুজ $x = \frac{p}{2\cos\theta}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{p}{2x}$ ……… (i)

কোটি $y = \frac{p}{2\sin\theta} \Rightarrow \sin\theta = \frac{p}{2y}$ ………… (ii)

$(i)^2 + (ii)^2$ হতে পাই, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \frac{p^2}{4x^2} + \frac{p^2}{4y^2}$

$\Rightarrow 1 = \frac{p^2}{4}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$

$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{4}{p^2} \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{x^2y^2} = \frac{4}{p^2} \Rightarrow p = \pm\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ইহাই নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

গ. $L_1: x\cos 45° + y\sin 45° = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow x + y = 4$ …… (i)

$\therefore x + y - 4 = 0$

$L_2: x + 7y + 5 = 0$ …… (ii)

(i) ও (ii) এর অন্তবর্তী কোণের সমদ্বিখকের সমীকরণ,

$\frac{x+y-4}{\sqrt{1+1}} = \pm\frac{x+7y+5}{\sqrt{1+7^2}}$

(+) নিয়ে পাই, $\frac{x+y-4}{\sqrt{2}} = \frac{x+7y+5}{\sqrt{50}}$

$\Rightarrow 5x + 5y - 20 = x + 7y + 5$

$\therefore 4x - 2y - 25 = 0$

ঢাল, $m_1 = \frac{4}{2} = 2$

আবার, (−) নিয়ে পাই, $\frac{x+y-4}{\sqrt{2}} = -\frac{x+7y+5}{\sqrt{50}}$

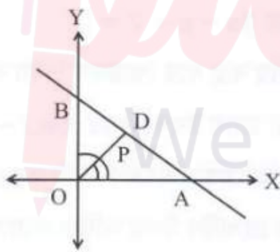
$\Rightarrow 5x + 5y - 20 = -x - 7y - 5$

$\therefore 6x + 12y - 15 = 0$

ঢাল, $m_2 = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$

$m_1 \times m_2 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

$\therefore$ সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব **(Showed).**

03. 

$\angle AOD = 2\alpha, OD \perp AB$

(ক) $\alpha = 15°$ এবং $P = 1$ একক হলে $(\sqrt{3}, 5)$ বিন্দু হতে AB এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর। 2

(খ) দেখাও যে, AB এর মধ্য বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হবে $P^2(x^2+y^2) = 4x^2y^2$. 4

(গ) $\Delta OAB = 16\sqrt{3}$ বর্গ একক এবং $\alpha = 30°$ হলে, AB রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\alpha = 15°$ এবং $p = 1$ হলে, AB এর সমীকরণ,

$x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha = p$

$\Rightarrow x\cos 30° + y\sin 30° = 1 \Rightarrow x\frac{\sqrt{3}}{2} + y\frac{1}{2} = 1$

$\Rightarrow \sqrt{3}x + y = 2$

$(\sqrt{3}, 5)$ বিন্দু হতে AB এর লম্ব দূরত্ব,

$d = \left|\frac{(\sqrt{3}.\sqrt{3}+5-2)}{\sqrt{3+1}}\right| = \left|\frac{6}{2}\right| = 3$

খ. AB এর সমীকরণ, $x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha = p$

$\Rightarrow \frac{x}{\frac{p}{\cos 2\alpha}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin 2\alpha}} = 1$

A বিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{p}{\cos 2\alpha}, 0\right)$

B এর স্থানাংক $\left(0, \frac{p}{\sin 2\alpha}\right)$

AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{p}{2\cos 2\alpha}, \frac{p}{2\sin 2\alpha}\right)$

ভুজ $x = \frac{p}{2\cos 2\alpha} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{p}{2x}$ ……… (i)

কোটি, $y = \frac{p}{2\sin 2\alpha} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{p}{2y}$ ……… (ii)

$(i)^2 + (ii)^2$ হতে পাই, $1 = \frac{p^2}{4x^2} + \frac{p^2}{4y^2}$

$\therefore p^2(x^2+y^2) = 4x^2y^2$ **(Showed)**

গ. $\alpha = 30°$ হলে AB এর সমীকরণ,

$x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha = p$

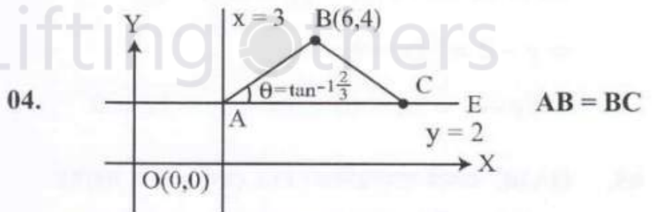
$\Rightarrow x\cos 60° + y\sin 60° = p \Rightarrow x\frac{1}{2} + y\frac{\sqrt{3}}{2} = p$

$\Rightarrow x + \sqrt{3}y = 2p$ …. (i) $\Rightarrow \frac{x}{2p} + \frac{y}{\frac{2p}{\sqrt{3}}} = 1$

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2} \times 2p \times \frac{2p}{\sqrt{3}} = 16\sqrt{3}$

$\Rightarrow p^2 = 8 \times 3 = 24 \therefore p = \sqrt{24}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{24}$

04. 

AB = BC

(ক) x ও y অক্ষের সাপেক্ষে B বিন্দুর প্রতিচ্ছবি নির্ণয় কর। 2

(খ) BC রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) AC যদি কোনো রম্বসের কর্ণ এবং AB ও BC ঐ রম্বসের দুইটি বাহু হয় তবে রম্বসের অপর বাহুদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. y অক্ষের সাপেক্ষে B বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $(-6,4)$

x অক্ষের সাপেক্ষে B বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $(6,-4)$

খ. যেহেতু $AB = BC$, সেহেতু $\angle BAC = \angle BCA = \tan^{-1}\frac{2}{3}$

$\therefore \angle BCE = 180 - \tan^{-1}\frac{2}{3}$

BC রেখার ঢাল $m = \tan\left(180 - \tan^{-1}\frac{2}{3}\right)$

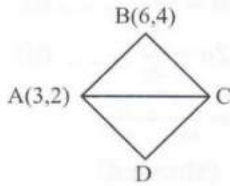
$= -\tan\tan^{-1}\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$

$\therefore$ BC রেখার সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y - 4 = -\frac{2}{3}(x - 6)$

$\Rightarrow 3y - 12 = -2x + 12 \therefore 2x + 3y - 24 = 0$

গ.



C বিন্দুর কোটি $= 2$

$2x + 3.2 - 24 = 0 \Rightarrow 2x = 18 \Rightarrow x = 9$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাংক $(9,2)$

AD রেখার সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$Y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 3) \Rightarrow 3y - 6 = -2x + 6$

$\therefore 2x + 3y - 12 = 0$

CD রেখার সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y - 2 = \frac{2}{3}(x - 9)$

$\Rightarrow 3y - 6 = 2x - 18 \therefore 2x - 3y - 12 = 0$

05. **OABC** একটি সামান্তরিক। **OA** রেখা **x** অক্ষ বরাবর অবস্থিত। **OC** রেখার সমীকরণ $y = 2x$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4,2)।

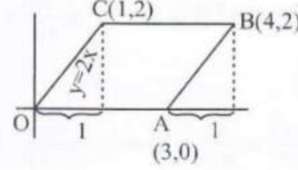
(ক) C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

(খ) AC কর্ণের সমীকরণ ও তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

(গ) OB কর্ণের দৈর্ঘ্য এবং OABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক.



$y = 2 \therefore x = 1 \therefore$ C বিন্দুর স্থানাংক $(1,2)$

খ. A বিন্দুর স্থানাংক $(3,0)$ [চিত্র থেকে]

AC কর্ণের সমীকরণ, $\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} \Rightarrow \frac{x-1}{1-3} = \frac{y-2}{2-0}$

$\Rightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow x - 1 = -y + 2$

$\Rightarrow x + y - 3 = 0 \therefore x + y - 3 = 0$

দৈর্ঘ্য, $AC = \sqrt{(1-3)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$

গ. OB কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(0-4)^2 + (0-2)^2}$

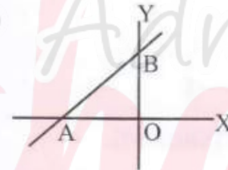
$= \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

OABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}[0 + 6 + 8 + 0 - 0 - 0 - 2 - 0]$

$= \frac{1}{2}[14 - 2] = 6$ বর্গ একক।

06.



AB রেখাংশের সমীকরণ $3x - y + 7 = 0$

(ক) **AB** রেখাংশকে বর্গের বাহু ধরে ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **2**

(খ) রেখাটির সাথে **45°** কোণ উৎপন্ন করে এবং $(-1,2)$ বিন্দুগামী এরূপ রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) $(2,-1)$ বিন্দু হতে রেখাটির উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $3x - y + 7 = 0 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{7}{3}} + \frac{y}{7} = 1$

ক্ষেত্রফল $= \left(-\frac{7}{3}\right)^2 + (7)^2 = \frac{49}{9} + 49$

$= \frac{49+441}{9} = \frac{490}{9}$ বর্গ একক।

খ. প্রদত্ত রেখার সমীকরণ, $3x - y + 7 = 0 \Rightarrow y = 3x + 7$

x অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ $(\tan^{-1} 3)$

প্রদত্ত রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে এমন রেখার ঢাল, $m = \tan(\tan^{-1} 3 \pm 45°) = -2$ অথবা, $\frac{1}{2}$

$\therefore$ একটি রেখার সমীকরণ, $y - 2 = -2(x + 1)$

$\Rightarrow y - 2 = -2x - 2 \therefore 2x + y = 0$

অপর রেখার সমীকরণ, $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1)$

$\Rightarrow 2y - 4 = x + 1 \therefore x - 2y + 5 = 0$

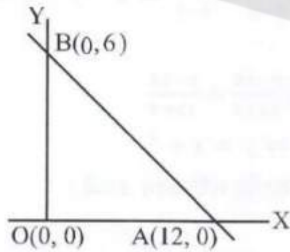
গ. $(2, -1)$ বিন্দুগামী এবং $3x - y + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ,

$x + 3y = 2 - 3 \Rightarrow x + 3y + 1 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

আবার দেওয়া আছে, $3x - y + 7 = 0 \ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দু $\left(-\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$

07.



(ক) AB রেখার ঢাল নির্ণয় কর। 2

(খ) AB রেখার সমান্তরাল এবং 2 একক দূরবর্তী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

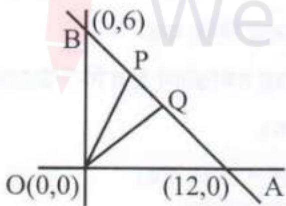
(গ) AB রেখাংশের সমত্রিখন্ডক বিন্দু এবং মূল বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. ঢাল, $m = \frac{6-0}{0-12} = -\frac{1}{2}$

খ. বোর্ড প্রশ্ন 07 (খ) এর অনুরূপ।

গ.



P বিন্দুর স্থানাংক $= \left(\frac{0+12}{2+1}, \frac{0+12}{1+2}\right) = (4,4)$

Q বিন্দুর স্থানাংক $= \left(\frac{24+0}{2+1}, \frac{0+6}{2+1}\right) = (8,2)$

OP রেখার সমীকরণ $\frac{x}{4} = \frac{y}{4} \Rightarrow 4x - 4y = 0$

$\therefore x - y = 0$

OQ রেখার সমীকরণ $\frac{x}{8} = \frac{y}{2} \Rightarrow x = 4y \therefore x - 4y = 0$

08. ΔABC এর বাহুগুলির মধ্যবিন্দু $D(-1, -1), E(3, 1)$ এবং $F(0, 3)$।

(ক) DE রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) ক্ষেত্রফলের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC = 4\Delta DEF$. 4

(গ) ΔABC এর লম্বকেন্দ্র নির্ণয় কর। 4

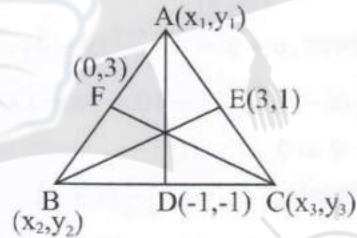
সমাধান

ক. DE রেখার সমীকরণ, $\frac{y+1}{-1-1} = \frac{x+1}{-1-3}$

$\Rightarrow -4y - 4 = -2x - 2$

$\Rightarrow 2x - 4y - 2 = 0 \Rightarrow x - 2y - 1 = 0$

খ.



$\frac{x_1+x_2}{2} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \cdots\cdots (i)$

$\frac{x_2+x_3}{2} = -1 \Rightarrow x_2 + x_3 = -2 \cdots\cdots (ii)$

$\frac{x_3+x_1}{2} = 3 \Rightarrow x_3 + x_1 = 6 \cdots\cdots (iii)$

$\frac{y_1+y_2}{2} = 3 \Rightarrow y_1 + y_2 = 6 \cdots\cdots (iv)$

$\frac{y_2+y_3}{2} = -1 \Rightarrow y_2 + y_3 = -2 \cdots\cdots (v)$

$\frac{y_3+y_1}{2} = 1 \Rightarrow y_3 + y_1 = 2 \cdots\cdots (vi)$

$(i) - (ii) \Rightarrow x_1 - x_3 = 2 \cdots\cdots (vii)$

$(vii) + (iii) \Rightarrow 2x_1 = 8 \Rightarrow x_1 = 4$

$x_3 = 2$

$x_2 = -4$

আবার, $(iv) - (v) \Rightarrow y_1 - y_3 = 8 \cdots\cdots (viii)$

$(viii) + (vi) \Rightarrow 2y_1 = 10 \Rightarrow y_1 = 5$

$y_3 = -3$

$y_2 = 1$

$\therefore A(+4,5), B(-4,1), C(2,-3)$

$\therefore \Delta$ ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{4(1+3) - 5(-4-2) + 1(12-2)\}$

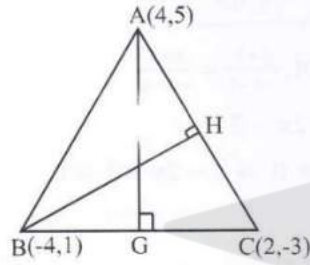
$= \frac{1}{2}\{16 + 30 + 10\} = 28$

এবং ΔDEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(2 + 3 + 9) = 7 = \frac{28}{4} = \frac{\Delta ABC}{4}$

$\therefore \Delta ABC = 4\ \Delta DEF$ **(Proved)**

গ.



AG রেখার সমীকরণ, $y - 5 = -\frac{-4-2}{1+3}(x - 4)$

$\Rightarrow y - 5 = \frac{6}{4}(x - 4) \Rightarrow 2y - 10 = 3x - 12$

$\Rightarrow 3x - 2y - 2 = 0 \ldots\ldots (i)$

BH রেখার সমীকরণ, $y - 1 = -\frac{4-2}{5+3}(x + 4)$

$\Rightarrow y - 1 = -\frac{2}{8}(x + 4) \Rightarrow 4y - 4 = -x - 4$

$x + 4y = 0 \cdots\cdots (ii)$

(i) ও (ii) নং সরলরেখার ছেদবিন্দু $\left(\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}\right)$

$\therefore$ নির্ণেয় লম্ব কেন্দ্র $\left(\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}\right)$

09. বুয়েটের **EEE, CSE, ME, CE** বিভাগের অবস্থান যথাক্রমে $A(4,5), B(-4,-3), C(5,6)$ এবং $D(x,y)$ বিন্দুতে।

(ক) BC এর লম্বদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) ABCD একটি সামান্তরিক হলে উহার D বিন্দুর স্থানাঙ্ক বের কর। 4

(গ) প্রমাণ কর, ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ একই। 4

সমাধান

ক. BC এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

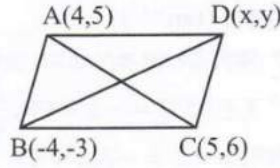
BC এর লম্বদ্বিখ কের সমীকরণ, $y - y_1$

$= -\frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3}(x - x_1)$

$\Rightarrow y - \frac{3}{2} = -\frac{-4-5}{-3-6}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y - \frac{3}{2} = -\frac{9}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow 2y - 3 = -2x + 1 \Rightarrow 2x + 2y - 4 = 0 \therefore x + y - 2 = 0$

খ.



AC কর্ণের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক, $(x_1, y_1) = \left(\frac{4+5}{2}, \frac{5+6}{2}\right)$

$= \left(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right)$

BD কর্ণের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক, $(x_2, y_2) = \left(\frac{x-4}{2}, \frac{y-3}{2}\right)$

শর্তমতে, $\frac{x-4}{2} = \frac{9}{2}$ এবং $\frac{y-3}{2} = \frac{11}{2}$

$\Rightarrow x = 13$ এবং $y = 14$

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(13,14)$

গ. AC কর্ণের সমীকরণ, $\frac{y-5}{5-6} = \frac{x-4}{4-5} \Rightarrow x - y + 1 = 0$

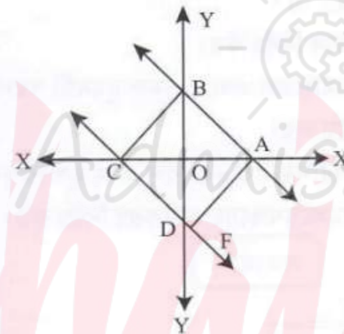
$\Rightarrow y = x + 1$

BD কর্ণের সমীকরণ, $\frac{y-14}{14+3} = \frac{x-13}{13+4}$

$\Rightarrow x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1$

সুতরাং, AC ও BD কর্ণের সমীকরণ একই।

10.



চিত্রে **AB** এর সমীকরণ $3x + 4y = 12$ এবং **CD** এর সমীকরণ, $2x + 3y + 6 = 0$ এবং $AF \perp CD$ |

(ক) **A** ও **B** বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

(খ) **AB** ও **CD** রেখাদ্বয় সমান্তরাল হবে কি? উত্তরের সাপেক্ষে যুক্তি দাও। 4

(গ) **ABCF** এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, AB সরলরেখার সমীকরণ $3x + 4y = 12$

$\Rightarrow \frac{3x}{12} + \frac{4y}{12} = 1 \therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4,0)$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0,3)$

(Ans.)

খ. AB সরলরেখার সমীকরণ, $3x + 4y = 12$

$\Rightarrow y = \frac{12-3x}{4} \therefore y = -\frac{3}{4}x + 3$

$\therefore$ AB সরলরেখার ঢাল $m_1 = -\frac{3}{4}$

CD সরলরেখার সমীকরণ $2x + 3y + 6 = 0$

$\Rightarrow 3y = -2x - 6 \Rightarrow y = \frac{-2x-6}{3}$

$\therefore y = -\frac{2}{3}x - 2 \therefore$ CD রেখার ঢাল $m_2 = -\frac{2}{3}$

$\therefore m_1 \neq m_2$

সুতরাং AB ও CD সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল নয়।

গ. CD রেখার সমীকরণ $2x + 3y + 6 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$\Rightarrow 2x + 3y = -6 \Rightarrow \frac{2x}{-6} + \frac{3y}{-6} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-3,0)$

CD রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ $3x - 2y + k = 0$

যেখানে k একটি ধ্রুবক যেহেতু রেখাটি A(4,0) বিন্দুগামী।

$\therefore 3.4 - 2.0 + k = 0 \Rightarrow 12 - 0 + k = 0$

$\therefore k = -12$

$\therefore$ CD রেখার লম্বরেখার সমীকরণ,

$3x - 2y - 12 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $\frac{x}{3(-12)-(-2)6}$

$= \frac{y}{3(6)-2(-12)} = \frac{1}{2(-2)-3.3}$

$\Rightarrow \frac{x}{-36+12} = \frac{y}{18+24} = \frac{1}{-4-9} \Rightarrow \frac{x}{-24} = \frac{y}{42} = \frac{1}{-13}$

$\therefore \frac{x}{-24} = \frac{1}{-13} \Rightarrow x = \frac{24}{13}$

আবার, $\frac{y}{42} = \frac{1}{-13} \Rightarrow y = \frac{42}{-13}$

$\therefore$ F বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{24}{13}, \frac{-42}{13}\right)$

$\therefore$ ABCF ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 & \frac{24}{13} & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{42}{13} & 0 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left(12 + 0 + \frac{126}{13} + 0 - 0 + 9 - 0 + \frac{168}{13}\right)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{567}{13} = \frac{567}{26}$ **(Ans.)**

11. ABC ত্রিভুজে $A\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ এবং $B(2, 270^o)$ বিন্দুদ্বয় ভূমির প্রান্ত বিন্দু C বিন্দুটি মূলবিন্দুতে অবস্থিত।

(ক) **A ও B বিন্দুদ্বয়ের কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।** 2

(খ) **ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, ত্রিভুজটির উচ্চতা = $\sqrt{2}$ একক।** 4

(গ) দেখাও যে, ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফলের চারগুণ। 4

সমাধান

ক. মনে করি, A ও B বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাংক (x, y) তাহলে

$A\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ বিন্দুর জন্য

$x = \sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$

এবং $y = \sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$

$\therefore A\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাংক $(1, -1)$

আবার, $B(2, 270^o)$ বিন্দুর জন্য $x = \cos(270^o) = 0$

এবং $y = 2\sin(270^o) = -2$

$\therefore B(2, 270^o)$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাংক $(0, -2)$ **(Ans.)**

খ. $A(1, -1), B(0, -2)$ এবং $C(0,0)$ শীর্ষ বিশিষ্ট ABC

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(0 + 0 + 0 + 2 + 0 + 0) = 1$ বর্গ একক

ত্রিভুজের ভূমি, $AB = \sqrt{(1-0)^2 + (-1+2)^2}$

$= \sqrt{2}$ বর্গ একক, ΔABC এর ক্ষেত্রফল $=1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times$ উচ্চতা $= 1$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \times$ উচ্চতা $= 1$

$\therefore$ উচ্চতা $= \sqrt{2}$ $\therefore$ উচ্চতা $= \sqrt{2}$ একক। **(Showed)**

গ. $C(0,0)$ ও $B(0, -2)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব

$CB = \sqrt{(0-0)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{2^2} = 2$ একক

আবার, $C(0,0)$ ও $A(1, -1)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব

$CA = \sqrt{(0-1)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{2}$ একক

এবং 'খ' হতে পাই, $AB = \sqrt{2}$ একক,

যেহেতু, $CB > AB = CA$

$\therefore CB =$ ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু।

$\therefore$ ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহুর উপর অংকিত বর্গের ক্ষেত্রফল

$= 2^2$ বর্গ একক

$= 4$ বর্গ একক $= 4 \times 1$ বর্গ একক

$= 4 \times$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুর উপর অংকিত বর্গের ক্ষেত্রফল ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের চারগুণ **(Showed)**

অধ্যায় ০৪ বৃত্ত

এই অধ্যায়ের বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্নের বিশ্লেষণ:

বোর্ড	২০২২				২০২১				২০১৯				২০১৮				২০১৭			
	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ
	ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ	
ঢাকা	2	1	1	4					2	2	2	4	1		1	3	1	1	1	3
রাজশাহী	1	1	1	3						1		2	সকল বোর্ড					1	1	4
চট্টগ্রাম	1	1	1	2						1	1	2					1	1	1	
সিলেট	1	1	1	4							1	2							1	1
বরিশাল	2		2	5						1	1	2					1	1		2
যশোর	1	1	1	4						1	1	2						1	1	2
কুমিল্লা	2	2	2	3					1	1	2	2					0	1	1	2
দিনাজপুর	1	1	1	5						1	1	2					1	1	1	5
ময়মনসিংহ	2	2	2	3																

বি.দ্র.- ২০২০ সালে বোর্ড পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয় নাই, ২০২১ সালে শর্ট সিলেবাসে অধ্যায়-০৪ ছিল না। ২০১৮ সালে সকল বোর্ডে অভিন্ন প্রশ্ন পদ্ধতিতে পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয়।

গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা ও তথ্যাবলি

◈ বৃত্ত হওয়ার শর্ত: $ax^2 + by^2 + 2hxy + kx + my + c = 0$ একটি দুই চলকের আদর্শ দ্বিঘাত বহুপদী সমীকরণ।

সমীকরণটি বৃত্ত হবে যখন:

(i) $a = b$ অর্থাৎ x^2 এবং y^2 এর সহগ একই হবে, $a = b \neq 0$ হয়।

(ii) $h = 0$ অর্থাৎ xy যুক্ত কোন পদ থাকবে না।

(iii) $a \neq 0, b \neq 0$ অর্থাৎ বৃত্তের সমীকরণ দুই চলকের দ্বিঘাত বিশিষ্ট।

◈ বৃত্তের আদর্শ সমীকরণ থেকে বিভিন্ন উপাদান বের করার নিয়ম: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

(i) প্রথমেই x^2, y^2 এর সহগ $+1$ করে নিতে হবে।

(ii) এরপর বৃত্তের কেন্দ্র বের করবে: $(-g, -f) \equiv \left(\frac{x \text{ এর সহগ}}{-2}, \frac{y \text{ এর সহগ}}{-2}\right)$

(iii) ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ একক ($r < 0$ হলে এটি অবাস্তব বৃত্ত। $r = 0$ হলে এটি বিন্দু বৃত্ত। $r > 0$ হলে এটি বাস্তব বৃত্ত।)

(iv) কোনো বিন্দু হতে একটি বৃত্তে বাস্তব, অবাস্তব, সমাপতিত কেবলমাত্র দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায় যথাক্রমে যখন বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে, ভিতরে বা উপরে অবস্থান করে।

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি

প্রয়োজনীয় সমীকরণ (I):

(i) বৃত্তের কেন্দ্র (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ r হলে, বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 = r^2$

(ii) কেন্দ্র (h, k) এবং ব্যাসার্ধ r হলে, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

(iii) বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

এখানে, কেন্দ্র $(-g, -f)$, ব্যাসার্ধ $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ একক

➤ বৃত্ত দ্বারা x অক্ষের ছেদাংশ $= 2\sqrt{g^2 - c}$

➤ বৃত্ত দ্বারা y অক্ষের ছেদাংশ $= 2\sqrt{f^2 - c}$

➤ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের খন্ডিতাংশ $= 2\sqrt{r^2 - k^2}$ এবং y-অক্ষের খন্ডিতাংশ $= 2\sqrt{r^2 - h^2}$

(iv) $g = 0$ হলে, বৃত্তের কেন্দ্র y-অক্ষে অবস্থিত হবে এবং তার সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2fy + c = 0$

(v) $f = 0$ হলে, বৃত্তের কেন্দ্র x-অক্ষে অবস্থিত হবে এবং তার সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$

(vi) বৃত্তটি x- অক্ষকে স্পর্শ করলে $c = g^2$ এবং বৃত্তটি y- অক্ষকে স্পর্শ করলে $c = f^2$ হবে।

(vii) বৃত্তটি x- অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করলে, কেন্দ্র x- অক্ষের উপর ফলে, $c = g^2 = 0$;
বৃত্তটি y- অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করলে, কেন্দ্র y- অক্ষের উপর ফলে, $c = f^2 = 0$ হবে।

➤ বৃত্তটি x- অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করলে, কেন্দ্র y- অক্ষের উপর ফলে, $c = g^2 = 0$; এবং $h = 0,\ r = k$ এবং বৃত্তটি y- অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করলে কেন্দ্র x অক্ষের উপর ফলে $c = f^2 = 0$ এবং $k = 0,\ r = h$.

(viii) x-অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করলে সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 2fy = 0$

(ix) y-অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করলে সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 2gx = 0$

(x) যদি কোন বৃত্ত মূলবিন্দু দিয়ে যায়, তবে $c = 0$ হবে এবং বৃত্তের সমীকরণ হবে, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$

(xi) বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে: (a) $g^2 = f^2 = c$ (b) $g = \pm f$ অথবা, $f = \pm g$ এবং $r = |g| = |f|$
বৃত্তের সমীকরণ হবে: $x^2 + y^2 \pm 2fx \pm 2fy + c = 0$ Or, $x^2 + y^2 \pm 2gx \pm 2gy + c = 0$

(xii) পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সমীকরণ: $r^2 + 2r(g\cos\theta + f\sin\theta) + c = 0$ যেখানে, বৃত্তস্থ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ);
কেন্দ্র $\left(\sqrt{g^2 + f^2},\ \tan^{-1}\frac{f}{g}\right)$, ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ একক

প্রয়োজনীয় সমীকরণ (II):

(i) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুইটির সংযোগ সরলরেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ:
$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

(ii) C_1 ও C_2 কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r_1 ও r_2 হলে: $(r_1 > r_2)$
(a) অন্তঃ স্পর্শের ক্ষেত্রে $C_1C_2 = r_1 \sim r_2$ (b) বহিঃস্পর্শের ক্ষেত্রে $C_1C_2 = r_1 + r_2$

(iii) একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ: (প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ) + k (রেখার সমীকরণ) = 0; k ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

(iv) দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ: প্রথম বৃত্ত + k (দ্বিতীয় বৃত্ত) = 0

প্রয়োজনীয় সমীকরণ (স্পর্শক ও অভিলম্ব) (III):

(i) $y = mx + c$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্তঃ $c = \pm a\sqrt{1 + m^2}$

(ii) স্পর্শবিন্দু হবে $\left(\frac{-ma}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right) \Rightarrow$ এখানে লক্ষ্য রাখতে হবে, m = স্পর্শকের ঢাল, c = ধ্রুবক
যখন y এর সহগ +1 এবং এরা বিপরীত side এ। a = বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

(iii) স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণঃ $y = mx + a\sqrt{1 + m^2}$; $y = mx - a\sqrt{1 + m^2}$

(iv) সরলরেখা $\ell x + my + n = 0$ এবং বৃত্তটি $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ স্পর্শ করার শর্ত:
$(\ell g + mf - n)^2 = (\ell^2 + m^2)(g^2 + f^2 - c)$

(v) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের উপরিস্থিত (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ; $xx_1 + yy_1 = a^2$।

(vi) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের উপরিস্থিত $(x_1 y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ:
$xx_1 + yy_1 + 2g\left(\frac{x+x_1}{2}\right) + 2f\left(\frac{y+y_1}{2}\right) + c = 0$

[বি.দ্র: যে কোনো দ্বিঘাত সমীকরণে (বৃত্ত, পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত ইত্যাদি) x^2 এর স্থলে xx_1, y^2 এর স্থলে yy_1, x এর স্থলে $\left(\frac{x+x_1}{2}\right)$ এবং y- এর স্থলে $\left(\frac{y+y_1}{2}\right)$ বসালে তার উপরিস্থিত (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যায়।]

(vii) বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) হলে ঐ বৃত্তের উপরিস্থিত (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ:
$(x - x_1)(x_1 - h) + (y - y_1)(y_1 - k) = 0$

(viii) (a) $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের উপর (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ, $x_1y - y_1x = 0$

(b) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের ক্ষেত্রে (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ:
$(y_1 + f)x - (x_1 + g)y + gy_1 - fx_1 = 0$

[বি.দ্র: (a) অভিলম্বের সূত্রটি পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্তের জন্যও প্রযোজ্য (b) বৃত্তের অভিলম্ব কেন্দ্রগামী হয়।]

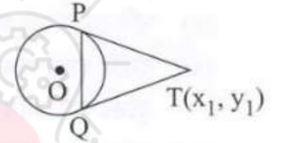
(ix) বহিঃস্থ বিন্দু (x_1, y_1) থেকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ:
$(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c)(x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) = \{xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c\}^2$

(x) $\ell x + my + n = 0$ রেখা $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে, $\left|\frac{\ell h+mk+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right| = r$, ছেদ করলে, $\left|\frac{\ell h+mk+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right| < r$

(xi) $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ এবং $S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ হলে,
সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ, $S_1 - S_2 = 0$ বা, $2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + (c_1 - c_2) = 0$

(xii) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের কোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) হলে তার সমীকরণ,
$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$

(xiii) (x_1, y_1) বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$ একক (x_1, y_1) থেকে $x^2 + y^2 = a^2$ এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - a^2}$ একক $(0,0)$; বিন্দু থেকে কোন বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\text{ধ্রুবক}}$ [যদি ধ্রুবক ঋণাত্মক হয় তবে বিন্দুটি বৃত্তের ভিতরে অবস্থিত।]

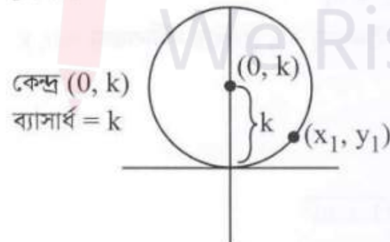


(xiv) (x_1, y_1) বিন্দু হতে $x^2+y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$
বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শ জ্যা এর সমীকরণ, $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

সহজে মনে রাখার কৌশল

- $f(x, y) = 0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $f(x, y) = f(x_1, y_1)$
- x-অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2+y^2}{y} = \frac{x_1^2+y_1^2}{y_1}$

[প্রমাণ:



বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + (y - k)^2 = (x_1 - 0)^2 + (y_1 - k)^2$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2ky + k^2 = x_1^2 + y_1^2 - 2ky_1 + k^2 \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{y} = \frac{x_1^2+y_1^2}{y_1}$]

- y-অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2+y^2}{x} = \frac{x_1^2+y_1^2}{x_1}$
- কেন্দ্র (h, k) এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 = 0$
- কেন্দ্র (h, k) এবং y-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + k^2 = 0$.

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও সমাধান

MCQ: বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্ন ও সমাধান

01. $4x + 3y = a$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 4x = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে – [RB'22] [Ans: c]
(i) বৃত্তের কেন্দ্র (2,0)
(ii) বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4
(iii) a এর মান 18 অথবা −2
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

02. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ বৃত্তটি স্পর্শ করে- [Ctg.B'22] [Ans: a]
(a) x-অক্ষকে (b) y-অক্ষকে
(c) উভয় অক্ষকে (d) মূলবিন্দুকে

03. $x + y = 4$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 34 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি? [Ctg.B'22] [Ans: b]
(a) (1,3) (b) (3,1) (c) (3,2) (d) (2,5)

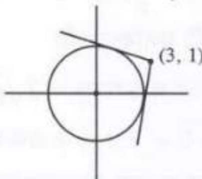
নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে।

04. c-এর মান কত? [SB'22] [Ans: a]
(a) 9 (b) 3 (c) 4 (d) 2

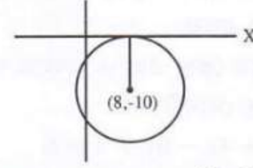
05. স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? [SB'22] [Ans: b]
(a) (3,0) (b) (0,3) (c) (2,0) (d) (0,2)

06. $3x - 4y + 4 = 0$ এবং $6x - 8y - 7 = 0$ সরলরেখাদ্বয় একই বৃত্তের স্পর্শক হলে, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ- [SB'22] [Ans: c]
(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{5}{7}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{5}{6}$

07. (3, 1) বিন্দু হতে $2x^2 + 2y^2 = 18$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কত একক? [RB, SB, BB'22; Din.B'19; RB'17]
(a) 1 (b) $\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{19}$ (d) $\sqrt{38}$
সমাধান: (a); $x^2 + y^2 = 9$ (বৃত্ত)



08. (8, −10) বিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত x- অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তের ব্যাস কত একক? [BB, Din.B'22; CB'19; All.B'18]
(a) 8 (b) 10 (c) 16 (d) 20
সমাধান: (d); x অক্ষকে স্পর্শ করে
$\therefore r = |\text{বৃত্তের কেন্দ্রের কোটি}| = |-10| = 10$
$\therefore$ ব্যাস, $d = 2r = 20$



নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + y^2 - 12x + 8y + c = 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

09. C এর মান কত? [BB'22]
(a) −6 (b) 4 (c) 16 (d) 36
সমাধান: (d); $x^2 + y^2 - 12x + 8y + c = 0$ বৃত্তটির x অক্ষকে স্পর্শ করে।
$\therefore 2\sqrt{g^2 - c} = 0 \Rightarrow g^2 = c$ | $g = -6$
$\Rightarrow (-6)^2 = c \therefore c = 36$ | $f = 4$

10. স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? [BB'22] [Ans: c]
(a) (0, −4) (b) (0, 4) (c) (6, 0) (d) (−6, 0)

11. $r^2 + 2r\sin\theta = 3$ বৃত্তটির কেন্দ্র- [JB'22] [Ans: d]
(a) (1, 0) (b) (−1, 0) (c) (0, 1) (d) (0, −1)

12. $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের (4, 3) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? [JB, MB'22] [Ans: c]
(a) $3x + 4y - 25 = 0$ (b) $3x + 4y + 25 = 0$
(c) $4x + 3y - 25 = 0$ (d) $4x + 3y + 25 = 0$

13. $y = mx + c$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত- [JB'22] [Ans: c]
(a) $c = -25\sqrt{1 + m^2}$ (b) $c = 25\sqrt{1 + m^2}$
(c) $c = \pm 5\sqrt{1 + m^2}$ (d) $c = \pm 5\sqrt{1 - m^2}$

14. নিচের কোন শর্তে $ax^2 + by^2 = c$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে? [CB'22] [Ans: d]
(a) $c = 0$ (b) $c = r^2$
(c) $a \neq b$ (d) $\frac{a}{b} = 1, b \neq 0$

15. $2x^2 + 2y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র কোনটি? [CB'22; CB, BB'19; All.B'18; RB'17]
(a) $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$
(c) (−2, 1) (d) $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$
সমাধান: (a); $2x^2 + 2y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - y + 2 = 0 \therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র,
$\equiv \left(\frac{x \text{ এর সহগ}}{-2}, \frac{y \text{ এর সহগ}}{-2}\right) \equiv \left(\frac{2}{-2}, \frac{-1}{-2}\right) \equiv \left(-1, \frac{1}{2}\right)$

16. $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$ বৃত্তের y-অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য কোনটি? **[RB, BB, JB, CB'22; SB, BB'19; JB'17]**

(a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 32

সমাধান: (b); $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0 \therefore f = 4$ এবং $c = 0$

$\therefore$ y অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{(4)^2 - 0}$

$= 2 \times 4 = 8$ একক

17. $(-2,3)$ বিন্দুতে কেন্দ্র এবং y- অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ কোনটি? **[Din.B'22]**

(a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$
(b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
(c) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$
(d) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

সমাধান: (a); এখানে বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f) \equiv (-2, 3)$

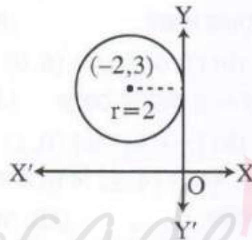
$\therefore g = 2$ এবং $f = -3$ $\because$ বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে,

$\therefore c = f^2 = (-3)^2 = 9 \therefore$ বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2(2)x + 2(-3)y + 9 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$

বিকল্প:



$\because$ বৃত্তের কেন্দ্র $(-2,3)$ এবং বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = |$কেন্দ্রের ভুজ$| = |-2| = 2$ একক।

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 4$

$\therefore x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$ ও $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 1 = 0$ দুটি বৃত্তের সমীকরণ।

18. প্রথম বৃত্তের কেন্দ্র কোনটি? **[Din.B'22]**

(a) $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ (b) $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$

(c) $\left(1, -\frac{2}{3}\right)$ (d) $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$

সমাধান: (c); ১ম বৃত্তের সমীকরণ,

$3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + \frac{4}{3}y - \frac{1}{3} = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

(i) নং বৃত্তের কেন্দ্র

$\left(\frac{x \text{ এর সহগ}}{-2}, \frac{y \text{ এর সহগ}}{-2}\right) \equiv \left(\frac{-2}{-2}, \frac{\frac{4}{3}}{-2}\right) \equiv \left(1, -\frac{2}{3}\right)$

নিচের উদ্দীপকের সাহায্যে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

19. বৃত্তটি x- অক্ষকে যে বিন্দুতে স্পর্শ করে তা হলো **[MB'22]**

(a) (1,0) (b) (0,1) (c) (−1,1) (d) (1,1)

সমাধান: (a); x-অক্ষে $y = 0$

$\therefore$ Option Check $\therefore (1, 0)$

20. বৃত্তটির ব্যাসার্ধ– **[MB'22]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) 2 (d) 3

সমাধান: (b); $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{1 + 1 - 1} = 1$ একক

21. $x^2 + y^2 = 9$ এবং $x^2 + y^2 + 6x + 8y + c = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে c এর মান কত? **[DB'22, 19]**

(a) −39 (b) −21 (c) 39 (d) 21

সমাধান: (d); $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2$

বৃত্তের কেন্দ্র $c_1(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r_1 = 3$ একক

$x^2 + y^2 + 6x + 8y + c = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র, $c_2\left(\frac{6}{-2}, \frac{8}{-2}\right) \equiv (-3, -4)$ এবং

ব্যাসার্ধ, $r_2 = \sqrt{3^2 + 4^2 - c} = \sqrt{25 - c}$

বৃত্তদ্বয় বহিঃস্পর্শ করলে, $c_1c_2 = r_1 + r_2$

$\Rightarrow \sqrt{(0 + 3)^2 + (0 + 4)^2} = 3 + \sqrt{25 - c}$

$\Rightarrow 5 = 3 + \sqrt{25 - c} \Rightarrow 2 = \sqrt{25 - c}$

$\Rightarrow 4 = 25 - c \Rightarrow c = 25 - 4 \therefore c = 21$ **(Ans.)**

22. $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ বৃত্তটি- **[DB'22; Ctg.B'19]**

(i) মূলবিন্দুগামী
(ii) x-অক্ষ থেকে 4 একক অংশ খণ্ডন করে
(iii) y-অক্ষকে $(0, -6)$ বিন্দুতে ছেদ করে

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ বৃত্তের জন্য,

$g = \frac{-4}{2} = -2, f = \frac{-6}{2}, c = 0$

(i) $c = 0 \therefore$ বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী

(ii) বৃত্তটি x অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{g^2 - c}$

$= 2\sqrt{(-2)^2 - 0} = 2.2 = 4$ একক

(ii) বৃত্তটি y অক্ষকে যেখানে ছেদ করে তার $x = 0$; বৃত্তের সমীকরণে $x = 0$ বসালে পাই, $0^2 + y^2 - 4.0 - 6y = 0$

$\Rightarrow y(y - 6) = 0 \therefore y = 0,6$

$\therefore$ y অক্ষের ছেদবিন্দু (0,0), (0,6)

23. দ্বিতীয় বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের ছেদিত অংশের দৈর্ঘ্য কত? [DB, Din.B'22; JB'19]
(a) $2\sqrt{2}$ একক (b) $\sqrt{13}$ একক
(c) $\sqrt{2}$ একক (d) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ একক
সমাধান: (a); দ্বিতীয় বৃত্তের সমীকরণ,
$3x^2 + 3y^2 - 6x - 9y - 3 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 3y - 1 = 0$............(i)
(i) নং বৃত্তের জন্য, $g = \frac{-2}{2} = -1$ এবং $c = -1$
$\therefore$ x অক্ষের খণ্ডিতাংশ= $2\sqrt{g^2 - c}$
$= 2\sqrt{(-1)^2 - (-1)} = 2\sqrt{2}$ একক

24. $r = 2\cos\theta$ পোলার সমীকরণটি নির্দেশ করে- [MB'22; DB'19]
(a) সরলরেখা (b) পরাবৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) বৃত্ত
সমাধান: (d); $r = 2\cos\theta \Rightarrow r^2 = 2r\cos\theta$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0$ বৃত্ত

25. $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$
এবং $x^2 + y^2 + 8x + y + 10 = 0$ বৃত্ত দুটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ কোনটি? [DB'22, 19, 17; JB'19]
(a) $2x + y + 4 = 0$ (b) $2x - y - 4 = 0$
(c) $2x - y + 4 = 0$ (d) $2x + y - 4 = 0$
সমাধান: (c); $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$
$S_2 \equiv x^2 + y^2 + 8x + y + 10 = 0$
$\therefore$ সাধারণ জ্যা, $S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow 2x - y + 4 = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + y^2 - 6x + 4y + c = 0$ বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে।

26. c এর মান কত? [RB' 19]
(a) -2 (b) 3 (c) 4 (d) 9
সমাধান: (c); y- অক্ষকে স্পর্শ করলে $c = f^2 = 2^2 = 4$

27. স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? [RB' 19]
(a) $(0, 2)$ (b) $(0, -2)$
(c) $(3 - \sqrt{5}, 0)$ (d) $(3 \pm \sqrt{5}, 0)$
সমাধান: (b); y-অক্ষের স্পর্শবিন্দুতে $x = 0$
$\therefore 0 + y^2 - 0 + 4y + 4 = 0 \Rightarrow y^2 + 4y + 4 = 0$
$\Rightarrow (y + 2)^2 = 0 \Rightarrow y = -2$ $\therefore$ স্পর্শবিন্দু $(0, -2)$

28. (2, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x- অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটি দ্বারা y-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ কত একক? [Ctg.B'19]
(a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (b) $\sqrt{5}$ (c) $2\sqrt{5}$ (d) 5
সমাধান: (c); বৃত্তের সমীকরণ: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$
$\therefore$ y অক্ষের খণ্ডিতাংশ,
$= 2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{3^2 - 4} = 2\sqrt{5}$ একক।

29. $A(1, 2)$ ও $B(2, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নিচের কোনটি? [SB'19]
(a) $x^2 + y^2 - 3x - 5y + 8 = 0$
(b) $x^2 + y^2 - 3x + 5y + 8 = 0$
(c) $x^2 + y^2 + 3x + 5y + 8 = 0$
(d) $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 8 = 0$
সমাধান: (a); $(x - 1)(x - 2) + (y - 2)(y - 3) = 0$
$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 + y^2 - 5y + 6 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 3x - 5y + 8 = 0$

নিচের উদ্দীপকের সাহায্যে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 = 0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

30. বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত? [Din.B'19]
(a) $5\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{30}$ (c) $2\sqrt{5}$ (d) $\sqrt{10}$
সমাধান: (c); $\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 10}$
$= 2\sqrt{5}$ একক

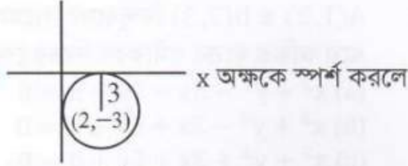
31. বৃত্তের উপর $(1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? [Din.B'19; CB, BB'17]
(a) $2x - y - 4 = 0$ (b) $2x - y - 3 = 0$
(c) $x - 3 = 0$ (d) $x - 4 = 0$
সমাধান: (b); স্পর্শকের সমীকরণ,
$x.1 + y(-1) + 6\frac{x+1}{2} - 2\frac{y-1}{2} - 10 = 0$
$\Rightarrow x - y + 3x + 3 - y + 1 - 10 = 0$
$\Rightarrow 4x - 2y - 6 = 0 \therefore 2x - y - 3 = 0$

32. বিন্দু বৃত্তের সমীকরণ- [All.B'18]
(a) $x^2 - y^2 = 0$ (b) $x^2 + y^2 = 0$
(c) $x^2 + y^2 = r^2$
(d) $x^2 + y^2 + x + y + 1 = 0$
সমাধান: (b); বিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ শূন্য (0) [x^2 ও y^2 এর সহগ সমান]

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + y^2 - 3x - 4y + 5 = 0$ এবং
$3x^2 + 3y^2 - 6x - 9y - 3 = 0$ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ।

33. দ্বিতীয় বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের ছেদিত অংশের দৈর্ঘ্য কত একক? [DB'17]
(a) $2\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{13}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{\sqrt{13}}{2}$
সমাধান: (a); $3x^2 + 3y^2 - 6x - 9y - 3 = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 3y - 1 = 0$
x অক্ষের ছেদিত অংশের দৈর্ঘ্য
$= 2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{(-1)^2 - (-1)} = 2\sqrt{2}$ একক

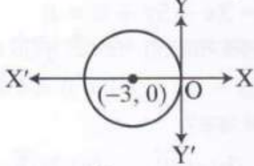
34. $(2, -3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করলে তার সমীকরণ কোনটি? [DB'17]
(a) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$
(b) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 2^2$
(c) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$
(d) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 3^2$

সমাধান: (d); 

x অক্ষকে স্পর্শ করলে

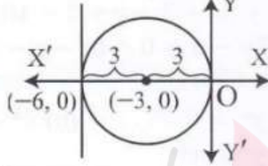
ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রের কোটি| = |−3| = 3 একক
∴ বৃত্তের সমীকরণ, $(x-2)^2+(y+3)^2=3^2$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



35. বৃত্তের সমীকরণ কোনটি? [RB'17]
(a) $x^2+y^2-6x=0$ (b) $x^2+y^2+6x=0$
(c) $x^2+y^2-6y=0$ (d) $x^2+y^2+6y=0$
সমাধান: (b); কেন্দ্র (−3, 0); ব্যাসার্ধ 3 একক। বৃত্তের সমীকরণ $(x+3)^2+y^2=3^2 \Rightarrow x^2+y^2+6x=0$

36. বৃত্তটির যে স্পর্শক y-অক্ষের সমান্তরাল উহার সমীকরণ কোনটি? [RB'17]
(a) $y-6=0$ (b) $y+6=0$
(c) $x-6=0$ (d) $x+6=0$

সমাধান: (d); 

∴ স্পর্শকের সমীকরণ $x=-6 \Rightarrow x+6=0$
কেন্দ্র $\left(\frac{-\frac{5}{2}}{-2}, \frac{\frac{7}{2}}{-2}\right) \equiv \left(\frac{5}{4}, \frac{-7}{4}\right)$

37. $x^2+y^2=100$ বৃত্ত- [Ctg.B'17]
(i) এর কেন্দ্র (0, 0) (ii) এর ব্যাসার্ধ 10 একক
(iii) দ্বারা x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ 20 একক
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); বৃত্তের সমীকরণ $(x-0)^2+(y-0)^2=10^2$ কেন্দ্র (0, 0), ব্যাসার্ধ 10 একক এবং x অক্ষের খন্ডিতাংশ $=2\sqrt{g^2-c}=2\sqrt{0+100}=2\times10=20$ একক

38. (3, 4) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করলে উহার ব্যাসার্ধ কত? [Ctg.B'17]
(a) 3 একক (b) 4 একক
(c) 5 একক (d) 7 একক
সমাধান: (b); x অক্ষকে স্পর্শ করলে কেন্দ্রের কোটির পরমমানই বৃত্তের ব্যাসার্ধ হয়। ∴ উক্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 একক।

39. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তটি x অক্ষকে ছেদ করবে না, যখন- [SB'17]
(a) $g^2>c$ (b) $g^2<c$ (c) $f^2>c$ (d) $f^2<c$
সমাধান: (b); x অক্ষকে ছেদ না করলে $g^2-c<0$
$\therefore g^2<c$

40. $x^2+y^2-12x+4y+6=0$ বৃত্তের ব্যাসের সমীকরণ- [BB'17]
(a) $x+y=0$ (b) $x=y$
(c) $x+3y=0$ (d) $3x+2y=0$
সমাধান: (c); $x^2+y^2-12x+4y+6=0$
∴ বৃত্তের কেন্দ্র (6, −2) বৃত্তের ব্যাস অবশ্যই কেন্দ্রগামী হবে। $x+3y=0$ রেখাটি (6, −2) বিন্দুকে সিদ্ধ করে।

41. $3x^2+3y^2+x-2y+\frac{1}{2}=0$ বৃত্তের কেন্দ্র কোনটি? [JB'17]
(a) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$
(c) $\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$
সমাধান: (c); $x^2+y^2+\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}+\frac{1}{6}=0$
∴ কেন্দ্র $\equiv \left(\frac{\frac{1}{3}}{-2}, \frac{-\frac{2}{3}}{-2}\right) \equiv \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
বৃত্তের সমীকরণ: $2x^2+2y^2=20x-32$.

42. বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নিচের কোনটি? [CB'17]
(a) (−5, 0) (b) (5, 0)
(c) (−10, 0) (d) (10, 0)
সমাধান: (b); $2x^2+2y^2-20x+32=0$
$\Rightarrow x^2+y^2-10x+16=0$ ∴ কেন্দ্র (5, 0)

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
বৃত্তের সমীকরণ: $x^2+y^2+4x-6y+1=0$

43. বৃত্তটির y অক্ষের ছেদকৃত অংশের পরিমাণ- [Din.B'17]
(a) 6 (b) $2\sqrt{2}$ (c) $4\sqrt{2}$ (d) 0
সমাধান: (c); $x^2+y^2+4x-6y+1=0$
$f=-3,\ c=1$ ∴ y অক্ষের ছেদকৃত অংশ
$=2\sqrt{f^2-c}=2\sqrt{(-3)^2-1}$
$=2\sqrt{2}\times2=4\sqrt{2}$ একক।

44. উদ্দীপকে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কোনটি? [Din.B'17]
(a) 2 (b) 3 (c) $2\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{14}$
সমাধান: (c); ব্যাসার্ধ, $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$
$=\sqrt{2^2+3^2-1}=2\sqrt{3}$ একক

45. (i) $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত
(ii) $x^2+2y^2=4$ একটি বৃত্তের সমীকরণ [Din.B'17]
(iii) $(x+3)^2+(y-2)^2=9$ বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (b); (i) বৃত্তের কেন্দ্র C(0, 0) [মূলবিন্দু] এবং ব্যাসার্ধ = a একক
(ii) x^2 ও y^2 এর সহগ অসমান ∴ এটি বৃত্ত নয়
(iii) বৃত্তের কেন্দ্র C(−3, 2) এবং ব্যাসার্ধ = 3 একক
∴ ব্যাসার্ধ = |কেন্দ্রর ভূজ| ∴ বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে।

MCQ: বিভিন্ন লেখকের মূল বইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান:

মোঃ কেতাব উদ্দীন স্যার

01. $x^2+y^2+4x+6y+c=0$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 হলে, c এর মান নিচের কোনটি?
(a) 49 (b) 22 (c) 10 (d) 4
সমাধান: (d); $r=\sqrt{g^2-f^2-c}$
$\Rightarrow 3=\sqrt{2^2+3^2-c}\Rightarrow c=4$

02. $(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$
(i) এর কেন্দ্র $(3,4)$
(ii) দ্বারা x অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ 6
(iii) দ্বারা y অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ 8
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); সমীকরণ: $x^2+y^2-6x-8y=0$
$\therefore$ x অক্ষের ছেদাংশ $=2\sqrt{g^2-c}$
$=2\sqrt{(-3)^2-0}=6$ একক
$\therefore$ y অক্ষের ছেদাংশ $=2\sqrt{f^2-c}$
$=2\sqrt{(-4)^2-0}=8$ একক

03. $(x-4)^2+(y-3)^2=r^2$ বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী হলে এর ব্যাস নিচের কোনটি?
(a) 5 (b) 14 (c) 10 (d) 25
সমাধান: (c); বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী হওয়ায়, সমীকরণে $(0,0)$ বসিয়ে, $16+9=r^2\Rightarrow r=5$
$\Rightarrow$ ব্যাস $=10$ একক

04. (h,k) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত x অক্ষকে স্পর্শ করে তার সমীকরণ কোনটি?
(a) $(x-h)^2+(y-k)^2=h^2$
(b) $(x-h)^2+(y-k)^2=k^2$
(c) $(x+h)^2+(y+k)^2=h^2$
(d) $(x+h)^2+(y+k)^2=k^2$
সমাধান: (b); x অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=|$কেন্দ্রের কোটি$|$ $\therefore r=|k|$
$\therefore$ সমীকরণ, $(x-b)^2+(y-k)^2=k^2$

05. $x^2+y^2+4x+2fy+c=0$ বৃত্ত মূলবিন্দুতে y অক্ষকে স্পর্শ করলে-
(i) $c=0$ (ii) $f=0$ (iii) x অক্ষের খন্ডিতাংশ 2
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) ii (c) i, ii (d) i, ii, iii
সমাধান: (c); মূলবিন্দুগামী ও y অক্ষকে স্পর্শ করে, $(0,0)$ বসিয়ে, $c=0$ আবার, $f^2=c\Rightarrow f=0$
$\therefore x^2+y^2+4x=0$ সমীকরণে x অক্ষের খণ্ডিতাংশ $=2\sqrt{g^2-c}=2\sqrt{4-0}=4$ একক

06. একটি বৃত্তের পোলার সমীকরণ $r=5$; বৃত্তটির-
(i) কেন্দ্র $(0,0)$
(ii) কার্তেসীয় সমীকরণ $x^2+y^2-25=0$
(iii) ব্যাস 5
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) ii (c) i, ii (d) i, ii, iii
সমাধান: (c); $r=5\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=5$
$\therefore x^2+y^2=5^2\ \therefore x^2+y^2-25=0$
$\therefore$ কেন্দ্র $(0,0)$, ব্যাস $=2r=2\times5=10$ একক।

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2+y^2-6x+8y+9=0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

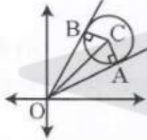
07. বৃত্তটির-
(i) কেন্দ্র $(3,-4)$ (ii) ব্যাসার্ধ 4
(iii) বহিঃস্থভাবে কোনো বিন্দু $(1,1)$ হতে স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $=13$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) i, ii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (b); কেন্দ্র $\left(\frac{-6}{-2},\frac{8}{-2}\right)$ $\therefore$ কেন্দ্র $(3,-4)$ ব্যাসার্ধ, $r=\sqrt{3^2+4^2-9}=4$ একক। বৃত্তের বহিঃস্থ $(1,1)$ বিন্দু হতে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য
$=\sqrt{1+1-6+8+9}=\sqrt{13}$ একক

08. মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্তটির ব্যাসের সমীকরণ কত?
(a) $3x+4y=0$ (b) $3x-4y=0$
(c) $4x+3y=0$ (d) $4x-3y=0$
সমাধান: (c); ব্যাসটি বৃত্তের কেন্দ্র $(3,-4)$ ও মূলবিন্দুগামী $(0,0)$। ব্যাসের সমীকরণ $\therefore \frac{y+4}{-4-0}=\frac{x-3}{3-0}$
$\Rightarrow 3y+12=-4x+12\Rightarrow 4x+3y=0$

09. y অক্ষের সমান্তরাল বৃত্তটির স্পর্শকের সমীকরণ কত?
(a) $x-1=0, x+7=0$
(b) $x+1=0, x+7=0$
(c) $x+1=0, x-7=0$
(d) $x-1=0, x-7=0$
সমাধান: (c); y অক্ষের সমান্তরাল রেখা, $x=a$
$\Rightarrow x-a=0$
$\therefore$ কেন্দ্র হতে স্পর্শকের উপর লম্ব দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ
$\Rightarrow\frac{|3-a|}{\sqrt{1}}=4\Rightarrow|a-3|=4\Rightarrow a=7,-1$
$\therefore$ সমীকরণদ্বয়: $x-7=0$ ও $x+1=0$

10. মূলবিন্দুগামী বৃত্তের কেন্দ্র $(4,3)$ বিন্দুতে অবস্থিত, নিম্নের প্রদত্ত বিন্দুগুলির মধ্যে কোন বিন্দুটি বৃত্তের উপর অবস্থিত?
(a) $(1,3)$ (b) $(9,3)$ (c) $(0,2)$ (d) $(8,4)$
সমাধান: (b); মূলবিন্দুগামী বৃত্তে $c=0$
$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ: $x^2+y^2-8x-6y=0$
$(9,3)$ বসিয়ে, $9^2+3^2-72-18=0$

11. O হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তে স্পর্শক OA ও OB মূলবিন্দুগামী এবং C কেন্দ্র হলে OABC চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল হবে-
(a) $\frac{1}{2}\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ (b) $\sqrt{c(g^2 + f^2 - c)}$
(c) $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ (d) $\frac{\sqrt{g^2+f^2-c}}{c}$
সমাধান: (b); $OB = OA = (0,0)$ বিন্দু হতে অঙ্কিত স্পর্শকের দূরত্ব
$= \sqrt{0+0+0+0+c} = \sqrt{c}$
$BC = AC =$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$
$\therefore$ OACB চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= 2 \times \Delta OAC$ এর ক্ষেত্রফল
$= 2 \times \frac{1}{2} OA \times AC = 2 \times \frac{1}{2}\sqrt{c} \times \sqrt{g^2 + f^2 - c}$
$= \sqrt{c(g^2 + f^2 - c)}$ বর্গ একক।



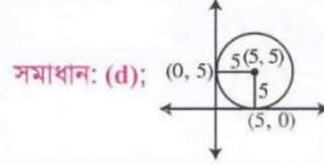
12. $2x^2 + ay^2 = 9$ একটি বৃত্তের সমীকরণ। তাই-
(a) $a = 2$ (b) $a = -2$
(c) $a > 2$ (d) $a < 2$
সমাধান: (a); বৃত্তের x^2 ও y^2 এর সহগ সমান হতে হবে।

13. $x^2 + y^2 = 16$ এর বিবেচনায় $(4, -3)$ বিন্দুটির অবস্থান কোথায়?
(a) বৃত্তের কেন্দ্রে (b) বৃত্তের উপরে
(c) বৃত্তের বাইরে (d) বৃত্তের ভিতরে
সমাধান: (c); $4^2 + (-3)^2 - 16$
$= 16 + 9 - 16 = 9 > 0$
$\therefore$ বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে অবস্থিত।

14. $(9,-9)$ ও $(-5,5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ-
(a) $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 90 = 0$
(b) $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 90 = 0$
(c) $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 90 = 0$
(d) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 90 = 0$
সমাধান: (b); $(x-9)(x+5) + (y+9)(y-5) = 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y - 90 = 0$

15. $(4,5)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত, যা $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে গমন করে তার সমীকরণ-
(a) $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 59 = 0$
(b) $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 59 = 0$
(c) $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 60 = 0$
(d) $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 59 = 0$
সমাধান: (d); প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(-2,-3)$
$(4,5)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং $(-2,-3)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $(x-4)^2 + (y-5)^2$
$= (-2-4)^2 + (-3-5)^2$
$\therefore x^2 + y^2 - 8x - 10y - 59 = 0$

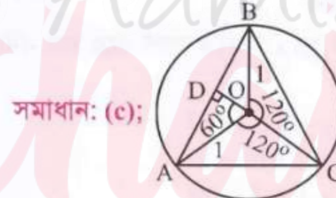
16. (5,0) এবং $(0,5)$ বিন্দুতে অক্ষরেখাদ্বয়কে স্পর্শকারী বৃত্তের সমীকরণ-
(a) $x^2 + y^2 + 10x - 10y - 25 = 0$
(b) $x^2 + y^2 - 10x + 30y - 25 = 0$
(c) $x^2 + y^2 - 20x - 10y - 25 = 0$
(d) $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$
সমাধান: (d);



$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ, $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$

17. নিম্নের কোন সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত বৃত্তের স্পর্শক x অক্ষ?
(a) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 4 = 0$
(b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$
(c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$
(d) $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y + 3 = 0$
সমাধান: (c); x অক্ষ স্পর্শক হলে, $c = g^2$ একমাত্র (c) এর জন্য $c = g^2$ হয়।

18. একক ব্যাসার্ধের বৃত্তে অন্তর্লিখিত একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য-
(a) $\frac{3}{2}$ units (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ units
(c) $\sqrt{3}$ units (d) 1 unit
সমাধান: (c);



$\therefore \angle AOD = 60°; OA = 1 \therefore AD = OA \times \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\therefore AB = 2.AD = \sqrt{3}$ একক।

19. $(2,3)$ কেন্দ্র ও 6 একক ব্যাস বিশিষ্ট বৃত্তটি দ্বারা x অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য হবে-
(a) 0 (b) 4
(c) $2\sqrt{10}$ (d) $4 + 2\sqrt{10}$
সমাধান: (a); বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= |$কেন্দ্রের কোটি$| = 3$
$\therefore$ বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে। $\therefore$ খণ্ডিতাংশ $= 0$

20. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত?
(a) 9.43 (b) 9π (c) 3π (d) 16π
সমাধান: (b); বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{4^2 + 3^2 - 16} = 3$ একক। $\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \pi \times 3^2 = 9\pi$ বর্গ একক।

এস ইউ আহাম্মদ স্যার

21. $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ বৃত্তের যে ব্যাসটি $3x-4y+5=0$ রেখার উপর লম্ব তার সমীকরণ:
(a) $4x+3y-10=0$ (b) $4x+3y+10=0$
(c) $4x+3y-25=0$ (d) $4x+3y+20=0$
সমাধান: (a); $3x-4y+5=0$ এর লম্ব রেখা $4x+3y+k=0$ ব্যাস হলে তা কেন্দ্রগামী।
কেন্দ্র $(1,2)$ বসিয়ে, $4+6+k=0 \Rightarrow k=-10$
$\therefore$ সমীকরণ $4x+3y-10=0$

22. $(4, 3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $x^2+y^2=9$ বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে বৃত্তটির সমীকরণ-
(a) $x^2+y^2+8x+6y+21=0$
(b) $x^2+y^2-8x-6y+21=0$
(c) $x^2+y^2-8x+6y+25=0$
(d) $x^2+y^2+8x-6y+25=0$
সমাধান: (b); ১ম বৃত্তের কেন্দ্র $c_1(4,3)$, ব্যাসার্ধ $=r_1$, ২য় বৃত্তের কেন্দ্র $=c_2(0,0)$ ব্যাসার্ধ $=r_2=3$
বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করায়, বৃত্তের ব্যাসার্ধদ্বয়ের যোগফল $=$ কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $c_1c_2=r_1+r_2$
$=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}=3+r_1 \therefore r_1=2$
$\therefore$ সমীকরণ $(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$
$\therefore x^2+y^2-8x-6y+21=0$

23. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর:
(i) $x^2+y^2-8x+6y+9=0$ বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করলে স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0,-3)$.
(ii) $x^2+y^2=0$ সমীকরণটি বিন্দুবৃত্ত নির্দেশ করে।
(iii) $x^2+y^2-4x-6y+11=0$ বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু দুইটি $(1,2),(3,4)$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (b); (i) বৃত্তের সমীকরণ $(x-4)^2+(y+3)^2=4^2 \therefore$ কেন্দ্র $(4,-3)$
$\therefore$ y অক্ষের স্পর্শবিন্দু (0, কেন্দ্রের কোটি) $\equiv(0,-3)$
(ii) সত্য
(iii) $(1,2),(3,4)$ ব্যাসের প্রান্তবিন্দু হলে বৃত্তের সমীকরণ $(x-1)(x-3)+(y-2)(y-4)=0$
$\therefore x^2+y^2-4x-6y+11=0$

24. k এর কোন মানের জন্য $(x-y+3)^2+(kx+2)(y-1)=0$ একটি বৃত্ত সূচিত করে?
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) -2
সমাধান: (b); সমীকরণটি,
$x^2+y^2+9+6x-6y-2xy+kxy-kx+2y-2=0$
বৃত্ত হতে হলে, xy থাকা যাবে না অর্থাৎ xy এর সহগ 0 হবে। $\therefore -2+k=0 \Rightarrow k=2$

25. $3x+4y=k$ রেখাটি $x^2+y^2=10x$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। k-এর একটি মান-
(a) 20 (b) 30 (c) 40 (d) 45
সমাধান: (c); বৃত্তের কেন্দ্র $(5,0)$; স্পর্শ করায়, $\frac{|15-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}$
$=\sqrt{(-5)^2+0^2-0} \Rightarrow |15-k|=25$
$\Rightarrow k=-10, 40$

26. $x^2+y^2=81$ বৃত্তের একটি জ্যায়ের মধ্যবিন্দু $(-2,3)$ হলে ঐ জ্যায়ের সমীকরণ–
(a) $2x+3y+12=0$ (b) $2x-3y+13=0$
(c) $2x-y+5=0$ (d) $x+2y-11=0$
সমাধান: (b); বৃত্তের কেন্দ্র এবং জ্যায়ের মধ্যবিন্দুগামী রেখা: $\frac{y-0}{0-3}=\frac{x-0}{0+2} \Rightarrow 3x+2y=0$
এর লম্বরেখা: $2x-3y+k=0$; $(-2,3)$ বিন্দুগামী হওয়ায়, $-4-9+k=0 \Rightarrow k=13$
$\therefore$ সমীকরণ: $2x-3y+13=0$
Shortcut: জ্যায়ের সমীকরণ,
$T=S_1, x(-2)+y.3-81=(-2)^2+3^2-81$
$\therefore 2x-3y+13=0$

27. c এর মান কত হলে, $x^2+y^2-8x+6y+c=0$ বৃত্তটি বিন্দু বৃত্ত হবে?
(a) 10 (b) 11 (c) 13 (d) 25
সমাধান: (d); বিন্দুবৃত্তের ব্যাসার্ধ $=0$
$\Rightarrow \sqrt{(-4)^2+(3)^2-c}=0 \Rightarrow c=25$

28. $x^2+y^2=r^2$ এবং $x^2+y^2-6x+5=0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পর অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করলে r এর মান কত?
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 5
সমাধান: (d); অন্ত:স্থভাবে স্পর্শ করায়,
$\left|r-\sqrt{(-3)^2+0-5}\right|=\sqrt{(3-0)^2+(0-0)^2}$
$\Rightarrow |r-2|=3 \Rightarrow r=5,-1 \therefore r=5[\because r\neq-1]$

29. $x^2+y^2-kx+2y-4=0$ বৃত্তের একটি ব্যাসের সমীকরণ $2x+y-3=0$ হলে k এর মান কত?
(a) -3 (b) -2 (c) 3 (d) 4
সমাধান: (d); বৃত্তের কেন্দ্র $\left(\frac{k}{2},-1\right)$ যা ব্যাসের উপর অবস্থিত। $\therefore 2.\frac{k}{2}-1-3=0 \Rightarrow k=4$

30. $(1,-1)$ বিন্দু থেকে $2x^2+2y^2-x+3y+1=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কত?
(a) 1 (b) 2 (c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
সমাধান: (d); বৃত্তটির আদর্শ সমীরকণ,
$x^2+y^2-\frac{x}{2}+\frac{3y}{2}+\frac{1}{2}=0$
$(1,-1)$ থেকে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য
$=\sqrt{1+1-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

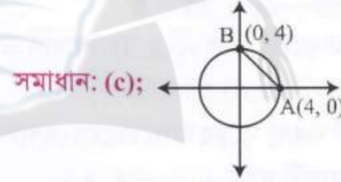
31. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের প্রান্ত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(2,4)$ ও $(0,-3)$ হলে ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ-
(a) $x^2+y^2-2x-2y-8=0$
(b) $x^2+y^2-2x-y-12=0$
(c) $x^2+y^2+2x-y-12=0$
(d) $x^2+y^2+2x-2y+8=0$
সমাধান: (b); সমকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র হলো অতিভুজের মধ্যবিন্দু। তাহলে, অতিভুজ একটি ব্যাস।
∴ পরিবৃত্তের সমীকরণ:
$(x-2)(x-0)+(y-4)(y+3)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2-2x-y-12=0$

32. $x^2+y^2-4x+5y+9=0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং $(2,-1)$ বিন্দুগামী বৃত্তটির সমীকরণ–
(a) $x^2+y^2-4x+5y+6=0$
(b) $x^2+y^2+4x-5y-8=0$
(c) $x^2+y^2-4x+5y+8=0$
(d) $x^2+y^2-4x+5y=0$
সমাধান: (c); এককেন্দ্রিক (একই কেন্দ্রবিশিষ্ট) বৃত্তটি:
$x^2+y^2-4x+5y+c=0$
$(2,-1)$ বিন্দুগামী: $4+1-8-5+c=0\Rightarrow c=8$
∴ সমীকরণ, $x^2+y^2-4x+5y+8=0$

33. $(0,-1)$ ও $(2,3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগরেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তটি দ্বারা x-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ–
(a) $2\sqrt{5}$ (b) $2\sqrt{3}$ (c) 3 (d) 4
সমাধান: (d); বৃত্তটির সমীকরণ:
$(x-0)(x-2)+(y+1)(y-3)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2-2x-2y-3=0$
∴ x অক্ষের খন্ডিতাংশ $=2\sqrt{g^2-c}=2\sqrt{1+3}=4$ একক।

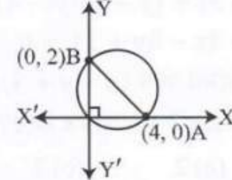
34. $x+y=1$ রেখাটি $x^2+y^2-2ax=0$ বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত–
(a) $a^2-2a=1$ (b) $a^2+2a=-1$
(c) $a^2+2a=1$ (d) $a^2-2a=-1$
সমাধান: (c); $lx+my=1$ রেখাটি $x^2+y^2-2ax=0$ কে স্পর্শ করলে, $a^2m^2+2al=1$
$\Rightarrow a^2.1^2+2a.1=1\therefore a^2+2a=1$

35. $(x-2)^2+(y-3)^2=16$ এবং $(x-2)^2+(y-10)^2=9$ বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি?
(a) (2, 3) (b) (16, 9) (c) (2, 10) (d) (2, 7)
সমাধান: (d); বিয়োগ করে, $(y-3)^2-(y-10)^2=7$
$\Rightarrow(2y-13).7=7\Rightarrow y=\frac{14}{2}=7\therefore x=2$
∴ স্পর্শবিন্দু $(2,7)$
বিকল্প: $c_1(2,3), r_1=4; c_2(2,10), r_2=3$
$c_1c_2=7=3+4=r_1+r_2$ ∴ বৃত্তদ্বয় বহিঃস্পর্শ করে স্পর্শবিন্দু c_1c_2 কে $r_1:r_2(4:3)$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে স্পর্শবিন্দু $\left(\frac{8+6}{4+3},\frac{40+9}{4+3}\right)\equiv(2,7)$

36. $x^2+y^2=16$ বৃত্তটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। বৃত্তটির কেন্দ্র থেকে AB এর উপর অঙ্কিত লম্ব দূরত্বকে একটি বর্গের বাহু নির্দেশ করলে বর্গটির ক্ষেত্রফল কত হবে?
(a) 4 বর্গ একক (b) 6 বর্গ একক
(c) 8 বর্গ একক (d) 10 বর্গ একক
সমাধান: (c);


AB রেখা, $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1\Rightarrow x+y=4$ কেন্দ্র $(0,0)$ হতে লম্ব দূরত্ব $=\frac{|-4|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ একক
∴ ক্ষেত্রফল $=\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$ বর্গ একক

37. $x^2+y^2-6x=0$ এবং $x^2+y^2-8y=0$ বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব–
(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 10
সমাধান: (c); $c_1(3,0)$ এবং $c_2(0,4)$ মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\sqrt{(3-0)^2+(0-4)^2}=5$ একক।

38. মূলবিন্দুগামী একটি বৃত্ত ধনাত্মক x-অক্ষ হতে 4 একক এবং y-অক্ষ হতে 2 একক ছেদক কর্তন করলে এর সমীকরণ-
(a) $x^2+y^2-4x-2y=0$
(b) $x^2+y^2+4x+2y=0$
(c) $x^2+y^2+2x+4y=0$
(d) $x^2+y^2-2x-4y=0$
সমাধান: (a); x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করলে $A(4,0)$ এবং $B(0,2)$
∴ A ও B ব্যাসের প্রান্তবিন্দু।
∴ সমীকরণ $(x-4)(x-0)+(y-0)(y-2)=0$
$\therefore x^2+y^2-4x-2y=0$


অসীম কুমার সাহা স্যার

39. বিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে নিচের কোনটি সঠিক? [Ans: c]

(a) $r > 0$ (b) $r < 0$

(c) $r = 0$ (d) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

40. $(-2, 3)$ বিন্দুটি $x^2 + y^2 - 8x - 10y + c = 0$ বৃত্তের ওপর অবস্থিত হলে c এর মান কত?

(a) -1 (b) -12 (c) 1 (d) 12

সমাধান: (c); $(-2)^2 + 3^2 + 16 - 30 + c = 0$

$\Rightarrow c = 1$

41. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নিচের কোনটি?

(a) $(-4, 8)$ (b) $(-2, 4)$

(c) $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ (d) $\left(-3, \frac{9}{2}\right)$

সমাধান: (b); বৃত্তের আদর্শ সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0$; $c\left(\frac{4}{-2}, -\frac{8}{-2}\right) \equiv (-2, 4)$

42. $(-2, k)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি বৃত্ত x ও y অক্ষকে স্পর্শ করলে k এর মান কত?

(a) -2 (b) 0 (c) 2 (d) ± 2

সমাধান: (d); বৃত্তের, $g = 2, f = -k$

x অক্ষকে স্পর্শ করায়, $c = g^2 = 4$

$\therefore$ y অক্ষকে স্পর্শ করায়, $f^2 = c \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$

বিকল্প: বৃত্ত, উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তের ব্যাসার্ধ = | কেন্দ্রের ভুজ |=| কেন্দ্রের কোটি|

$\Rightarrow r = |-2| = |k| \Rightarrow |k| = 2 \therefore k = \pm 2$

43. $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$ বৃত্তটি কোথায় স্পর্শ করবে?

(a) x-অক্ষ (b) y-অক্ষ

(c) উভয় অক্ষে (d) মূলবিন্দুতে

সমাধান: (c); কেননা, $g^2 = f^2 = c = 4$

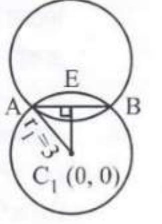
44. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ এবং $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য কত একক?

(a) $\frac{\sqrt{26}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{46}}{2}$ (c) $\sqrt{26}$ (d) $\sqrt{46}$

সমাধান: (c); বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যায়ের সমীকরণ,

$s_1 - s_2 = 0 \Rightarrow -2x + 6y + 10 = 0$

$\therefore x - 3y - 5 = 0$



$x^2 + y^2 = 9$ এর কেন্দ্র $C_1(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধে,

$r_1 = 3 \therefore C_1(0, 0)$ হতে সাঃ জ্যা AB এর দূরত্ব,

$C_1E = \frac{|0-0-5|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ একক

তাহলে, $AE = \sqrt{AC^2 - CE^2}$

$= \sqrt{3^2 - \frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$ একক।

$\therefore AB = 2AE = \sqrt{26}$ একক।

45. $P(10, 0), Q(0, -10)$ এবং $R(0, 10)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ নিচের কোনটি?

(a) $x^2 + y^2 = 10$

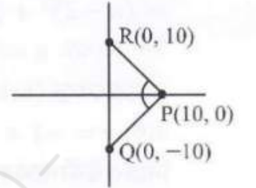
(b) $x^2 + y^2 + 10 = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 100 = 0$

(d) $(x - 10)^2 + y^2 = 100$

সমাধান: (c); $m_{PQ} \times m_{PR} = \frac{10-0}{0-10} \times \frac{0+10}{10-0} = -1$

$\therefore PQ \perp PR \therefore \Delta PQR$ সমকোণী



$\therefore$ পরিবৃত্তটির ব্যাস হবে QR

$\therefore$ বৃত্তটি $(x - 0)(x - 0) + (y - 10)(y + 10) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 100 = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x - y - 8 = 0$ সরলরেখা $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ বৃত্তকে ছেদ করে।

46. খন্ডিত জ্যা এর দৈর্ঘ্য কত?

(a) $2\sqrt{3}$ (b) $3\sqrt{2}$ (c) $3\sqrt{3}$ (d) 9

সমাধান: (b); কেন্দ্র $C(3, -2)$ হতে লম্ব দূরত্ব,

$d = \frac{|3+2-8|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ একক

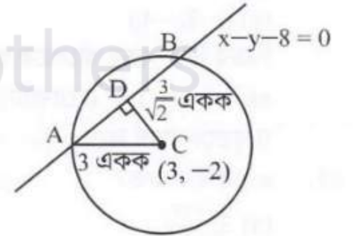
ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{9 + 4 - 4} = 3$ একক। $AB = 2AD$

$= 2\sqrt{r^2 - d^2}$

$= 2\sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$= 2.\sqrt{9 - \frac{9}{2}}$

$= 2.\frac{3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ একক



47. খন্ডিত জ্যা এর লম্ব দ্বিখন্ডকের সমীকরণ নিচের কোনটি?

(a) $x - y + 1 = 0$ (b) $x + y - 1 = 0$

(c) $y - x - 1 = 0$ (d) $x - y - 1 = 0$

সমাধান: (b); AB এর লম্বরেখা: $x + y + k = 0$

কেন্দ্র $C(3, -2)$ বিন্দুগামী: $3 - 2 + k = 0 \Rightarrow k = -1$

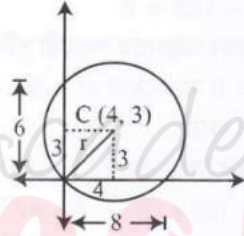
$\therefore$ সমীকরণ: $x + y - 1 = 0$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
একটি বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ $x = 2 + 5\cos t$ এবং $y = -1 + 5\sin t$

48. বৃত্তটির সমীকরণ নিচের কোনটি?
(a) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$
(b) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$
(c) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$
(d) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 20 = 0$
সমাধান: (c); বৃত্তের সমীকরণ: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$

49. বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত?
(a) $(2, 5)$ (b) $(-1, 5)$
(c) $(2, -1)$ (d) $(-2, 1)$
সমাধান: (c); $\cos t = \frac{x-2}{5} \ldots\ldots\ldots \text{(i)}$
এবং $\sin t = \frac{y+1}{5} \ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$
$\text{(i)}^2 + \text{(ii)}^2$ করে, $1 = \frac{(x-2)^2}{5^2} + \frac{(y+1)^2}{5^2}$
$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ কেন্দ্র $(2, -1)$
Shortcut: $x = h + r\cos\theta, y = k + r\sin\theta$ হলে বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) এবং ব্যাসার্ধ $= r \therefore x = 2 + 5\cos t$ এবং $y = -1 + 5\sin$ হলে কেন্দ্র $(2, -1)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



কেন্দ্র $c\left(\frac{8}{2}, \frac{6}{2}\right) \equiv (4, 3)$

50. বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক কত? [Ans: b]
(a) $(3, 4)$ (b) $(4, 3)$
(c) $(-3, -4)$ (d) $(-4, -3)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$ax + 2y - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে।

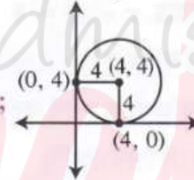
51. a এর মান কত? [Ans: a]
(a) $3, \frac{-17}{3}$ (b) $3, -1$
(c) $2, -6$ (d) $-3, \frac{17}{3}$
সমাধান: (a); কেন্দ্র $(4, 1)$ হতে $ax + 2y - 1 = 0$ এর লম্ব দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ $\frac{|4a+2-1|}{\sqrt{a^2+4}} = \sqrt{13}$
$\Rightarrow (4a+1)^2 = 13(a^2+4)$
$\Rightarrow 16a^2 + 8a + 1 = 13a^2 + 52$
$\Rightarrow 3a^2 + 8a - 51 = 0 \therefore a = 3, \frac{-17}{3}$

52. কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব কত একক?
(a) 3 (b) $\sqrt{13}$ (c) 13 (d) 169
সমাধান: (b); কেন্দ্র হতে রেখার দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ (যেহেতু এটি স্পর্শক) $= \sqrt{16 + 1 - 4} = \sqrt{13}$ একক

53. কোনো একটি বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(3, 5)$ এবং এর একটি ব্যাসের এক প্রান্তের স্থানাঙ্ক $(7, 3)$ হলে, উক্ত ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক কত?
(a) $(3, 2)$ (b) $(4, 1)$
(c) $(-1, 7)$ (d) $(2, -5)$
সমাধান: (c); অপর প্রান্ত বিন্দু (x, y) হলে, $\frac{x+7}{2} = 3$
$\Rightarrow x = -1$ এবং $\frac{y+3}{2} = 5 \Rightarrow y = 7 \therefore$ বিন্দুটি $(-1, 7)$

54. মূলবিন্দুগামী একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(4, 3)$। নিম্নে প্রদত্ত বিন্দুগুলির মধ্যে কোন বিন্দুটি বৃত্তের উপরে অবস্থিত নয়?
(a) $(-1, 3)$ (b) $(9, 3)$
(c) $(0, 3)$ (d) $(8, 0)$
সমাধান: (c); বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
$(0, 3)$ বসিয়ে: $0 + 9 - 0 - 18 = -9 < 0$
$\therefore$ বিন্দুটি বৃত্তের ভেতর অবস্থিত।

55. প্রত্যেক অক্ষরেখাকে মূলবিন্দু হতে ধনাত্মক দিকে 4 একক দূরত্বে স্পর্শ করলে বৃত্তটির সমীকরণ কী হবে?
(a) $x^2 + y^2 = 16$
(b) $x^2 + y^2 + 8x + 8y = 48$
(c) $x^2 + y^2 + 8x + 8y - 16 = 0$
(d) $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$
সমাধান: (d);



বৃত্তের সমীকরণ: $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 4^2$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$

মোঃ রফিকুল ইসলাম স্যার

56. $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ বৃত্তটি-
(i) মূলবিন্দুগামী
(ii) x- অক্ষ থেকে 4 একক অংশ খণ্ডন করে
(iii) y- অক্ষকে $(0, 6)$ বিন্দুতে ছেদ করে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); (i) $C = 0$; মূলবিন্দুগামী (ii) x অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{2^2 - 0} = 4$ একক
(iii) y অক্ষকে যেখানে ছেদ করে তার $x = 0$; $y^2 - 6y = 0$
$\therefore y = 0, 6 \therefore$ y অক্ষের ছেদবিন্দু $(0, 0)$ এবং $(0, 6)$

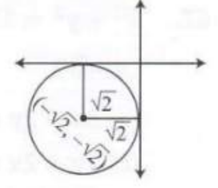
57. $x^2+y^2-4y-4=0$ বৃত্তটির-
(i) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, 2)$ (ii) ব্যাসার্ধ $\sqrt{8}$ একক
(iii) $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $x-y+2=0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (a); (i) $C\left(\frac{0}{-2},\frac{-4}{-2}\right)\equiv(0,2)$
(ii) $r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{0^2+2^2+4}=\sqrt{8}$ একক
(iii) $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শক $x.2+y.0-4\frac{y+0}{2}-4=0$
$\Rightarrow 2x-2y-4=0 \therefore x-y-2=0$

58. $x^2+y^2-gx=0$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?
(a) $\frac{1}{8}\pi g^2$ (b) $\frac{1}{4}\pi g^2$ (c) $\frac{1}{2}\pi g^2$ (d) πg^2
সমাধান: (b); ব্যাসার্ধ $=\sqrt{\left(-\frac{g}{2}\right)^2+0-0}=\frac{g}{2}$ একক
$\therefore$ ক্ষেত্রফল $=\pi.\frac{g^2}{4}=\frac{1}{4}\pi g^2$

59. $r^2-2\sqrt{3}\,r\cos\theta-8r\sin\theta+15=0$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত একক?
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4
সমাধান: (b); বৃত্তটির কার্তেসীয় সমীকরণ:
$x^2+y^2-2\sqrt{3}x-8y+15=0$
$\therefore$ ব্যাসার্ধ $=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-4)^2-15}=2$ একক।

60. 154 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসদ্বয় $2x-3y=5$ এবং $3x-4y=7$ হলে বৃত্তের সমীকরণ কোনটি?
(a) $x^2+y^2+2x-2y=62$
(b) $x^2+y^2+2x-2y=51$
(c) $x^2+y^2-2x+2y=47$
(d) $x^2+y^2-2x+2y=62$
সমাধান: (c); বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে, $\pi r^2=154$
$\therefore r\approx 7$ একক বৃত্তের কেন্দ্র হলো সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $C(1,-1)$
$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ $(x-1)^2+(y+1)^2=7^2$
$\therefore x^2+y^2-2x+2y=47$

61. একটি বৃত্ত অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ করে, যার কেন্দ্র তৃতীয় কোয়াড্রেন্টে (চৌকণে) অবস্থিত। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $\sqrt{2}$ হলে বৃত্তটির সমীকরণ-
(a) $x^2+y^2+2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y+2=0$
(b) $x^2+y^2-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y+2=0$
(c) $x^2+y^2-2\sqrt{2}y+2=0$
(d) $x^2+y^2+2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y+2=0$
সমাধান: (a); $\left(x+\sqrt{2}\right)^2+\left(y+\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$
$\Rightarrow x^2+y^2+2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y+2=0$



62. $2x^2+2y^2+6x-8y+c=0$ বৃত্তটি x- অক্ষকে স্পর্শ করে। c এর মান কোনটি?
(a) 2.5 (b) 3.5 (c) 4.5 (d) 2.25
সমাধান: (c); সমীকরণ: $x^2+y^2+3x-4y+\frac{c}{2}=0$
x অক্ষকে স্পর্শ করায়, $\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{c}{2}\Rightarrow c=\frac{9}{2}=4.5$

63. $3x+2y+k=0$ রেখাটি $x^2+y^2-8x-2y+4=0$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে k এর একটি মান-
(a) 1 (b) 27 (c) 5 (d) -1
সমাধান: (d); কেন্দ্র $(4, 1)$ রেখাটি বৃত্তটি স্পর্শ করায়,
$\frac{|12+2+k|}{\sqrt{9+4}}=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2-4}$
$\Rightarrow\frac{|k+14|}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}\Rightarrow|k+14|=13\therefore k=-1,-27$

64. $y=mx+c$ রেখাটি $x^2+y^2=25$ বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত-
(a) $c=-25\sqrt{1+m^2}$ (b) $c=25\sqrt{1+m^2}$
(c) $c=\pm5\sqrt{1+m^2}$ (d) $c=\pm r\sqrt{1+m^2}$
সমাধান: (c); এখানে $r=5\therefore$ স্পর্শ করার শর্ত,
$C=\pm r\sqrt{1+m^2}\therefore C=\pm5\sqrt{1+m^2}$

65. $x^2+y^2+4x+y=0$ বৃত্তের মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি?
(a) $4x-y=0$ (b) $4x+y=1$
(c) $x+4y=0$ (d) $4x+y=0$
সমাধান: (d); মূলবিন্দুতে স্পর্শক, $x.0+y.0+4.\frac{x+0}{2}+\frac{y+0}{2}=0\Rightarrow 2x+\frac{y}{2}=0\Rightarrow 4x+y=0$

66. $4x^2+4y^2-6x+9y-13=0$ দ্বারা বর্ণিত বৃত্তের $(2,-3)$ বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি?
(a) $x+y=6$ (b) $2x+y=12$
(c) $x+2y=5$ (d) $2x-3y=13$
সমাধান: (d); $(2,-3)$ বিন্দুতে স্পর্শক,
$4.x.2+4.y.(-3).-6.\frac{x+2}{2}+9.\frac{y-3}{2}-13=0$
$\Rightarrow 8x-12y-3x-6+\frac{9}{2}y-\frac{27}{2}-13=0$
$\Rightarrow 16x-24y-6x-12+9y-27-26=0$
$\Rightarrow 10x-15y-65=0\Rightarrow 2x-3y=13$

67. $x^2 + y^2 = 13$ বৃত্তের $(3, 2)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ কোনটি?

(a) $3x - 2y = 13$ (b) $3x + 2y = 13$
(c) $3y + 2x = 0$ (d) $3y - 2x = 0$

সমাধান: (d); $(3, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $3x + 2y = 13$ এর লম্ব রেখা যা $(3, 2)$ বিন্দুগামী: $2x - 3y = 6 - 6 \Rightarrow 2x - 3y = 0 \Rightarrow 3y - 2x = 0$

68. $x = a\sin\theta, y = a\cos\theta$ কীসের সমীকরণ?

(a) বৃত্ত (b) পরাবৃত্ত (c) সরলরেখা (d) উপবৃত্ত

সমাধান: (a); $\frac{x}{a} = \sin\theta \ldots\ldots\ldots (i)$

$\frac{y}{a} = \cos\theta \ldots\ldots\ldots (ii)$

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$; বৃত্তের সমীকরণ।

69. $kx^2 + 2y^2 - 4x - 12y + 11 = 0$ সমীকরণটি বৃত্ত নির্দেশ করলে k এর মান কত?

(a) -2 (b) 0 (c) 2 (d) 4

সমাধান: (c); বৃত্তে x^2 ও y^2 এর সহগ সমান। $\therefore k = 2$

70. 2 একক বাহু বিশিষ্ট OABC একটি বর্গ; OA ও OC কে অক্ষ ধরে অঙ্কিত পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ কত একক?

(a) $\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{2}$ (c) 2 (d) $4\sqrt{2}$

সমাধান: (a); কর্ণ $OB = 2\sqrt{2}$ একক

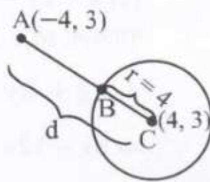
$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $OE = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ একক।

71. $(-4, 3)$ বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 9 = 0$ বৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দুর সর্বনিম্ন দূরত্ব কত একক?

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8

সমাধান: (b); বৃত্তের কেন্দ্র $(4, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r = 4$

কাজেই $(-4, 3)$ হতে বৃত্তের সর্বনিম্ন দূরত্ব,



$AB = AC - r = d - r$
$= \sqrt{(4-4)^2 + (3-3)^2} - 4$
$= 8 - 4 = 4$ একক।

এ.টি.এস.এম. মাসুদুল হাকিম স্যার

72. $x^2 + y^2 + 2gy + 2fy + c = 0$ বৃত্তের ক্ষেত্রে–

(i) $g = 0$ হলে, বৃত্তের কেন্দ্র Y অক্ষের উপর অবস্থিত।
(ii) $f^2 = c$ হলে বৃত্তটি X অক্ষকে স্পর্শ করে।
(iii) $c = 0$ হলে, বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী।

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); $c = f^2$ হলে বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ

73. $x^2 + y^2 - 8x + 10y = 0$ বৃত্তের–

(i) কেন্দ্র $(-4, 5)$
(ii) x অক্ষের খণ্ডিতাংশ 8 একক
(iii) y অক্ষের খণ্ডিতাংশ 10 একক

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (c); কেন্দ্র $C\left(\frac{-8}{-2}, \frac{10}{-2}\right) \equiv (4, -5)$

x অক্ষের খন্ডিতাংশ $= 2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{4^2 - 0} = 8$ একক

y অক্ষের খন্ডিতাংশ $= 2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{5^2 - 0} = 10$ একক

74. সমীকরণ $p^2x^2 + 2px + qy + p^2y^2 = 0$ কি নির্দেশ করে?

(a) একজোড়া সরল রেখা (b) বৃত্ত
(c) পরাবৃত্ত (d) উপবৃত্ত

সমাধান: (b); $\because x^2$ ও y^2 এর সহগ একই এবং কোন xy পদ নেই তাই এটি বৃত্ত নির্দেশ করে।

75. $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 11 = 0$ বৃত্ত দুটির সাধারণ জ্যার বর্ধিত অংশ কর্তৃক y অক্ষের খণ্ডিতাংশ কত?

(a) -3.5 (b) 3.5 (c) -0.5 (d) 0.5

সমাধান: (d); সাধারণ জ্যা: $S_1 - S_2 = 0$

$\Rightarrow 2x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{1}{2}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1$

$\therefore$ y অক্ষের খণ্ডিতাংশ $\frac{1}{2} = 0.5$ একক

76. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 একক, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(5, 3)$; এর যে জ্যা $(3, 2)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য কত একক?

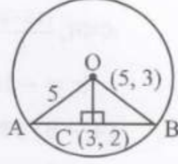
(a) $4\sqrt{5}$ (b) $4\sqrt{8}$ (c) $2\sqrt{5}$ (d) $3\sqrt{8}$

সমাধান: (a); $OC = \sqrt{(5-3)^2 + (3-2)^2}$

$= \sqrt{5}$ একক।

$\therefore AB = 2.AC = 2\sqrt{OA^2 - OC^2}$

$= 2.\sqrt{25-5} = 4\sqrt{5}$ একক



77. $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তে $y = c$ রেখাটি স্পর্শক হওয়ার শর্ত–

(a) $c = 0$ (b) $c = \pm 1$
(c) $c = \pm 2$ (d) $c = \pm 3$

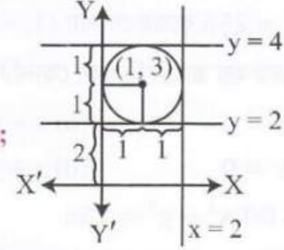
সমাধান: (c); বৃত্তের কেন্দ্র (0, 0) ব্যাসার্ধ = 2 একক

$\because \frac{|0-c|}{\sqrt{1}} = 2 \Rightarrow c = \pm 2$

78. এমন একটি বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় কর যা Y অক্ষ ও $x = 2, y = 2, y = 4$ রেখাত্রয়কে স্পর্শ করে।

(a) (1, 1) (b) (3, 1)
(c) (1, 3) (d) None of them

সমাধান: (c);



বৃত্তের কেন্দ্র $C(1, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ $= 1$

79. দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ $x - 2y + 7 = 0$। একটি বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$ হলে অপর বৃত্তটির সমীকরণ কোনটি?

(a) $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 43 = 0$
(b) $x^2 + y^2 - 5x + 8y + 43 = 0$
(c) $x^2 + y^2 + 5x + 8y - 43 = 0$
(d) $x^2 + y^2 - 5x - 8y - 43 = 0$

সমাধান: (a); সাধারণ জ্যায়ের সমীকরণ, $S_1 - S_2 = 0$ শুধুমাত্র (a) এর বৃত্ত এবং প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ বিয়োগ করলেই সাধারণ জ্যায়ের সমীকরণ পাওয়া যায়।

MCQ: সম্ভাব্য নমুনা প্রশ্ন ও সমাধান

01. যদি একটি সরলরেখা দুইটি বৃত্তকে স্পর্শ করে তবে রেখাটিকে বৃত্তদ্বয়ের কী বলে? [Ans: d]

(a) ব্যাসার্ধ (b) ব্যাস
(c) পরিধি (d) সাধারণ স্পর্শক

02. $x^2 + (y-1)^2 + 2(y-1) = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র কত?

(a) (0, −1) (b) (0, 0) (c) (0, 1) (d) (0, 2)

সমাধান: (b); $x^2 + (y-1)^2 + 2(y-1) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 + 2y - 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

$\therefore$ কেন্দ্র (0, 0)

03. $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ বৃত্তের মূলবিন্দুগামী ব্যাসের সমীকরণ কোনটি?

(a) $3x - 4y = 0$ (b) $4x + 3y = 0$
(c) $x - 4y = 0$ (d) $3x + y = 0$

সমাধান: (b); কেন্দ্র, (−3,4) $\therefore$ সমীকরণ, $y = mx$

$\Rightarrow y = \frac{4}{(-3)}x \Rightarrow 4x + 3y = 0$

04. k এর কোন মানের জন্য $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$ বৃত্ত প্রকাশ করবে?

(a) −2 (b) −1 (c) 1 (d) 2

সমাধান: (d); $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$

$k = 2$ হতে হবে যাতে xy কোন পদ না থাকে।

05. $3x^2 + 3y^2 - x + \frac{y}{2} - 5 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র-

(a) $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}\right)$
(c) $\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ (d) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

সমাধান: (a); $x^2 + y^2 - \frac{1}{3}x + \frac{y}{6} - \frac{5}{3} = 0$; কেন্দ্র $\left(\frac{1}{6}, \frac{-1}{12}\right)$

06. নিচের কোন বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে?

(a) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 4 = 0$
(b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$
(c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$
(d) $2x^2 + 2y^2 - 6y + 3 = 0$

সমাধান: (c); $g^2 = c$ অনুসারে।

07. $x^2 + y^2 + 2x + c = 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করলে c এর মান কত?

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) 2

সমাধান: (c); x অক্ষকে স্পর্শ করলে $c = g^2$

$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0 \therefore c = 1$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 + y^2 - 2x = 0 \cdots\cdots\cdots$ (i)

$2x^2 + 2y^2 - 4x - 20y + 26 = 0 \cdots\cdots\cdots$ (ii) দুটি বৃত্ত

08. (i) নং ও (ii) নং বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রের দূরত্ব কত?

(a) 5 (b) 10 (c) $\sqrt{101}$ (d) 20

সমাধান: (a); কেন্দ্র $c_1 = (1,0)$; $c_2 = (1,5)$;

দূরত্ব $= \sqrt{0 + (5^2)} = 5$

09. $x^2 + y^2 = 256$ বৃত্তের যে জ্যা $(1, -1)$ বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার সমীকরণ কোনটি?

(a) $x - y = 0$ (b) $x - y = 2$
(c) $x + y = 0$ (d) $x + y = 2$

সমাধান: (b); $x^2 + y^2 = 256$

এর কেন্দ্র $(0, 0)$ ও $(1, -1)$ সংযোগকারী রেখা $x + y = 0$

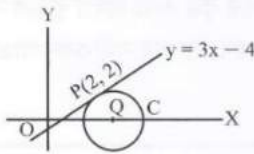
$x + y = 0$ এর ওপর লম্ব ও $(1, -1)$ বিন্দুগামী রেখা $x - y = 2$

10. বৃত্তের কেন্দ্র $(5, 2)$ এবং এটি $(7, 3)$ বিন্দু দিয়ে যায়। বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য-

(a) $2\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{5}$ (c) $3\sqrt{5}$ (d) $4\sqrt{5}$

সমাধান: (a); ব্যাস $= 2\sqrt{(2)^2 + (1)^2} = 2\sqrt{5}$

11.



চিত্রে বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $y = 3x - 4$ যা বৃত্তকে $P(2, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তের কেন্দ্র Q.

P বিন্দুগামী ব্যাসের ঢাল-

(a) $-\frac{1}{3}$ (b) 3 (c) $\frac{3}{4}$ (d) -3

সমাধান: (a); $y = 3x - 4$; $m_1 = 3$

$\therefore m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{3}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী।

12. c এর মান কত?

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0

সমাধান: (d); মূলবিন্দুগামী বলে $c = 0$

13. বৃত্তটি দ্বারা y অক্ষ থেকে ছেদকৃত অংশের দৈর্ঘ্য কত?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8

সমাধান: (b); ছেদাংশের পরিমাণ $= 2\sqrt{f^2 - c} = 6$

14. k এর মান কত হলে $3x + 4y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে?

(a) $-40, -10$ (b) $40, -10$
(c) $-40, 10$ (d) $40, 10$

সমাধান: (b); বৃত্তের কেন্দ্র, $= (5,0)$; ব্যাসার্ধ $= 5$

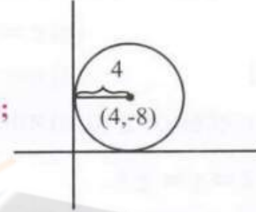
এখন, $\frac{|15-k|}{5} = 5 \Rightarrow |15 - k| = 25$

$\therefore k = -10$ or $k = 40$

15. $(4, -8)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 8

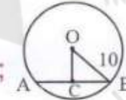
সমাধান: (c);



16. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(11, 2)$ এবং ব্যাসার্ধ 10; বৃত্তটির একটি জ্যা এর মধ্যবিন্দু $(2, -1)$ হলে, জ্যা এর দৈর্ঘ্য নিচের কোনটি?

(a) $2\sqrt{10}$ (b) $4\sqrt{5}$ (c) $4\sqrt{10}$ (d) $3\sqrt{10}$

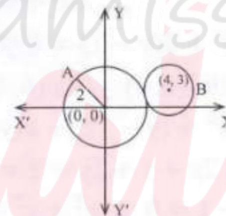
সমাধান: (a);



$OC = \sqrt{(11-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{90}$

$\therefore AB = 2 \times \sqrt{OB^2 - OC^2} = 2\sqrt{10}$

নিচের চিত্রটি লক্ষ কর এবং পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



17. B বৃত্তের ব্যাসার্ধ নিচের কোনটি?

(a) 7 একক (b) 6 একক (c) 8 একক (d) 3 একক

সমাধান: (d); $r_A + r_B = \sqrt{4^2 + 3^2}$

$\Rightarrow r_B = 5 - r_A = 5 - 2 = 3$ একক

18. B বৃত্তের সমীকরণ নিচের কোনটি?

(a) $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$
(b) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0$
(c) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$
(d) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 16 = 0$

সমাধান: (c); $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$

19. $r = |h| = |k|$ এবং $g^2 = f^2 = c$ হলে, বৃত্তের কেন্দ্র হবে– **[Ans: c]**

(a) (h, k) (b) (h, h)
(c) $(\pm h, \pm h)$ (d) কোনটিই নয়

20. বৃত্তের কেন্দ্র মূল বিন্দু হলে-

(a) $g^2 = c$ (b) $f^2 = c$
(c) $c = 0$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: **(d)**; $x^2 + y^2 + c = 0$ হবে equation

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x - y - 5 = 0$ রেখাটি $(3, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের একটি স্পর্শক।

21. বৃত্তটি কর্তৃক x অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ কত?

(a) $\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{2}$ (c) 4 (d) $\sqrt{4}$

সমাধান: **(c)**; ব্যাসার্ধ $= \frac{|3-2-5|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$\therefore$ ছেদাংশ $= 2.\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2.\sqrt{8-4} = 4$

22. পরিধিস্থ $p(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ–

(a) $y_1 = \frac{1}{x_1}$ (b) $y = \frac{1}{x_1}$ (c) $y = \frac{x_1}{y_1}$ (d) $y = \frac{y_1 x}{x_1}$

সমাধান: **(d)**; স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1 + yy_1 = a^2$

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ $y_1 x - x_1 y = x_1 y_1 - x_1 y_1$

$\Rightarrow y = \frac{y_1 x}{x_1}$

23. $x + y = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে কোনটি সঠিক?

(a) $a^2 - 2a = 1$ (b) $a^2 + 2a = 1$
(c) $a^2 + 2a = 2$ (d) $a^2 - 2a = -1$

সমাধান: **(b)**; $x + y = 1, x^2 + y^2 - 2ax = 0$ কে স্পর্শ করে। $\therefore y = 1 - x \therefore x^2 + (1 - x)^2 - 2ax = 0$

$\Rightarrow x^2 + x^2 - 2x + 1 - 2ax = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x(a + 1) + 1 = 0$

$\therefore 4(a + 1)^2 - 8 = 0 \Rightarrow (a + 1)^2 = 2$

$\Rightarrow a^2 + 2a = 1$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$

24. নিচের কোন রেখাটি বৃত্তটিকে সমান দুই ভাগে বিভক্ত করে?

(a) $x - 2y = 0$ (b) $3x + y = 0$
(c) $x + 3y = 0$ (d) $x + 2y = 0$

সমাধান: **(c)**; $(3, -1)$ বিন্দুতে যে রেখা সিদ্ধ করে।

$x + 3y = 3 + 3(-1) = 0$

25. নিচের কোনটি বৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং ব্যাস 3? **[Ans: c]**

(a) $x^2 + y^2 = \frac{9}{2}$ (b) $2x^2 + 4y^2 = 9$
(c) $4x^2 + 4y^2 = 9$ (d) $x^2 + y^2 = 9$

26. $x^2 + y^2 = a^2$ এর অন্তঃলিখিত সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

(a) $\sqrt{3}a$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$
(c) $\sqrt{a^2 + 1}$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: **(a)**; 

বাহুর দৈর্ঘ্য P হলে ত্রিভুজের sine সূত্র অনুযায়ী,

$\frac{P}{\sin 60^\circ} = 2a \Rightarrow P = \sqrt{3}a$

27. $x^2 + y^2 = 37$ কোন বিন্দু দিয়ে যায়?

(a) $(-5, 3)$ (b) $(6, 2)$
(c) $(5, 2\sqrt{3})$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: **(c)**; $5^2 + (2\sqrt{3})^2 - 37 = 0$

28. $2x + 3y + 1 = 0$ এর উপর অবস্থিত ২ টি বিন্দু $A \equiv \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ এবং $B \equiv \left(5, -\frac{11}{3}\right)$ হলে এরূপ কতটি বৃত্ত আঁকা যাবে যা A I B বিন্দুগামী হবে?

(a) 1 টি (b) 2 টি
(c) 3 টি (d) কোনটিই নয়

সমাধান: **(d)**; ২ টি বিন্দুগামী অসংখ্য বৃত্ত আঁকা সম্ভব।

সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

◆ **CQ: বিগত বছরসমূহের বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান:**

01. দৃশ্যকল্প-১: $f(x,y) = 3x - 4y - 5$ এবং $g(x,y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9$. **[DB'22]**

দৃশ্যকল্প-২: $(5,3)$ ও $(-5,7)$ বিন্দুদ্বয় একটি বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু।

(ক) $g(x,y) = 0$ বৃত্ত দ্বারা y-অক্ষের খণ্ডিত অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর। 2

(খ) দেখাও যে, দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত $f(x,y) = 0$ রেখাটি $g(x,y) = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ অনুযায়ী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। নির্ণেয় বৃত্ত ও $f(x,y) = 0$ রেখার ছেদবিন্দু ও মূলবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণও নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $g(x,y) = 0$ অর্থাৎ, $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

(i) নং বৃত্তটিকে বৃত্তের আদর্শ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই, $a = 1, b = 1, c = 9$

$\therefore g = -\frac{6}{2} = -3$ এবং $f = \frac{8}{2} = 4$ $\therefore$ y -অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ $= 2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{4^2 - 9} = 2\sqrt{7}$ **(Ans.)**

খ. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$

বৃত্তটির কেন্দ্র, $(3,-4)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 - 9} = \sqrt{9 + 16 - 9}$

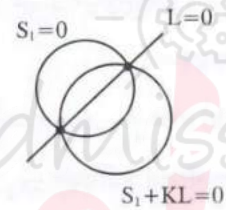
$r = 4$ একক

এখন, কেন্দ্র $(3,-4)$ হতে $f(x,y) = 0$ বা $3x - 4y - 5 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব,

$d = \left|\frac{3.3 - 4(-4) - 5}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}\right| = \left|\frac{9 + 16 - 5}{\sqrt{25}}\right| = \left|\frac{20}{5}\right| = 4$ একক

এখানে, $d = r$ $\therefore f(x.y) = 0$ রেখাটি $g(x,y) = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। **(Showed)**

গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে পাই, $(5,3)$ ও $(-5,7)$ বিন্দুদ্বয় একটি বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু।



$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ, $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

$\Rightarrow (x - 5)(x + 5) + (y - 3)(y - 7) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 25 + y^2 - 10y + 21 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 10y - 4 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

$f(x,y) = 0 \Rightarrow 3x - 4y - 5 = 0 \ldots\ldots\ldots. (ii)$

এখন, (i) নং বৃত্ত ও (ii) নং রেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ-

$(x^2 + y^2 - 10y - 4) + k(3x - 4y - 5) = 0 \ldots\ldots\ldots (iii)$

(ii) নং বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী।

$\therefore (0 + 0 - 0 - 4) + k(0 - 0 - 5) = 0 \Rightarrow -4 - 5k = 0 \therefore k = -\frac{4}{5}$

$\therefore (iii) \Rightarrow (x^2 + y^2 - 10y - 4) - \frac{4}{5}(3x - 4y - 5) = 0$

$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 50y - 20 - 4(3x - 4y - 5) = 0 \Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 50y - 20 - 12x + 16y + 20 = 0$

$\therefore 5x^2 + 5y^2 - 12x - 34y = 0$

02. **[RB'22]**

Y, A(1,2), B(3,2), X', D, -10,0, O, X, C, OD হলো বৃত্তটির একটি ব্যাস, y = 2x, Y'

(ক) $r(1 + \cos\theta) = 2$ সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর। 2

(খ) OC জ্যাকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) A ও B বিন্দুগামী বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করলে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

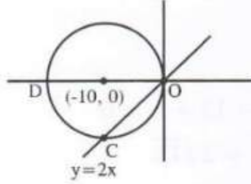
ক. কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক, $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$; $r^2 = x^2 + y^2 \therefore r = \sqrt{x^2+y^2}$

এখন, $r(1+\cos\theta) = 2 \Rightarrow r + r\cos\theta = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} + x = 2$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = (2-x) \Rightarrow x^2+y^2 = (2-x)^2 \Rightarrow x^2+y^2 = 2^2 - 2.2.x + x^2$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow y^2 = 4 - 4x \therefore y^2 + 4x - 4 = 0$

খ.



OD বৃত্তের ব্যাস ∴ কেন্দ্র $(-10, 0)$, বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে। ∴ ব্যাসার্ধ, $r = |\text{কেন্দ্রের ভুজ}| = |-10| = 10$

∴ OD ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্ত s_1 এর সমীকরণ।

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \Rightarrow (x+10)^2 + (y-0)^2 = 10^2$

$\Rightarrow x^2 + 20x + 100 + y^2 = 100 \Rightarrow x^2 + y^2 + 20x = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

আবার, $y = 2x$ এর সাথে s_1 বৃত্তের ছেদবিন্দু নির্ণয়ের ক্ষেত্রে- $x^2 + (2x)^2 + 20x = 0 \Rightarrow x^2 + 4x^2 + 20x = 0$

$\Rightarrow 5x^2 + 20x = 0 \Rightarrow 5x(x+4) = 0 = x(x+4) = 0$

হয়, $x = 0$ অথবা, $x + 4 = 0 \therefore x = -4$

$x = 0$ হলে, $y = 2.0 = 0$; $x = -4$ হলে, $y = 2.(-4) = -8$

∴ s_1 বৃত্ত ও $y = 2x$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $O(0,0)$ এবং $C(-4,-8)$ এখন, OC জ্যা কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ-

$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$

$\Rightarrow (x-0)\{x-(-4)\} + (y-0)\{y-(-8)\} = 0 \Rightarrow x(x+4) + y(y+8) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 4x + y^2 + 8y = 0 \therefore x^2 + y^2 + 4x + 8y = 0$

ইহাই OC জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ।

গ. বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

বৃত্তটি $A(1,2)$ বিন্দুগামী।

$(i) \Rightarrow 1^2 + 2^2 + 2g.1 + 2f.2 + c = 0 \Rightarrow 5 + 2g + 4f + c = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

বৃত্তটি $B(3,2)$ বিন্দুগামী।

$(ii) \Rightarrow 3^2 + 2^2 + 2g.3 + 2f.2 + c = 0 \therefore 13 + 6g + 4f + c = 0 \ldots\ldots\ldots (iii)$

বৃত্তটি x অক্ষকে সম্পর্শ করে।

$\therefore 2\sqrt{g^2 - c} = 0 \Rightarrow \sqrt{g^2 - c} = 0 \Rightarrow g^2 - c = 0 \therefore g^2 = c \ldots\ldots\ldots (iv)$

এখন, $(iii) - (ii) \Rightarrow (13 + 6g + 4f + c) - (5 + 2g + 4f + c) = 0$

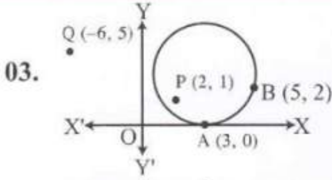
$\Rightarrow 13 + 6g - 5 - 2g = 0 \Rightarrow 8 + 4g = 0 \Rightarrow 4g = -8 \Rightarrow g = -\frac{8}{4} \therefore g = -2$

এবং $(iv) \Rightarrow g^2 = c \Rightarrow (-2)^2 = c \therefore c = 4$

আবার, $(ii) \Rightarrow 5 + 2g + 4f + c = 0 \Rightarrow 5 + 2(-2) + 4f + 4 = 0 \Rightarrow 5 - 4 + 4f + 4 = 0 \Rightarrow 4f = -5 \Rightarrow f = -\frac{5}{4}$

(i) নং সমীকরণ $g. f$ ও C এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 + 2.(-2)x + 2\left(-\frac{5}{4}\right)y + 4 = 0 \therefore 4x^2 + 4y^2 - 16x - 10y + 16 = 0$

03. 

[Ctg.B'22]

(ক) $x^2 + y^2 = 121$ বৃত্তের পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) P ও Q বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তটি কর্তৃক অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

(গ) 'O' মূলবিন্দু থেকে A ও B বিন্দুগামী বৃত্তের উপর অঙ্কিত অপর স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $x^2 + y^2 = 121 \Rightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 121 \Rightarrow r^2 = 121 \Rightarrow r = 11$

খ. P(2, 1) এবং Q(−6, 5) ; $(x-2)(x+6) + (y-1)(y-5) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 + 5 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$; x অক্ষ কর্তৃক খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{4+7} = 2\sqrt{11}$

y অক্ষ কর্তৃক খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{9+7} = 2 \times 4 = 8$

গ. O মূলবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ: $y = mx \Rightarrow mx - y = 0$; বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... ... (i)

x অক্ষকে স্পর্শ করে, $g^2 = c$; (i) নং বৃত্ত (3, 0) এবং (5, 2) বিন্দুগামী হওয়ায়,

$9 + 0 + 2g \times 3 + 0 + g^2 = 0 \Rightarrow g^2 + 6g + 9 = 0 \Rightarrow (g+3)^2 = 0 \therefore g = -3 ; c = 9$

$5^2 + 2^2 + 2 \times (-3) \times 5 + 2 \times f \times 2 + 9 = 0 \Rightarrow 25 + 4 - 30 + 4f + 9 = 0 \Rightarrow 4f + 8 = 0 \Rightarrow f = -2$

$\therefore$বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{9 + 4 - 9} = 2$ একক

ধরি, মূলবিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ, $y = mx \therefore mx - y = 0$

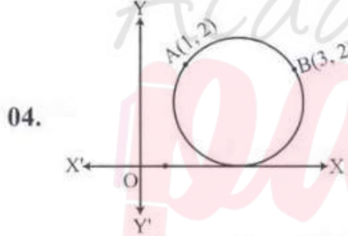
আমরা জানি, কেন্দ্র হতে স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হয়।

কেন্দ্র (3, 2) এবং ব্যাসার্ধ = 2

$\therefore \left|\frac{3m-2}{\sqrt{1+m^2}}\right| = 2 \Rightarrow (3m-2)^2 = 4(1+m^2) \Rightarrow 9m^2 - 12m + 4 = 4 + 4m^2 \Rightarrow 5m^2 - 12m = 0$

$\Rightarrow m(5m - 12) = 0 \therefore m = 0, \frac{12}{5}$

$\therefore$ অপর স্পর্শকের ঢাল, $m = \frac{12}{5} \therefore$ অপর স্পর্শকের সমীকরণ, $y = \frac{12}{5}x \therefore 12x - 5y = 0$

04. 

[SB'22]

(ক) $2x^2 + 2y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$ বৃত্তটি দ্বারা y অক্ষের খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 2

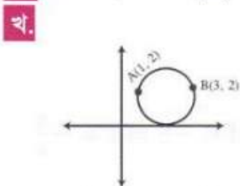
(খ) উদ্দীপকের আলোকে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) মূলবিন্দু থেকে বৃত্তটির অপর স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 01 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ.



ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... ... (i)

যেহেতু, বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে, তাই $g^2 = c \therefore$ (i) $\Rightarrow x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + g^2 = 0$ ... ... (ii)

বৃত্তটি $A(1,2)$ বিন্দুগামী। $\therefore$ (ii) $\Rightarrow 1^2+2^2+2g+4f+g^2=0 \therefore 2g+4f+g^2=-5$ ……… (iii)

বৃত্তটি $B(3,2)$ বিন্দুগামী। $\therefore$ (ii) $\Rightarrow 3^2+2^2+6g+4f+g^2=0 \therefore 6g+4f+g^2=-13$ ……… (iv)

(iv) − (iii) হতে, $6g+4f+g^2-2g-4f-g^2=-13+5 \Rightarrow 4g=-8 \therefore g=-2$

আবার, (iii) $\Rightarrow -4+4f+4=-5 \therefore f=-\frac{5}{4}$ আবার, $c=g^2=(-2)^2=4$

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ: $x^2+y^2-4x-\frac{10}{4}y+4=0$ $\boxed{\therefore 2x^2+2y^2-8x-5y+8=0}$

গ. 'খ' হতে পাই, বৃত্তটির সমীকরণ- $x^2+y^2-4x-\frac{5}{2}y+4=0$; $g=-2, f=-\frac{5}{4}, c=4$

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র $\left(2, \frac{5}{4}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{(-2)^2+\left(-\frac{5}{4}\right)^2-4}=\frac{5}{4}$

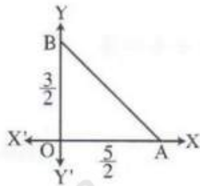
ধরি, মূলবিন্দু থেকে স্পর্শকের সমীকরণ, $y=mx \therefore mx-y=0$

এখন, কেন্দ্র হতে স্পর্শকের দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ

$\Rightarrow \left|\frac{2m-\frac{5}{4}}{\sqrt{1+m^2}}\right|=\frac{5}{4} \Rightarrow \left(2m-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}(1+m^2) \Rightarrow 4m^2-2.2m.\frac{5}{4}+\frac{25}{16}=\frac{25}{16}+\frac{25m^2}{16}$

$\Rightarrow 4m^2-5m=\frac{25m^2}{16} \Rightarrow 64m^2-80m=25m^2 \Rightarrow 39m^2-80m=0 \Rightarrow m(39m-80)=0 \therefore m=0, \frac{80}{39}$

$\therefore$ মূলবিন্দু থেকে অপর স্পর্শকের ঢাল $=\frac{80}{39}$ $\therefore$ অপর স্পর্শকের সমীকরণ, $y=mx \Rightarrow y=\frac{80}{39}x$ $\boxed{\therefore 80x-39y=0}$

05. 

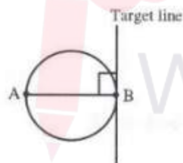
[BB'22]

(গ) AB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ ও B বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

গ. A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x_1,y_1)=\left(\frac{5}{2},0\right)$; B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x_2,y_2)=\left(0,\frac{3}{2}\right)$

এখন, AB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ



$(X-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0 \Rightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)(x-0)+(y-0)\left(y-\frac{3}{2}\right)=0$

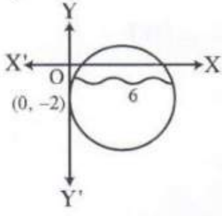
$\Rightarrow \left(\frac{2x-5}{2}\right)x+y\left(\frac{2y-3}{2}\right)=0 \Rightarrow \frac{2x^2-5x}{2}+\frac{2y^2-3y}{2}=0 \therefore 2x^2+2y^2-5x-3y=0$ ……… (i)

(i) নং বৃত্তে $B\left(0,\frac{3}{2}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ- $2\cdot x\cdot 0+2y\cdot\frac{3}{2}-5\left(\frac{x+0}{2}\right)-3\left(\frac{y+\frac{3}{2}}{2}\right)=0$

$\Rightarrow 0+3y-\frac{5x}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{2y+3}{2}=0 \Rightarrow 3y-\frac{5x}{2}-\frac{6y+9}{4}=0 \Rightarrow 12y-10x-6y-9=0$

$\Rightarrow 6y-10x-9=0 \therefore$ $\boxed{10x-6y+9=0}$

06. দৃশ্যকল্প-২: **[BB'22]**



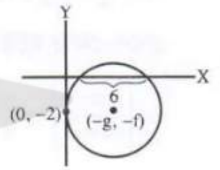
(ক) $\mathbf{r = b\sin 2\theta}$ কে কার্তেসীয় সমীকরণে রূপান্তর কর। 2

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ প্রদর্শিত বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

গ. দৃশ্যকল্প-২: এখানে, $-g$ ধনাত্মক এবং $-f$ ঋণাত্মক



ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = \ldots\ldots\ldots (i)$

বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে। $\therefore f^2 = c$

আবার, বৃত্তটি $(0, -2)$ বিন্দুগামী

$\therefore (i) \Rightarrow 0^2 + (-2)^2 + 2g\cdot 0 + 2f(-2) + c = 0 \Rightarrow 4 - 4f + c = 0 \Rightarrow 4 - 4f + f^2 = 0$

$\Rightarrow 4 - 4f + f^2 = 0 \Rightarrow (f-2)^2 = 0 \therefore f = 2 \therefore c = f^2 = 2^2 = 4$

আবার, বৃত্তটি দ্বারা x অক্ষের খন্ডিত অংশ, $2\sqrt{g^2 - c} = 6 \Rightarrow \sqrt{g^2 - c} = 3 \Rightarrow \sqrt{g^2 - 4} = 3 \Rightarrow g^2 = 9 + 4 \therefore = \pm\sqrt{13}$

কিন্তু, বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$ চতুর্ভাগে হওয়ায় $-g$ এর মান ঋণাত্মক। অর্থাৎ, g এর মান ঋণাত্মক।

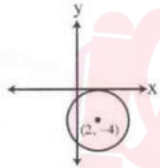
$\therefore g = -\sqrt{13}$; এখন, (i) নং সমীকরণে g, f, c এর মান বসিয়ে পাই, $x^2 + y^2 - 2\sqrt{13}x + 2\cdot 2\cdot y + 4 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 2\sqrt{13}\cdot x + 4y + 4 = 0$ (Ans.)

07. (ক) একটি বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(2, -4)$, উহা x-অক্ষকে স্পর্শ করিলে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **[BB'22]**

সমাধান

ক.

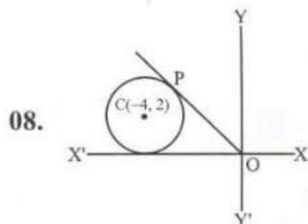


বৃত্তটির কেন্দ্র, $(2, -4)$, বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ, $|$কেন্দ্রের কোটি$| = |-4| = 4 \therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+4)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 4 + y^2 + 8y + 16 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 8y + 4 = 0$

08. **[JB'22]**



(ক) $(1, 3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত y-অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) বৃত্তটির একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু $(-5, 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত। 4

(গ) OP স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, বৃত্তের কেন্দ্র (1,3)

বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে,

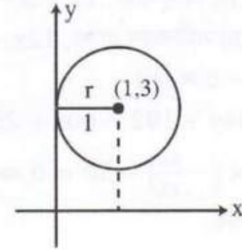
$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $r = |h| = 1$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1^2$

$\Rightarrow x^2 + 1 - 2x + y^2 + 9 - 6y - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ হলো: $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$



খ. দেওয়া আছে,

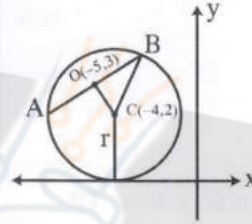
বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $C = (-4,2)$

এটি x অক্ষকে স্পর্শ করে,

অতএব, ব্যাসার্ধ, $r = |k| = 2$

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ: $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 2^2$

ধরি, AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু $O = (-5,3)$



OC রেখাংশের সমীকরণ হলো: $\frac{x+4}{-4+5} = \frac{y-2}{2-3} \Rightarrow x + 4 = -(y-2) \Rightarrow x + y + 2 = 0$

$\therefore$ AB জ্যা এর সমীকরণ হলো: $x - y + k = 0$

এটি O বিন্দুগামী, $\therefore -5 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = 8$ $\therefore$ জ্যা এর সমীকরণ হলো: $x - y + 8 = 0$

গ. দেওয়া আছে,

বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $C(-4,2)$

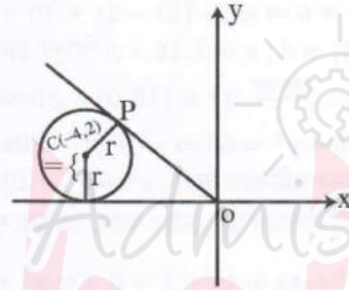
বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে,

$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $r = |k| = 2$

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ হলো: $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 2^2$

OP স্পর্শকটি মূলবিন্দুগামী,

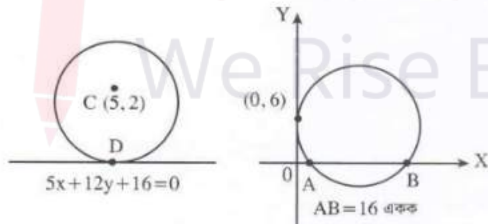
$\therefore$ এর সমীকরণ হলো: $y = mx \Rightarrow y - mx = 0$



কেন্দ্র থেকে OP স্পর্শকের দূরত্ব হলো ব্যাসার্ধের সমান।

$\therefore \frac{|2+4m|}{\sqrt{1^2+m^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|1+2m|}{\sqrt{1^2+m^2}} = 1 \Rightarrow (1+2m)^2 = 1 + m^2 \Rightarrow 1^2 + 4m^2 + 4m - m^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3m^2 + 4m = 0$

$\Rightarrow m(3m+4) = 0 \therefore m \neq 0$; $m = \frac{-4}{3}$; OP স্পর্শকের সমীকরণ: $y + \frac{4}{3}x = 0 \Rightarrow 3y + 4x = 0$

09.  **[CB'22]**

(ক) **(2,2) বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।** 2

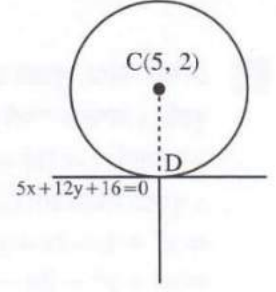
(খ) **C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের স্পর্শবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।** 4

(গ) **AB জ্যা বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।** 4

সমাধান

ক. (2, 2) বিন্দু হতে, $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য, $d = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + 4 \times 2 - 2 \times 2 + 4}$
$= \sqrt{4+4+8} = \sqrt{16} = 4$ একক। $\therefore$ (2, 2) বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 4 একক

খ. স্পর্শবিন্দু D ও বৃত্তের কেন্দ্র C বিন্দুগামী $5x + 12y + 16 = 0$ ... ... (i) এর উপর লম্ব।



$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ হলো, $12x - 5y + k = 0$

এটি, C(5, 2) বিন্দুগামী, $12 \times 5 - 5 \times 2 + k = 0 \Rightarrow 60 - 10 + k = 0 \Rightarrow k = -50$

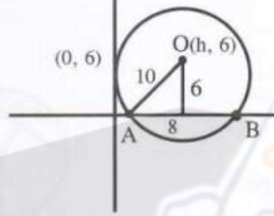
$\therefore$ CD রেখার সমীকরণ হলো, $12x - 5y - 50 = 0$ ... ... (ii)

$12 \times (i) - 5 \times (ii)$

$60x + 144y + 192 - 60x + 25y + 250 = 0 \Rightarrow 169y + 442 = 0 \Rightarrow y = -\frac{34}{13}$

$12x - 5 \times \left(-\frac{34}{13}\right) - 50 = 0 \Rightarrow x = \frac{40}{13}$ $\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{40}{13}, -\frac{34}{13}\right)$

গ. চিত্র হতে পাই,



কেন্দ্র, $O = (h, 6)$ ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটির সমীকরণ হলো, $(x - h)^2 + (y - 6)^2 = 10^2$ ... ... (i)

বৃত্তটি (0, 6) বিন্দুগামী $\therefore (0 - h)^2 + (6 - 6)^2 = 10^2 \Rightarrow h^2 = 100 \Rightarrow h = 10$ [O প্রথম চতুর্ভাগে]

$\therefore (i) \Rightarrow (x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 10^2$

'x' অক্ষে y এর মান শূন্য, $(x - 10)^2 + (-6)^2 = 10^2 \Rightarrow x^2 + 100 - 20x + 36 = 100$

$\Rightarrow x^2 - 20x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 18x - 2x + 36 = 0 \Rightarrow x(x - 18) - 2(x - 18) = 0$

$\Rightarrow (x - 2)(x - 18) = 0$; $x = 2, 18$ $\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 0), B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (18, 0)

AB এর মধ্যবিন্দু, $C = \left(\frac{2+18}{2}, 0\right) = (10, 0)$ $\therefore$ AB জ্যা বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ হলো, $(x - 10)^2 + (y - 0)^2 = 8^2$

$\Rightarrow x^2 - 20x + 100 + y^2 = 64 \Rightarrow x^2 + y^2 - 20x + 36 = 0$

$\therefore$ AB জ্যা বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ হলো, $x^2 + y^2 - 20x + 36 = 0$

সুতরাং, এদের কোনো সাধারণ জ্যা নেই। ফলে, কোনো বৃত্ত-ও আঁকা সম্ভব নয়।

10. উদ্দীপক-২: $\mathbf{x^2 + y^2 + 4x + 4y + 1 = 0}$ এবং $\mathbf{x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0}$ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ। **[CB'22]**

(গ) উদ্দীপক-২ এ উল্লিখিত বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

গ. $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 1 = 0$ ... ... (i) ; $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ ... ... (ii)

বৃত্তে (i) এর কেন্দ্র, $c_1(-2, -2)$; বৃত্ত (ii)এর কেন্দ্র, $c_2\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$

বৃত্ত (i) এর ব্যাসার্ধ, $r_1 = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 - 1} = \sqrt{7} \approx 2.6457$

বৃত্ত (ii) এর ব্যাসার্ধ, $r_2 = \sqrt{(2)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{\sqrt{17}}{2} \approx 2.06$

কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $c_1c_2 = \sqrt{(-2 + 2)^2 + \left(-2 + \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$

যেহেতু, ব্যাসার্ধদ্বয়ের পার্থক্য, $\Delta r = (r_1 - r_2) = (2.65 - 2.06) = 0.33$

যেহেতু $c_1c_2 > \Delta r$; অতএব, বৃত্ত r_2, r_1 এর ভেতরে অবস্থান করে।

11. $\mathbf{x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0}$ ও $\mathbf{x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0}$ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ। **[Din.B'22]**

(ক) $\mathbf{r = 4\cos\theta}$ বৃত্তটির কেন্দ্রের কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত প্রথম বৃত্তের একটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $\mathbf{3x + 4y - 1 = 0}$ এর সমান্তরাল। 4

(গ) উদ্দীপকে বর্ণিত বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. দেওয়া আছে, $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ ……… (I)

বৃত্তটির একটি স্পর্শক $3x + 4y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল। ∴ স্পর্শকের সমীকরণ: $3x + 4y + k = 0$

বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(h, k) = (3, -1)$, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 - 1} = 3$

বৃত্তের কেন্দ্র হতে যেকোনো স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান।

$\therefore \frac{|3\times3+4\times(-1)+k|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 3 \Rightarrow \frac{|5+k|}{5} = 3 \Rightarrow 5 + k = \pm15 \therefore k = 15 - 5 = 10$ আবার, $k = -15 - 5 = -20$

∴ স্পর্শকের সমীকরণ: $3x + 4y + 10 = 0$ এবং $3x + 4y - 20 = 0$

গ. দেওয়া আছে, দুটি বৃত্তের সমীকরণ, $y_1 = x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ এবং $y_2 = x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$

বৃত্ত দুটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ: $y_1 - y_2 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 - x^2 - y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow -10x + 5 = 0 \therefore x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$ এর মান y_1 -এ বসিয়ে পাই, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 6\times\left(\frac{1}{2}\right) + 2y + 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{4} + y^2 - 3 + 2y + 1 = 0 \Rightarrow 4y^2 + 1 - 12 + 8y + 4 = 0 \Rightarrow 4y^2 + 8y - 7 = 0$

$\therefore y = \frac{-2\pm\sqrt{11}}{2}$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{-2+\sqrt{11}}{2}\right) \left(\frac{1}{2}, \frac{-2-\sqrt{11}}{2}\right)$

ব্যাসের প্রান্তবিন্দুবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ: $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{-2+\sqrt{11}}{2}\right)\left(y - \frac{-2-\sqrt{11}}{2}\right) = 0$

12. $A(1, 1)$ বিন্দুটি $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের উপর অবস্থিত। রেখাত্রয়ের সমীকরণ $x = 0, y = 0, x = a$. **[MB'22]**

(ক) যদি $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে তবে c এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) A বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। A বিন্দুগামী বস্তুটির স্পর্শকের সমীকরণও নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকে প্রদত্ত রেখাত্রয়কে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$; বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে

$2\sqrt{g^2 - c} = 0 \Rightarrow g^2 - c = 0 \Rightarrow g^2 = c \Rightarrow c = (-2)^2 \Rightarrow c = 4 \therefore c = 4$

খ. দেওয়া আছে, $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তটির কেন্দ্র, $c = \left(\frac{4}{-2}, \frac{6}{-2}\right) = (-2, -3)$

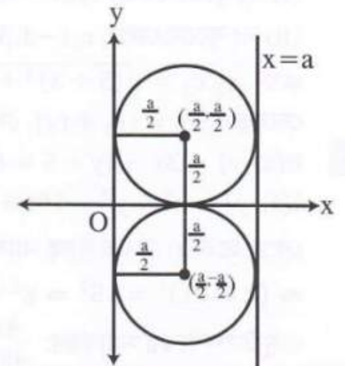
A বিন্দুটি হলো $(1, 1)$ ধরি, A বিন্দুগামী জ্যা-এর অপর প্রান্ত, $B(x, y)$

অতএব, AB জ্যা c বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। ∴ AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) \therefore \frac{x+1}{2} = -2$

$\Rightarrow x + 1 = -4 \Rightarrow x = -5$ আবার, $\frac{y+1}{2} = -3 \Rightarrow y + 1 = -6 \Rightarrow y = -7$

∴ A বিন্দুগামী ব্যাস এর অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক হলো $(-5, -7)$

গ. চিত্র হতে পাই,



$x = 0, y = 0$ এবং $x = a$ রেখাত্রয়কে স্পর্শ করে এরূপবৃত্তের ব্যাসার্ধ হবে, $r = \frac{a}{2}$

বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $c\left(\frac{a}{2}, \pm\frac{a}{2}\right)$

∴ বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণ হলো, $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y \pm \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$\Rightarrow x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2x \times \frac{a}{2} + y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pm 2y\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow x^2 + \frac{a^2}{4} - xa + y^2 + \frac{a^2}{4} \pm ya = \frac{a^2}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 - xa \pm ya + \frac{a^2}{4} = 0$

∴ বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণ হলো: $x^2 + y^2 - xa + ya + \frac{a^2}{4} = 0,$

$= x^2 + y^2 - xa - ya + \frac{a^2}{4} = 0$

13. দৃশ্যকল্প-১: $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ $4x + 3y + 26 = 0$. [MB'22]
দৃশ্যকল্প-২: $(1, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে।
(ক) $r = 4\sin\theta$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2
(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর বৃত্তটির দুটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা প্রদত্ত জ্যা-এর উপর লম্ব। 4
(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটি দ্বারা y-অক্ষের খণ্ডিত অংশের পরিমাণও নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 02 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. দৃশ্যকল্প-০১: দেওয়া আছে, $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$
বৃত্তটির একটি জ্যা এর সমীকরণ, $4x + 3y + 26 = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$
(ii) এর লম্বরেখার সমীকরণ, $3x - 4y + k = 0 \ldots\ldots\ldots (iii)$
বৃত্তের এর কেন্দ্র, $c = (2, -4)$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2 - 16} = 2$
যেহেতু, (iii) বৃত্তটির স্পর্শক সুতরাং কেন্দ্র হতে এর লম্ব দূরত্ব বৃত্তটির ব্যাসার্ধের সমান।
$\therefore \frac{|3\times2-4(-4)+k|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|6+16+k|}{5} = 2 \Rightarrow |22 + k| = 10 \Rightarrow 22 + k = \pm10 \therefore k = 10 - 22 = -12$
অথবা, $k = -32 \therefore$ স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ, $3x - 4y - 12 = 0$; $3x - 4y - 32 = 0$

গ. দৃশ্যকল্প-০২: কেন্দ্র $= (1, 2)$ এবং বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে। যেহেতু, x অক্ষকে স্পর্শ করে।
সুতরাং ব্যাসার্ধ, $= |k| = |2| = 2 \therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ, $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + 1^2 - 2x + y^2 + 4 - 4y = 4$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \therefore$ y অক্ষের খণ্ডিতাংশ, $d = 2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{(-2)^2 - 1} = 2\sqrt{4-1} = 2\sqrt{3}$
$\therefore$ y অক্ষের খণ্ডিতাংশ হলো $2\sqrt{3}$

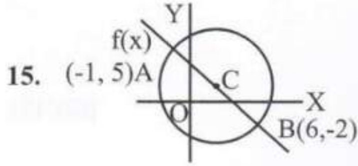
14. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 10x + 6y + 25$ [DB'19]
$g(x, y) = x^2 + y^2 + 6x - 6y - 31$
$h(x, y) = 3x - 4y + 5$.
(ক) $g(x, y) = 0$ বৃত্তটি x অক্ষ হতে যে পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর। 2
(খ) দেখাও যে, $f(x, y) = 0$ ও $g(x, y) = 0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। 4
(গ) $f(x, y) = 0$ বৃত্তের দুটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $h(x, y) = 0$ রেখায় উপর লম্ব। 4

সমাধান

ক. $g(x, y) = x^2 + y^2 + 6x - 6y - 31 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$
(i) কে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g = 3,\ c = -31$
$\therefore$ x অক্ষ হতে কর্তিত অংশ $= 2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{3^2 + 31} = 2\sqrt{40} = 4\sqrt{10}$ **(Ans.)**

খ. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 10x + 6y + 25 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$
$g(x, y) = x^2 + y^2 + 6x - 6y - 31 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$
(i) ও (ii) বৃত্তকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,
(i) নং বৃত্তের কেন্দ্র, $c_1(5, -3)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_1 = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = 3$ একক
(ii) নং বৃত্তের কেন্দ্র, $c_2(-3, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_2 = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = 7$ একক
এখন, $c_1 c_2 = \sqrt{(5+3)^2 + (-3-3)^2} = 10$ একক, এবং ব্যাসার্ধদ্বয়ের যোগফল $= (3 + 7) = 10$ একক
যেহেতু $c_1 c_2 = (r_1 + r_2)$, সেহেতু বৃত্তদ্বয় অবশ্যই পরস্পরকে বহি: স্থভাবে স্পর্শ করে। (দেখানো হল)

গ. $h(x, y) = 3x - 4y + 5 = 0$ এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ: $4x + 3y + k = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$
$f(x, y) = x^2 + y^2 - 10x + 6y + 25 = 0$ এর কেন্দ্র $(5, -3)$; ব্যাসার্ধ $r = 3$.
কেন্দ্র হতে (i) রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধ r এর সমান। $\therefore \left|\frac{4\times5-3\times3+k}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = 3 \Rightarrow |k + 11| = 3 \times 5$
$\Rightarrow (k + 11)^2 = 15^2 \Rightarrow k^2 + 22k - 104 = 0 \Rightarrow k = 4 \text{ or } -26$
$\therefore$ দুটি স্পর্শকের সমীকরণ: $\left.\begin{matrix} 4x + 3y + 4 = 0 \\ 4x + 3y - 26 = 0 \end{matrix}\right\}$ **(Ans.)**

15. 

[RB'19]

(খ) উদ্দীপকের C কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তটি দ্বারা x-অক্ষের ছেদাংশ নির্ণয় কর। 4

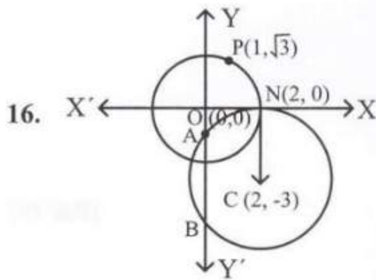
সমাধান

খ. C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাস AB. $A(-1,5), B(6,-2)$ ∴ বৃত্তের সমীকরণ: $(x+1)(x-6)+(y-5)(y+2)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-5x-3y-16=0 \cdots\cdots (i)$

(i) কে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এর সাথে তুলনা করে, $\overset{2g=-5}{\boxed{g=-\frac{5}{2}}} \Rightarrow \overset{2f=-3}{\boxed{f=-\frac{3}{2}}}$, $c=-16$

x অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $=2\sqrt{g^2-c}=2\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2+16}=\sqrt{89}$ একক **(Ans.)**

16. 

[Ctg.B'19]

(খ) O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের P বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ = OP ; $OP=r=\sqrt{(1-0)^2+(\sqrt{3}-0)^2}$

$r=2$; বৃত্তের সমীকরণ: $x^2+y^2=r^2 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=4}$

∴ $P(1,\sqrt{3})$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $xx_1+yy_1-r^2=0 \Rightarrow x.1+y.\sqrt{3}-4=0 \Rightarrow \boxed{x+\sqrt{3}y-4=0}$

$p(1,\sqrt{3})$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ: $y_1x-x_1y+0=0 \Rightarrow \boxed{\sqrt{3}x-y=0}$ **(Ans.)**

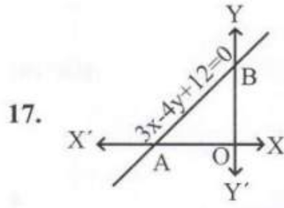
গ. $C(2,-3)$ কেন্দ্র ও NC ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তটি y অক্ষকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

∴ ব্যাসার্ধ, $NC=\sqrt{(2-2)^2+(-3-0)^2}$; $\boxed{NC=3}$

∴ বৃত্তের সমীকরণ: $(x-2)^2+(y+3)^2=3^2$ ∴ y অক্ষে, $x=0$ ∴ $(0-2)^2+(y+3)^2=9$

$\Rightarrow (y+3)^2=5 \Rightarrow y+3=\pm\sqrt{5} \Rightarrow \boxed{y=-3\pm\sqrt{5}}$

∴ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $A(0,-3+\sqrt{5})$ ∴ B ন্দুর স্থানাঙ্ক, $B(0,-3-\sqrt{5})$ **(Ans.)**

17. 

[SB'19]

(গ) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার কেন্দ্র **AB** রেখার উপর এবং যা মূলবিন্দু ও $\mathbf{x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0}$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়। 4

সমাধান

গ. প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(2, 4)$, মূলবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ:$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0 \ldots\ldots (i)$

$(2, 4)$ বিন্দু দিয়ে (i) নং বৃত্তটি গেলে, $4 + 16 + 4g + 8f = 0 \therefore 4g + 8f = -20 \ldots\ldots (ii)$

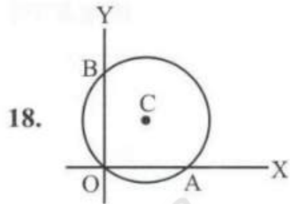
(i) এর কেন্দ্র$(-g, -f)$

$3x - 4y + 12 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত বলে, $3(-g) - 4(-f) + 12 = 0$

$\therefore 3g - 4f = 12 \ldots\ldots (iii)$

(ii) ও (iii) সমাধান করে, $g = \frac{2}{5},\ \ f = -\frac{27}{10}$

$\therefore$ বৃত্তটি: $x^2 + y^2 + \frac{4}{5}x - \frac{27}{5}y = 0 \therefore 5x^2 + 5y^2 + 4x - 27y = 0$ **(Ans.)**

18. 

[BB'19]

OA = 3 একক এবং OB = 5 একক।

(খ) চিত্রে প্রদর্শিত বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) **O** যদি একটি ব্যাসের একটি প্রান্ত বিন্দু হয়, তবে ঐ ব্যাসের অপর প্রান্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, বৃত্তটি মূলবিন্দু দিয়ে যায়, $\therefore c = 0$

এখন, $2\sqrt{g^2 - c} = 3 \Rightarrow g^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore g = -\frac{3}{2}$ [$\because$ কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে]

আবার, $2\sqrt{f^2 - c} = 5 \Rightarrow f^2 = \frac{25}{4} \therefore f = -\frac{5}{2} \therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 3x - 5y = 0$ **(Ans.)**

গ. 'খ' হতে পাই বৃত্তের সমীকরণ,$x^2 + y^2 - 3x - 5y = 0$; কেন্দ্র $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

ধরি, ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দু (α, β); $\frac{\alpha+0}{2} = \frac{3}{2} \ \therefore \ \alpha = 3$; $\frac{\beta+0}{2} = \frac{5}{2} \ \therefore \ \beta = 5$

এখন, $(3, 5)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $x.3 + y.5 - 3.\frac{x+3}{2} - 5.\frac{y+5}{2} = 0$

$\Rightarrow 6x + 10y - 3x - 9 - 5y - 25 = 0 \ \ \therefore 3x + 5y - 34 = 0$ **(Ans.)**

19. $\mathbf{x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \ldots\ldots (i)}$ [JB'19]

$\mathbf{3x - 4y - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)}$

(খ) এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা **(i)** এ বর্ণিত বৃত্তটির কেন্দ্র ও **(3, 2)** বিন্দু দিয়ে যায় এবং **x** অক্ষকে স্পর্শ করে। 4

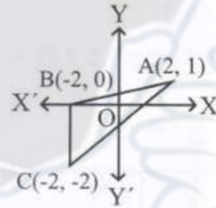
(গ) **(i)** নং বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা **(ii)** নং রেখার উপর লম্ব। 4

সমাধান

খ. ধরি, বৃত্তটি, $x^2+y^2+2gx+2fy+g^2=0$ [$\because$ x অক্ষকে স্পর্শ করে]
$(3,2) \Rightarrow 6g+4f+g^2=-13 \ldots\ldots$ (i)
কেন্দ্র $(1,2) \Rightarrow 2g+4f+g^2=-5 \ldots.$ (ii)
(i) − (ii) $\Rightarrow 4g=-8 \quad \therefore g=-2$
$\therefore f=\frac{-13-g^2+12}{4}=-\frac{5}{4} \therefore x^2+y^2-4x-\frac{5}{2}y+4=0 \therefore 2x^2+2y^2-8x-5y+8=0$ **(Ans.)**

গ. (ii) এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $4x+3y+k=0 \ldots\ldots\ldots$ (i)
ব্যাসার্ধ $=\sqrt{1^2+2^2+4}=3 \therefore \left|\frac{4.1+3.2+k}{\sqrt{4^2+2^2}}\right|=3 \Rightarrow 10+k=\pm 15 \therefore k=5,-25$
$\therefore$ স্পর্শকদ্বয় $4x+3y+5=0$ ও $4x+3y-25=0$ **(Ans.)**

20. দৃশ্যকল্প-১: **[CB'19]**



(গ) **(5, 4)** বিন্দু হতে **ΔABC** পরিবৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

সমাধান

গ. ধরি, ΔABC-এর পরিবৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$
A বিন্দুর ক্ষেত্রে,$4+1+4g+2f+c=0 \quad \therefore 4g+2f+c=-5 \ldots\ldots$ (i)
B বিন্দুর ক্ষেত্রে,$4-4g+c=0 \quad \therefore -4g+c=-4 \ldots\ldots$ (ii)
C বিন্দুর ক্ষেত্রে,$4+4-4g-4f+c=0 \quad \therefore -4g-4f+c=-8 \ldots\ldots$ (iii)
(i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ সমাধান করে পাই, $g=-\frac{3}{8},\ f=1,\ c=-\frac{11}{2}$
$\therefore$ পরিবৃত্তের সমীকরণ,$x^2+y^2-\frac{3}{4}x+2y-\frac{11}{2}=0 \therefore 4x^2+4y^2-3x+8y-22=0$
$\therefore$ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(5)^2+(4)^2+2\times\left(-\frac{3}{8}\right)5+2\times1\times4-\frac{11}{2}}=6.305$ একক **(Ans.)**

21. $\mathbf{x^2+y^2-8x-6y+16=0 \ldots\ldots}$ **(i)** **[CB'19]**
$\mathbf{x^2+y^2=4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$ **(ii)**
(ক) $\mathbf{x^2+y^2-3x=0}$ বৃত্তটিকে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর। 2
(খ) উদ্দীপকের বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4
(গ) উদ্দীপকের বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ তৈরি করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

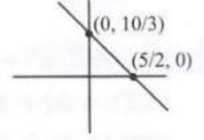
সমাধান

ক. $x^2+y^2-3x=0 \Rightarrow r^2=3x \Rightarrow r^2=3.r\cos\theta \quad \therefore r=3\cos\theta$ **(Ans.)**

খ. (i) বৃত্তের সমীকরণ,$x^2+y^2-8x-6y+16=0 \quad \therefore$ কেন্দ্র$(4,3)$ এবং ব্যাসার্ধ $=3$ একক
(ii) বৃত্তের সমীকরণ,$x^2+y^2=4 \quad \therefore$ কেন্দ্র$(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $=2$ একক
এদের স্পর্শবিন্দু (4, 3) ও (0, 0) এর সংযোজক রেখাকে 3 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।
$\therefore$ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{3\times0+2\times4}{3+2}, \frac{3\times0+2\times3}{3+2}\right)$ বা $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$ **(Ans.)**

গ. $x^2+y^2-8x-6y+16=0$ ..... (i)

$x^2+y^2-4=0$ ...... (ii)



(ii) − (i) $\Rightarrow 8x+6y-20=0 \Rightarrow 4x+3y=10 \quad \therefore \frac{2x}{5}+\frac{3y}{10}=0 \quad \therefore \frac{x}{5/2}+\frac{y}{10/3}=0$

∴ ক্ষেত্রফল= $\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{10}{3}=\frac{25}{6}$ বর্গ একক

[উদ্দীপকের বৃত্ত দুটি পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করেছে। তাই সাধারণ জ্যা থাকা সম্ভব নয়। সাধারণ স্পর্শক ব্যবহার করে অঙ্কটি করা হয়েছে] **(Ans.)**

22. দৃশ্যকল্প-১: $6\sqrt{2}$ বাহু বিশিষ্ট বর্গের একটি শীর্ষ মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং এর বিপরীত শীর্ষ y অক্ষের উপর অবস্থিত।
দৃশ্যকল্প-২: $y=2$, $y=10$ এবং $x=0$ তিনটি সরলরেখার সমীকরণ। **[Din.B'19]**

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত বর্গের কর্ণকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

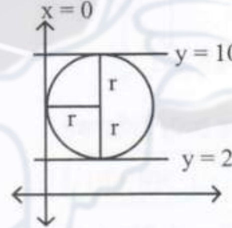
(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত রেখাত্রয়কে স্পর্শকারী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. বাহু $6\sqrt{2}$; কর্ণ = 12 একক ∴ বিন্দুদ্বয় $(0,\pm12),(0,0)$

$\therefore (x-0)(x-0)+(y-0)(y\pm12)=0 \Rightarrow x^2+y^2\pm12y=0$ **(Ans.)**

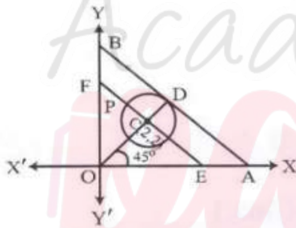
গ.



চিত্র হতে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ = $\frac{10-2}{2}=4$ একক ∴ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক$(4,2+4)\equiv(4,6)$

∴ বৃত্তের সমীকরণ: $(x-4)^2+(y-6)^2=4^2 \Rightarrow (x-4)^2+(y-6)^2=16$ **(Ans.)**

23. **[All.B'18]**



(ক) একটি বৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ $x^2=1-t^2$ এবং $y=t$ হলে বৃত্তটির কেন্দ্র নির্ণয় কর। 2

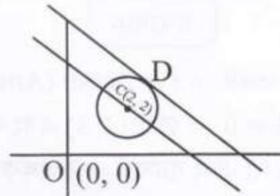
(গ) যদি $OD=3\sqrt{2}$ হয় তবে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $x^2=1-t^2$ ...... (i) ; $y=t$ ...... (ii)

y এর মান (i) এ বসিয়ে পাই, $x^2=1-y^2 \Rightarrow x^2+y^2=1$ ∴ কেন্দ্র (0,0) **(Ans.)**

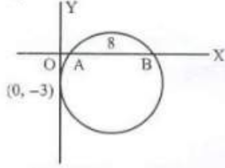
গ.



$OC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$; $OD=3\sqrt{2}$ ∴ ব্যাসার্ধ, $r=CD=OD-OC=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

∴ বৃত্তের সমীকরণ: $(x-2)^2+(y-2)^2=(\sqrt{2})^2 \therefore (x-2)^2+(y-2)^2=2$ **(Ans.)**

24. দৃশ্যকল্প-I **[DB'17]**



দৃশ্যকল্প-II: $3x + 4y = 2$

(ক) $r = 6\cos\theta + 4\sin\theta$ বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-I হতে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) নির্ণেয় বৃত্তের এরূপ দুটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা দৃশ্যকল্প-II রেখার উপর লম্ব হয়। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $r = 6\cos\theta + 4\sin\theta \Rightarrow r^2 = 6r\cos\theta + 4r\sin\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 6x + 4y$

$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{13})^2$, অতএব, বৃত্তটির কেন্দ্র (3, 2) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{13}$ একক। **(Ans.)**

খ. 02 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

গ. 'খ' হতে পাই, বৃত্তের কেন্দ্র $(5, -3)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(25 + 9 - 9)} = 5$

$3x + 4y = 2$ রেখার উপর লম্ব এরূপ যেকোনো রেখার সমীকরণ $4x - 3y + k = 0$ ... ... (i)

(i) নং রেখাটি নির্ণীত বৃত্তের স্পর্শক হলে, বৃত্তটির কেন্দ্র হতে রেখাটির লম্ব দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে।

অর্থাৎ, $\frac{|20+9+k|}{5} = 5 \Rightarrow |k + 29| = 25 \Rightarrow k + 29 = \pm 25 \Rightarrow k = -4, -54$

অতএব, নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $4x - 3y - 4 = 0$ এবং $4x - 3y - 54 = 0$ **(Ans.)**

25. $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 21 = 0, x^2 + y^2 = 9; x + y = 6.$ **[RB'17]**

(খ) দেখাও যে, উদ্দীপকের বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে $\left(-\frac{9}{5}; -\frac{12}{5}\right)$ বিন্দুতে বহি: স্থভাবে স্পর্শ করে। 4

(গ) উদ্দীপকের ১ম বৃত্ত ও রেখাটির ছেদবিন্দুগামী এবং ২য় বৃত্তের কেন্দ্রগামী বৃত্তটির দ্বারা x অক্ষ থেকে খণ্ডিত জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. প্রথম বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 21 = 0$

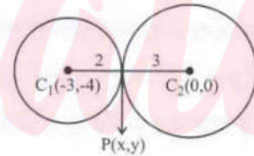
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2.3.x + 2.4.y + 21 = 0$

এখানে, $g = 3, f = 4, c = 21$

$\therefore$ কেন্দ্র $(-3, -4)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r_1 = \sqrt{3^2 + 4^2 - 21} = 2$

আবার, দ্বিতীয় বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2$

$\therefore$ কেন্দ্র, $c_2 \equiv (0,0)$



ব্যাসার্ধ, $r_2 = 3$, ধরি, P(x, y) বিন্দু c_1c_2 রেখাকে 2: 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করেছে। $\therefore x = \frac{2.0+3.(-3)}{2+3} = \frac{-9}{5}$

আবার, $y = \frac{2.0+3(-4)}{2+3} = \frac{-12}{5}$ $\therefore$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে $\left(\frac{-9}{5}, \frac{-12}{5}\right)$ বিন্দুতে বহি: স্থভাবে স্পর্শ করে। (দেখানো হলো)

গ. $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 21 = 0$ ... ... (i)

$x + y - 6 = 0$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) এর ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 21 + k(x + y - 6) = 0$ ... ... (iii)

যা দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র $\equiv (0,0)$ [খ থেকে প্রাপ্ত] বিন্দুগামী। $\therefore$ সিদ্ধ করে পাই, $0 + 21 + k(0 - 6) = 0 \Rightarrow 6k = 21 \Rightarrow k = \frac{7}{2}$

k এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই, $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 21 + \frac{7}{2}(x + y - 6) = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 12x + 16y + 42 + 7x + 7y - 42 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 19x + 23y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2.\frac{19}{4}x + 2.\frac{23}{4}y = 0$

এখানে, $g = \frac{19}{4}, f = \frac{23}{4}, c = 0$ $\therefore$ x অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= 2\sqrt{\left(\frac{19}{4}\right)^2 - 0} = 2.\frac{19}{4} = \frac{19}{2}$ একক। **(Ans.)**

26. দৃশ্যকল্প: $\mathbf{x^2 + y^2 - 10x - 16y + 64 = 0}$ একটি বৃত্ত এবং $\mathbf{4x + 3y + 8 = 0}$ একটি রেখা। **[Ctg.B'17]**

(ক) $\mathbf{2x^2 + 2y^2 + 4x + 6y + 8 = 0}$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। **2**

(খ) দেখাও যে, দৃশ্যকল্পের বৃত্তটিকে, $\mathbf{3x - 4y - 8 = 0}$ রেখাটি স্পর্শ করে এবং স্পর্শ বিন্দু নির্ণয় কর। **4**

(গ) $\mathbf{(0, -1)}$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা দৃশ্যকল্পের রেখাকে স্পর্শ করে। **4**

সমাধান

ক. প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ, $2x^2 + 2y^2 + 4x + 6y + 8 = 0 \Rightarrow 2(x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4) = 0$

$\Rightarrow (x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2) + \left(y^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}\right) + 4 = 0$

$\Rightarrow (x+1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + 4 - \frac{9}{4} - 1 = 0 \;\Rightarrow (x+1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$

সুতরাং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ= $\frac{\sqrt{3}}{2}i$; অর্থাৎ অবাস্তব বৃত্ত পাব। **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $x^2 + y^2 - 10x - 16y + 64 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2 \cdot 5 \cdot x - 2 \cdot (8) \cdot y + 64 = 0$

$\therefore$ কেন্দ্র $= (5, 8)$, ব্যাসার্ধ $= \sqrt{25 + 64 - 64} = 5$

কেন্দ্র $(5, 8)$ হতে $3x - 4y - 8 = 0$ এর লম্ব দূরত্ব $= \frac{|3\times5-4\times8-8|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|15-32-8|}{5}$

$= \frac{|-25|}{5} = 5$, যা বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান। $\therefore$ দৃশ্যকল্পের বৃত্তটি, $3x - 4y - 8 = 0$ রেখাটিকে স্পর্শ করে। **(দেখানো হলো)**

এখন, $3x - 4y - 8 = 0$ এর লম্ব রেখার সমীকরণ, $4x + 3y + k = 0$ যা $(5, 8)$ বিন্দুগামী

$4 \times 5 + 3 \times 8 + k = 0 \Rightarrow 20 + 24 + k = 0 \Rightarrow k = -44 \quad \therefore 4x + 3y - 44 = 0 \ldots\ldots (ii)$

$(i) \times 4 - (ii) \times 3$

$12x - 16y - 32 = 0$

$12x + 9y - 132 = 0$

$- \quad - \quad (+)$

$-25y + 100 = 0 \Rightarrow -25y = -100 \therefore y = 4$

y এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $(i) \Rightarrow 3x - 4 \times 4 - 8 = 0$

$\Rightarrow 3x - 16 - 8 = 0 \Rightarrow 3x - 24 = 0 \Rightarrow x = 8$ স্পর্শবিন্দু $(8, 4)$ **(Ans.)**

গ. $(0, -1)$ কেন্দ্র এবং r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-0)^2 + (y+1)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = r^2 \ldots\ldots (i)$

কেন্দ্র $(0, -1)$ হতে $4x + 3y + 8 = 0$ এর লম্ব দূরত্ব $= \frac{|4\times0+3\times(-1)+8|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|5|}{5} = 1$

শর্তমতে, $r = 1 \therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2y + 1 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2y = 0$ **(Ans.)**

27. তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\mathbf{A(a, -1), B(0, -2)}$ এবং $\mathbf{C(-2, -4)}$। **[SB'17]**

(গ) উদ্দীপকের আলোকে $\mathbf{\Delta ABC}$ এর ক্ষেত্রফল **1** হলে, **C** কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং **A** বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

গ. $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \;\therefore \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & +1 & 0 \\ 2 & +2 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(2a - 2) = 1 \Rightarrow 2a - 2 = 2$

$\therefore a - 1 = 1 \;\therefore a = 2 \therefore A \equiv (2,0)$, কেন্দ্র $C \equiv (-2, -4) \therefore g = 2, f = 4$

$\therefore r = \sqrt{(2+2)^2 + (0+4)^2} = 4\sqrt{2} \therefore c = (2)^2 + 4^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2 = -12$

$\therefore x^2 + y^2 + 4x + 8y - 12 = 0$ **(Ans.)**

28. দৃশ্যকল্প-১: $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 6 = 0 ; x + 2y + 1 = 0$ [BB'17]

(ক) $3x^2 + 3y^2 - 12x + 15y - 6 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। 2

(খ) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র দৃশ্যকল্প ১ দ্বারা প্রকাশিত রেখার উপর অবস্থিত এবং যা মূলবিন্দু ও দৃশ্যকল্প ১ দ্বারা প্রকাশিত বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়। 4

সমাধান

ক. 26 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2.\left(\frac{3}{2}\right)x + 2.\left(\frac{-5}{2}\right)y + 6 = 0$

এখানে, $g = \frac{3}{2}, f = \frac{-5}{2}$ $\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র $\equiv \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

ধরি, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ....(i)

(i) নং বৃত্ত $(0, 0)$ বিন্দুগামী $\therefore$ সিদ্ধ করে পাই, $0 + 0 + 0 + 0 + c = 0 \therefore c = 0$ আবার, (i) নং বৃত্ত $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ বিন্দুগামী

$\therefore$ সিদ্ধ করে পাই, $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2g\left(-\frac{3}{2}\right) + 2f\left(\frac{5}{2}\right) + c = 0 \Rightarrow \frac{9}{4} + \frac{25}{4} - 3g + 5f + 0 = 0$ $[\because c = 0]$

$\Rightarrow \frac{9+25-12g+20f}{9} = 0 \Rightarrow 34 - 12g + 20f = 0 \Rightarrow 17 - 6g + 10f = 0$ .... (ii)

আবার, (i) নং বৃত্তের কেন্দ্র $= (-g, -f)$ যা, $x + 2y + 1 = 1$ রেখার উপর অবস্থিত

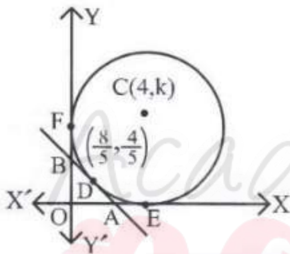
$\therefore$ সিদ্ধ করে পাই, $-g - 2f + 1 = 0 \Rightarrow g = 1 - 2f$ .... (ii)

g এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই, $17 - 6(1 - 2f) + 10f = 0$

$\Rightarrow 17 - 6 + 12f + 10f = 0 \Rightarrow 22f = -11 \therefore f = \frac{-1}{2}$

f এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই, $g = 1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 1 = 2$

এখন, g, f ও c এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $x^2 + y^2 + 2.2x + 2\left(-\frac{1}{2}\right)y + 0 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - y = 0$ **(Ans.)**

29. 

[JB'17]

(খ) এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা **C, E** ও **F** বিন্দু দিয়ে যায়। 4

(গ) বৃত্তটির **AB** স্পর্শকের সমান্তরাল অপর স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. এখানে, $CE = k = r \therefore (x - 4)^2 + (y - k)^2 = k^2 \therefore \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$ বৃত্তস্থ, $\therefore \left(\frac{8}{5} - 4\right)^2 + \left(\frac{4}{5} - k\right)^2 = k^2$

$\Rightarrow \frac{144}{25} + \frac{16}{25} - \frac{8}{5}k + k^2 = k^2 \Rightarrow \frac{144+16}{25} = \frac{8}{5}k; \therefore k = 4 \therefore E \equiv (4,0); \& F \equiv (0,4)$

ধরি, সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ যা $(4,4), (4,0), (0,4)$ এই তিনটি বিন্দুগামী

$\therefore 8g + 8f + c = -32$; $8f + c = -16$; $8g + c = -16$ $\therefore g = -2, f = -2, c = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ **(Ans.)**

গ. $C(4,4)$ এবং $D\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$ এর সংযোগকারী রেখার উপর লম্বরেখার ঢাল $= -\frac{4-\frac{8}{5}}{4-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

$\therefore AB \Rightarrow \left(y - \frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{8}{5}\right) \Rightarrow (5y - 4) = -\frac{3}{4}(5x - 8) \Rightarrow 20y - 16 = -15x + 24 \Rightarrow 15x + 20y = 40$

$\therefore 3x + 4y = 8; \therefore 3x + 4y - 8 = 0 \therefore$ নির্ণেয় স্পর্শক ধরি, $3x + 4y + c = 0$

$\therefore \left|\frac{3\times4+4\times4+c}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = 4 \Rightarrow \frac{c+12+16}{5} = \pm4$; $c + 28 = \pm20$ $\therefore c = -8, -48$

কিন্তু, $3x + 4y - 8 = 0$ হল, $\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$ বিন্দুগামী। $\therefore$ অপর স্পর্শক, $3x + 4y - 48 = 0$ **(Ans.)**

30. একটি রিকশার সামনের চাকা $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত। **[CB'17]**

(খ) প্রমাণ কর যে, রিকশাটির চাকার একটি স্পর্শক $x + y + 1 = 0$ 4

(গ) x অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা চাকাটির কেন্দ্র ও (3, 0) বিন্দুগামী হবে। 4

সমাধান

খ. বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2(-1)x + 2.0.y - 1 = 0$

এখানে, $g = -1, f = 0, c = -1$ ∴ বৃত্তের কেন্দ্র $\equiv (-g, -f) \equiv (1, 0)$ এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{(-1)^2 + 0^2 - (-1)} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ এখন, কেন্দ্র (1, 0) থেকে $x + y + 1 = 0$

রেখার লম্ব দূরত্ব $= \left|\frac{1+0+1}{\sqrt{(1^2+1^2)}}\right| = \left|\frac{2}{\sqrt{(2)}}\right| = |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

যেহেতু কেন্দ্র হতে $x + y + 1 = 0$ রেখাটির লম্ব দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান, অতএব রেখাটি বৃত্তের স্পর্শক। (প্রমাণিত)

গ. 'খ' থেকে পাই, চাকাটির কেন্দ্র $\equiv (1, 0)$ এবং প্রদত্ত অপরবিন্দু $\equiv (3, 0)$

ধরি, নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ……… (i)

এই বৃত্তের কেন্দ্র $\equiv (-g, -f)$, প্রশ্নমতে, কেন্দ্র x অক্ষের উপর অবস্থিত ∴ $-f = 0 \Rightarrow f = 0$

আবার, (i) নং বৃত্ত যথাক্রমে (1, 0) ও (3, 0) বিন্দুগামী।

∴ পর্যায়ক্রমে সিদ্ধ করে পাই, $1^2 + 0^2 + 2g.1 + 2f.0 + c = 0 \Rightarrow 1 + 2g + c = 0$ ………… (ii)

এবং $3^2 + 0^2 + 2.g.3 + 2.f.0 + c = 0 \Rightarrow 9 + 6g + c = 0$ …… (iii)

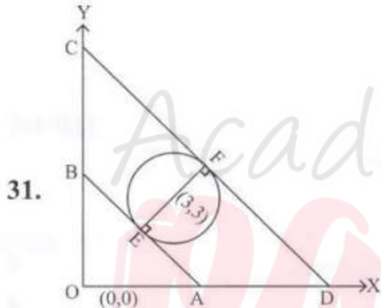
এখন, (iii) − (ii) থেকে পাই, $(9 + 6g + c) - (1 + 2g + c) = 0$

$\Rightarrow 8 + 4g = 0 \Rightarrow 4g = -8$ ∴ $g = -2$

g এর মান (ii) নং এ বসিয়ে, $1 + 2(-2) + c = 0 \Rightarrow c = 3$

এখন, g, f ও c এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই, $x^2 + y^2 + 2(-2)x + 2.0.y + 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ যা নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

31. 

[Din.B'17]

(ক) $3(x^2 - y^2) - 5x + y + 1 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। 2

(খ) OA = 4 এবং OB = 3 হলে চিত্রে প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) AB||CD হলে F ও D বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 28 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. ∴ AB এর সমীকরণ, $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ ∴ $3x + 4y = 12$

∴ (3, 3) হতে $3x + 4y - 12 = 0$ এর লম্ব দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \left|\frac{3\times3+4\times3-12}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = \left|\frac{9+12-12}{5}\right| = \frac{9}{5}$

∴ বৃত্তের সমীকরণ, $(x-3)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{9}{5}\right)^2$ **(Ans.)**

গ. ধরি, $CD \equiv 3x + 4y + c = 0$ ∴ $\frac{c+12}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm 2 \times \frac{9}{5} \Rightarrow \frac{c+12}{5} = \pm 2 \times \frac{9}{5}$ ∴ $c + 12 = \pm 18$ ∴ $c = 6, -30$.

∵ OD & OC(+ve) ∴ $c = -30$. ∴ $3x + 4y = 30$ …… (i) ∴ $D \equiv (10, 0)$

এখন, $3x + 4y = 12$ এর উপর লম্ব যা (3, 3) গামী ; $4x - 3y - 3 = 0$ এবং (i) এর ছেদবিন্দু F ∴ $F \equiv \left(\frac{102}{25}, \frac{111}{25}\right)$

∴ নির্ণেয় বৃত্ত $(x - 10)\left(x - \frac{102}{25}\right) + y\left(y - \frac{111}{25}\right) = 0$ **(Ans.)**

CQ: সম্ভাব্য প্রশ্ন ও সমাধান:

01. $(4, 1)$ ও $(3, 1)$ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। $x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

(ক) বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। 2

(খ) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উদ্দীপকের বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে এবং x অক্ষকে স্পর্শ করে। 4

(গ) $(4, 1)$ বিন্দু থেকে উদ্দীপকে উল্লেখিত বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. বোর্ড প্রশ্ন 26 (ক) এর অনুরূপ।

খ. ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, যেহেতু বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করছে সেহেতু, $c = g^2$

$\therefore x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + g^2 = 0 \ldots\ldots (i)$

বৃত্তটি (4,1) এবং (3,1) বিন্দুগামী $\therefore 16 + 1 + 8g + 2f + g^2 = 0$

$\Rightarrow g^2 + 8g + 2f + 17 = 0 \ldots\ldots (ii)$

আবার, $9 + 1 + 6g + 2f + g^2 = 0$

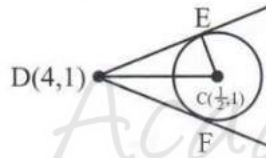
$g^2 + 6g + 2f + 10 = 0 \ldots\ldots (iii)$

$(ii) - (iii) \Rightarrow 2g + 7 = 0 \Rightarrow g = -\frac{7}{2} \therefore c = \frac{49}{4}$

g এর মান (iii)-এ বসাই $\frac{49}{4} - 21 + 2f + 10 = 0 \Rightarrow f = -\frac{5}{8}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2\left(-\frac{7}{2}\right)x + 2\left(-\frac{5}{8}\right)y + \frac{49}{4} = 0$

গ. প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0$

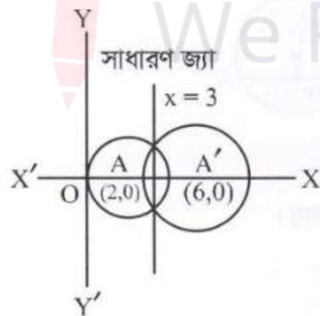


স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 1 = m(x - 4) \therefore mx - y + 1 - 4m = 0$

প্রশ্নমতে, $\left|\frac{\frac{m}{2} - 1 + 1 - 4m}{\sqrt{m^2+1}}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{-7m}{2\sqrt{m^2+1}}\right| = \frac{1}{2}$; [কেন্দ্র থেকে স্পর্শকের দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\Rightarrow 49m^2 = m^2 + 1 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{48} \therefore m = \pm\frac{1}{4\sqrt{3}} \therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 1 = \frac{1}{4\sqrt{3}}(x - 4); y - 1 = \frac{-1}{4\sqrt{3}}(x - 4)$ **(Ans.)**

02.



; এখানে A ও A′ বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র।

(ক) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তটি কোন শর্তে x অক্ষকে স্পর্শ করে। 2

(খ) $(6, 0)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) $(2, 0)$ বিন্দু হতে $(6, 0)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে অংকিত স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। 4

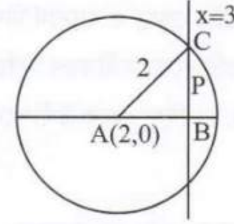
সমাধান

ক. শর্ত $c = g^2$

খ. Δ ABC- এ $AC^2 = BC^2 + AB^2$

$\Rightarrow BC^2 = AC^2 - AB^2 = 2^2 - 1^2 = 3 \Rightarrow BC = \sqrt{3} \Rightarrow p = \sqrt{3}$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাংক $(3, \sqrt{3})$



(6,0) কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $\sqrt{(6-3)^2 + (0-\sqrt{3})^2}$ একক $= 2\sqrt{3}$ একক।

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x-6)^2 + y^2 = 12$

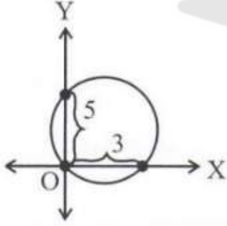
গ. (6,0) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{12}$

ধরি, (2,0) বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ, $y - 0 = m(x-2) \Rightarrow mx - y - 2m = 0$

প্রশ্নমতে, $\left|\frac{6m-2m}{\sqrt{m^2+1}}\right| = \sqrt{12} \Rightarrow |4m| = \sqrt{12}\sqrt{m^2+1} \Rightarrow 16m^2 = 12(m^2+1) \Rightarrow 4m^2 = 12 \Rightarrow m = \pm\sqrt{3}$

মধ্যবর্তী কোণ, $2\tan^{-1}\sqrt{3} = 120°$ **(Ans.)**

03.



(ক) বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) হলে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

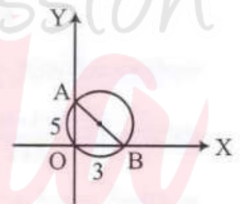
(খ) উদ্দীপকের বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) বৃত্তের যে জ্যা এর মধ্যবিন্দু $(1, 2)$ তার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

খ. বৃত্তটি ΔAOB এর পরিবৃত্ত।

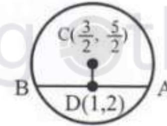


$\therefore$ AB ব্যাস B(3,0) এবং A(0,5)

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ $x(x-3) + y(y-5) = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 3x - 5y = 0$

গ. CD এর ঢাল, $\frac{\frac{5}{2}-2}{\frac{3}{2}-1} = 1$



$\therefore$ AB এর ঢাল, $= -1$ [$\because m_1m_2 = -1$, for perpendicular]

$\therefore$ AB এর সমীকরণ, $y - 2 = -(x-1)$ **(Ans.)**

04. $x = a(\cos\theta - 1)$ এবং $y = a(\sin\theta + 1)$ দ্বারা একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে।

(ক) $(1, 3)$ বিন্দু হতে $2x^2 + 2y^2 - 5x = 0$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপকে উল্লেখিত বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। 4

(গ) $a = \frac{1}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে, বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে। 4

সমাধান

ক. $2x^2 + 2y^2 - 5x = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{5x}{2} = 0$ $\therefore$ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{1^2 + 3^2 - \frac{5}{2} \times 1} = \frac{\sqrt{30}}{2}$ একক।

খ. দেওয়া আছে, $x = a(\cos\theta - 1) \Rightarrow \cos\theta - 1 = \frac{x}{a} \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{a} + 1 \cdots\cdots\cdots (i)$

আবার, $y = a(\sin\theta + 1) \Rightarrow \frac{y}{a} = \sin\theta + 1 \,;\, \sin\theta = \frac{y}{a} - 1 \cdots\cdots\cdots (ii)$

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow 1 = \left(\frac{x}{a}+1\right)^2 + \left(\frac{y}{a}-1\right)^2 \Rightarrow 1 = \left(\frac{x+a}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-a}{a}\right)^2 \therefore (x+a)^2 + (y-a)^2 = a^2 \therefore$ ব্যাসার্ধ $= a$

গ. $a = \frac{1}{2}$ হলে বৃত্তের সমীকরণটি দাড়ায়, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

x অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ, $2\sqrt{r^2 - k^2} = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0$

y অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ $= 2\sqrt{r^2 - h^2} = 0 \therefore$ x এবং y অক্ষকে স্পর্শ করে। (প্রমাণিত)

05. $x^2 + y^2 + 4x + 10y + c = 0$ বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে।

(ক) বৃত্তটির কেন্দ্র ও স্পর্শবিন্দু নির্ণয় কর। 2

(খ) বৃত্তটির সমীকরণ ও y অক্ষ থেকে তা কী পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর। 4

(গ) $A(-6, -2)$ বিন্দুটি বৃত্তটির উপর অবস্থিত হলে A বিন্দু দিয়ে বৃত্তটির যে ব্যাস অঙ্কন করা যায় তার অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 4x + 10y + c = 0$

বৃত্তের আদর্শ সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$g = 2, f = 5 \therefore$ কেন্দ্র: $(-g, -f) \equiv (-2, -5)$; যেহেতু বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore$ স্পর্শ বিন্দুর কোটি $= 0$ এবং স্পর্শ বিন্দুর ভুজ $=$ কেন্দ্রের ভুজ $= -2 \therefore$ স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-2,0)$ **(Ans.)**

খ. যেহেতু, বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\therefore c = g^2 \Rightarrow c = 2^2 \therefore c = 4 \therefore$ বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 4 = 0$

বৃত্তটি দ্বারা y অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ $= 2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{5^2 - 4} = 2\sqrt{21}$ **(Ans.)**

গ. $A(-6, -2)$ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক বৃত্তটির সমীকরণে বসিয়ে পাই, $(-6)^2 + (-2)^2 + 4(-6) + 10(-2) + 4$

$= 36 + 4 - 24 - 20 + 4 = 44 - 44 = 0$

$\therefore A(-6-2)$ বিন্দুটি বৃত্তের সমীকরণকে সিদ্ধ করে। সুতরাং A বিন্দুটি বৃত্তের উপর অবস্থিত।

ধরি, বৃত্তের ব্যাস $A(-6, -2)$ ও $B(a, b)$ বিন্দু দিয়ে যায়। বৃত্তের কেন্দ্র $(-2, -5)$AB কে সমদ্বিখন্ডিত করে।

$\therefore -2 = \frac{-6+a}{2} \Rightarrow a = -4 + 6 \therefore a = 2$

$-5 = \frac{-2+b}{2} \Rightarrow -2 + b = -10 \therefore b = -8 \therefore$ অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক $(2, -8)$ **(Ans.)**

06. দৃশ্যকল্প-১: $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 8 = 0$ এবং দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + y^2 + 6x + 12y + 8 = 0$

(ক) $(1, -3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x- অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ একটি বৃত্ত নির্দেশ করে। উক্ত বৃত্তের যে যে স্পর্শক $3x + 2y - 6 = 0$ রেখার উপর লম্ব তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকের বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. বৃত্তটির সমীকরণ, $(x-1)^2 + (y+3)^2 = (-3)^2$

খ. ধরি, স্পর্শকের সমীকরণটি $2x - 3y + k = 0$

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(-3, -2)$; ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{9 + 4 - 8} = \sqrt{5}$

$\therefore \left|\frac{-6+2.3+k}{\sqrt{2^2+3^2}}\right| = \sqrt{5} \Rightarrow |k| = \sqrt{65} \Rightarrow k = \pm\sqrt{65} \therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $2x - 3y \pm \sqrt{65} = 0$

গ. প্রদত্ত বৃত্ত দুটির সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 8 = 0 \ldots\ldots (i)$

$x^2 + y^2 + 6x + 12y + 8 = 0 \ldots\ldots (ii)$

$(ii) - (i)$ হতে পাই, $8y = 0, y = 0$; $y = 0$ (i) নং এ বসাই ; $x^2 + 6x + 8 = 0$

$x = -2, -4 \therefore$ ছেদবিন্দু $(-2,0)$ এবং $(-4,0) \therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ: $(x+2)(x+4) + (y-0)(y-0) = 0$

07. একটি বৃত্ত (1,2) ও (3,2) বিন্দু দিয়ে যায়।

(ক) প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখাকে ব্যাস ধরে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) প্রদত্ত বৃত্তটি যদি x-অক্ষকে স্পর্শ করে তাহলে এর সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রদত্ত বৃত্তটির কেন্দ্র $2x + y = 5$ রেখার উপর অবস্থিত হলে এর সমীকরণ এবং এর x-অক্ষের খন্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $(x-1)(x-3)+(y-2)(y-2)=0$

খ. যেহেতু x অক্ষকে স্পর্শ করে সেহেতু $c = g^2$ ∴ বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2+2gx+2fy+g^2=0$

বৃত্তটি (1,2) এবং (3,2) বিন্দু দিয়ে যায়

$\Rightarrow 1^2+2^2+2g.1+2f.2+g^2=0 \Rightarrow g^2+2g+4f+5=0 \cdots\cdots (i)$

এবং $3^2+2^2+2g.3+2f.2+g^2=0 \Rightarrow g^2+6g+4f+13=0 \cdots\cdots (ii)$

(i) − (ii) করে পাই, $4g=-8 \therefore g=-2$; অর্থাৎ, $c=4$

$g=-2$ হলে, $(-2)^2+2(-2)+4f+5=0 \therefore f=\frac{-5}{4}$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2+y^2-4x-\frac{5}{2}y+4=0$

গ. ধরি কেন্দ্র $(-g,-f)$ ∴ $f=-2g-5$ এবং বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+2gx-2(2g+5)y+c=0$

বৃত্তটি (1,2) এবং (3,2) বিন্দুগামী ∴ $1+4+2g-4(2g+5)+c=0 \Rightarrow -6g+c-15=0 \ldots\ldots (i)$

এবং $9+4+6g-2(2g+5).2+c=0 \Rightarrow -2g+c-7=0 \cdots\cdots (ii)$

$(ii)-(i) \Rightarrow 4g+8=0 \Rightarrow g=-2$

g এর মান (ii) নং এ বসাই $4+c-7=0 \Rightarrow c=3$ এবং $f=-2(-2)-5=-1$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2+y^2-4x-2y+3=0$ ∴ X অক্ষের খন্ডিতাংশ $2\sqrt{(-2)^2-3}=2$ একক।

08. একটি বৃত্তের সমীকরণ: $x^2+y^2+8x+4y-5=0$

(ক) $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের (x_1,y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) (3, −3) বিন্দু হতে প্রদত্ত বৃত্তে অবস্থিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর 4

(গ) (3, 3) বিন্দু হতে স্পর্শকের দৈর্ঘ্য এবং স্পর্শ জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. এই প্রশ্ন বোর্ড পরীক্ষায় আসছে তাই না রাখলেও চলবে।

সমীকরণ, $xx_1+yy_1=a^2$

খ. এই প্রশ্ন বোর্ড পরীক্ষায় আসছে তাই না রাখলেও চলবে।

কেন্দ্র (−4, −2); ব্যাসার্ধ $=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+5}=5$ একক।

স্পর্শকের সমীকরণ $y+3=m(x-3)$ হলে $\left|\frac{-4m+2-3m-3}{\sqrt{m^2+1}}\right|=5$

$\Rightarrow (-7m-1)^2=25(m^2+1) \Rightarrow 49m^2+1+14m=25m^2+25 \therefore m=\frac{3}{4},-\frac{4}{3}$

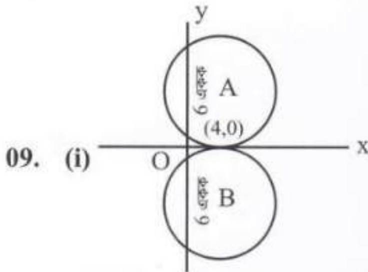
∴ স্পর্শকের সমীকরণ $y+3=\frac{3}{4}(x-3)$ এবং $y+3=-\frac{4}{3}(x-3)$

গ. (3,3) বিন্দু হতে স্পর্শকের দৈর্ঘ্য, $\sqrt{3^2+3^2+24+12-5}=7$

স্পর্শ জ্যা এর সমীকরণ, $\Rightarrow 3x+3y+4(x+3)+2(y+3)-5=0$

$\Rightarrow 3x+3y+4x+12+2y+6-5=0 \Rightarrow 7x+5y+13=0 \therefore 7x+5y+13=0$

09. (i)



(ii) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ একটি বৃত্ত।

(ক) $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 1 = 0$ এর সাথে এককেন্দ্রিক এবং $(2, 1)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক (ii) নং এ উল্লেখিত বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $3x - 4y - 1 = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল। 4

(গ) উদ্দীপক (i) এ উল্লেখিত বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. কেন্দ্র: $\left(2, -\frac{5}{2}\right)$; ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{(2-2)^2 + \left(-\frac{5}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-7}{2}\right)^2} = \frac{7}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ: $(x-2)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$

খ. কেন্দ্র, (1,2); ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4} = \sqrt{9} = 3$

ধরি, স্পর্শকটির সমীকরণ $3x - 4y + k = 0$

প্রশ্নমতে, $\left|\frac{3.1 - 4.2 + k}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = 3 \Rightarrow \left|\frac{-5+k}{5}\right| = 3 \Rightarrow |k - 5| = 15 \Rightarrow k - 5 = \pm 15$

$\therefore k = +20$ অথবা, -10

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $3x - 4y - 10 = 0$ অথবা, $3x - 4y + 20 = 0$

গ. ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

বৃত্তটি (4,0) বিন্দু দিয়ে যায় বলে, $4^2 + 2g(4) + g^2 = 0$ $[\because c = g^2]$

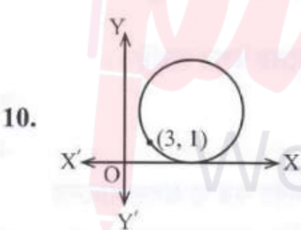
$\Rightarrow (g+4)^2 = 0 \therefore g = -4$; বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করায়, $c = g^2 \therefore c = 16$

আবার, y অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ 6 $\therefore 2\sqrt{f^2 - c} = 6 \Rightarrow f^2 - c = 9$

$\Rightarrow f^2 = 9 + 16 = 25 \therefore f = \pm 5 \therefore$ বৃত্তদ্বয়ের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2(-4)x \pm 2(5)y + 16 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x \pm 10y + 16 = 0$

10.



চিত্রে অঙ্কিত বৃত্তটি (3, 1) বিন্দুগামী ও x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং অপর একটি বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$

(ক) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3y = 12$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং y-অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 2

(খ) চিত্রে অংকিত বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর যা অপর বৃত্তের কেন্দ্রগামী। 4

(গ) মূলবিন্দু থেকে অপর বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. সমীকরণ: $x^2 + y^2 - 2x + \frac{3}{2}y - 6 = 0$; কেন্দ্র $= \left(1, -\frac{3}{4}\right)$; ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1 + \frac{9}{16} + 6} = \frac{11}{4}$

y অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{\frac{9}{16} + 6} = \frac{\sqrt{105}}{2}$

খ. অপর বৃত্তের কেন্দ্র (4,0) ∴ নির্ণেয় বৃত্তটি (4,0) এবং (3,1) বিন্দুগামী

বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করায় $c = g^2$ ∴ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + g^2 = 0$

(4,0) বিন্দুগামী $16 + 8g + g^2 = 0 \Rightarrow g^2 + 8g + 16 = 0 \;\therefore g = -4$

(3,1) বিন্দুগামী $9 + 1 + 6g + 2f + g^2 = 0 \Rightarrow 10 - 24 + 2f + 16 = 0 \therefore f = -1$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$

গ. ধরি, স্পর্শকের সমীকরণ, $y = mx \therefore mx - y = 0$; ব্যাসার্ধ $= \sqrt{4^2 - 8} = \sqrt{8}$

শর্তমতে, $\left|\frac{4m}{\sqrt{m^2+1}}\right| = \sqrt{8} \Rightarrow 16m^2 = 8m^2 + 8 \therefore m = \pm 1$ ∴ স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ $x + y = 0 ; x - y = 0$ **(Ans.)**

11. **১ম বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$**

২য় বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 = a^2$

(ক) ২য় বৃত্তটির জ্যা $(-2, 3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয়। জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [যখন $a = 9$] 2

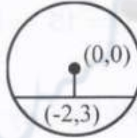
(খ) ১ম বৃত্তের একটি স্পর্শক $3x + Py - 1 = 0$ হলে P এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (4,3) এবং ২য় বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। [যখন $a = 2$] 4

সমাধান

ক. (0,0) এবং (−2,3) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $\frac{x-0}{0+2} = \frac{y-0}{0-3} \Rightarrow -3x = 2y \therefore 3x + 2y = 0$

∴ জ্যা-এর সমীকরণ, $2x - 3y + k = 0 \Rightarrow -4 - 9 + k = 0 ; k = 13 \therefore 2x - 3y + 13 = 0$



খ. ১ম বৃত্তের কেন্দ্র (4,1) ; ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{16 + 1 - 4} = \sqrt{13}$

প্রশ্নমতে, $\left|\frac{12+p-1}{\sqrt{3^2+p^2}}\right| = \sqrt{13} \Rightarrow \frac{(p+11)^2}{3^2+p^2} = 13$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow p^2 + 22p + 121 = 117 + 13p^2 \Rightarrow 12p^2 - 22p - 4 = 0 \Rightarrow 6p^2 - 11p - 2 = 0 \therefore p = 2 \text{ or}, p = \frac{-1}{6}$

গ. কেন্দ্র (4,3) ; ২য় বৃত্তের কেন্দ্র (0,0), দূরত্ব, $r_1 + r_2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \Rightarrow r_1 + 2 = 5 \therefore r_1 = 3$

∴ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$

12. **কোনো বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(1, 5)$ ও $(7, -3)$ এবং $(a, 6)$ বিন্দুটি এ বৃত্তের উপর অবস্থিত।**

(ক) $(-2, 3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত X-অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকের বৃত্তটির উপর উল্লেখিত বিন্দুটির ভূজ a এর মান কত? বৃত্তটির অপর একটি ব্যাস নির্ণয় কর যা প্রদত্ত ব্যাসের উপর লম্ব। 4

সমাধান

ক. বৃত্তের সমীকরণ, $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$

খ. উদ্দীপকে বর্ণিত বৃত্তের সমীকরণ, $(x - 1)(x - 7) + (y - 5)(y + 3) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 7x - x + 7 + y^2 + 3y - 5y - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$

গ. যেহেতু $(a, 6)$ বিন্দুটি বৃত্তের উপর অবস্থিত ∴ $a^2 + 6^2 - 8a - 2 \times 6 - 8 = 0 \Rightarrow a^2 - 8a + 16 = 0 \therefore a = 4$

কেন্দ্র (4,1) ∴ (4,1) বিন্দুগামী এবং (1,5) ও (7, −3) বিন্দুগামী রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ

$\Rightarrow y - 1 = -\frac{1-7}{5+3}(x - 4) \Rightarrow y - 1 = \frac{6}{8}(x - 4) \Rightarrow 4y - 4 = 3k - 12 \Rightarrow 3x - 4y - 12 + 4 = 0 \therefore 3x - 4y - 8 = 0$

অধ্যায় ০৭ সংযুক্ত ও যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

এই অধ্যায়ের বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্নের বিশ্লেষণ:

বোর্ড	২০২২				২০২১				২০১৯				২০১৮				২০১৭			
	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ
	ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ	
ঢাকা	2	2	2	4					1	1	1	3	2	1	1		1	1	1	3
রাজশাহী	2	2	2	1					1	1	1	3	সকল বোর্ড				1	1	1	2
চট্টগ্রাম	1	1	1	4					2	1	2	3					2	2	1	
সিলেট	2	2	2	4					2	1	1	4								3
বরিশাল	1	1	1	3					1	1	2							1	2	3
যশোর	1	1	1	5					1	1	1	2					2	1	2	4
কুমিল্লা	1	1	1	4					1		2	2					2	2	2	3
দিনাজপুর	1	1	1	4					2	2	2	2					1	1		4
ময়মনসিংহ	1	1	1	4																

বি.দ্র.- ২০২০ সালে বোর্ড পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয় নাই, ২০২১ সালে শর্ট সিলেবাসে অধ্যায়-০৭ ছিল না। ২০১৮ সালে সকল বোর্ডে অভিন্ন প্রশ্ন পদ্ধতিতে পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয়।

গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা ও তথ্যাবলি

◈ সংযুক্ত কোণ (Associated Angle):

ত্রিকোণমিতিতে যেকোন পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য $\left\{n\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm \theta\right\}$ বা $\{90°n \pm \theta\}$ আকারের কোণ হল সংযুক্ত কোণ।

◈ $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ আকারের সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের জন্য:

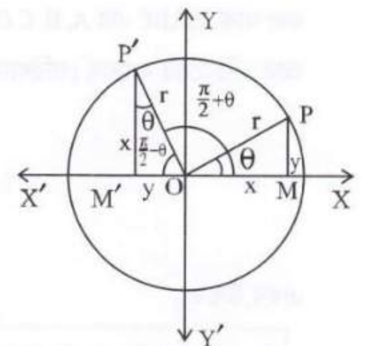
এখানে ΔPOM থেকে $PM \perp OX$ এবং $OP = r$, $OM = x$, $PM = y$, $\angle XOP = \theta$ এবং $\angle XOP' = \frac{\pi}{2} + \theta$.

ফলে $\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{r}$, $\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{y}{x}$

এখন $\Delta P'OM'$ এবং ΔPOM এ $\angle OM'P' = \angle OMP = \frac{\pi}{2}$

$\angle OP'M' = \angle POM = \theta$ এবং $OP' = OP = r$

$\therefore \Delta P'OM' \cong \Delta POM$ অর্থাৎ $OM' = PM = y$, $P'M' = OM = x$. এখন

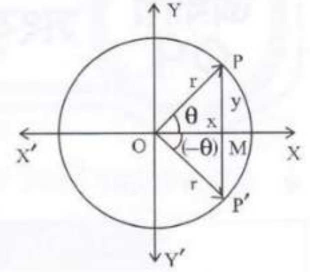


$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \sin\angle MOP' = \frac{+P'M'}{OP'} = \frac{x}{r} = \cos\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{-OM'}{OP'}$; [ঋণাত্মক x-অক্ষ বরাবর] $= -\frac{y}{r} = -\sin\theta$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{+P'M'}{-OM'} = -\frac{x}{y} = -\cot\theta$

◈ $(-\theta)$ আকারের সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের জন্য:

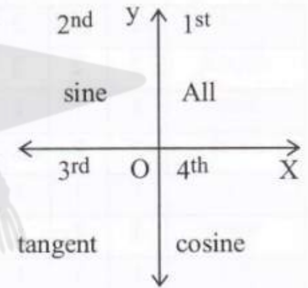
ঘড়ির কাঁটার দিকে θ কোণ ঘুরে $\angle XOP'$ অঙ্কন করলে P, M, P'একই সরলরেখায় অবস্থিত হয়। ফলে $\angle XOP' = -\theta$ [∵ ঘড়ির কাঁটার দিকের কোণ ঋণাত্মক]

এবং $OP = OP' = r$, $PM = P'M = y$, $OM = x$. এখন



$\sin(-\theta) = \sin\angle XOP' = \frac{-P'M}{OP'} = -\frac{y}{r} = -\sin\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\angle XOP' = \frac{+OM}{OP'} = \frac{x}{r} = \cos\theta$
$\tan(-\theta) = \tan\angle XOP' = \frac{-P'M}{OM} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$

সর্বপরি, $\left\{n\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm \theta\right\}$ বা $\{90°n \pm \theta\}$ আকারের কোণ হল সংযুক্ত কোণের ক্ষেত্রে n বিজোড় হলে **sine ⇆ cosine** (অর্থাৎ sine, cosine এ আর cosine, sine এ রুপান্তরিত হবে)। একইভাবে **tangent ⇆ cotangent** এবং **secant ⇆ cosecant.** কিন্তু n জোড় হলে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো অপরিবর্তিত থাকবে তবে চিহ্ন পরিবর্তিত হতে পারে। আর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ১ম চতুর্ভাগে সবগুলো অনুপাত ধনাত্মক। ২য় চতুর্ভাগে শুধুমাত্র sine বা cosecant ধনাত্মক আর বাকিগুলো ঋণাত্মক। একইভাবে ৩য় চতুর্ভাগে শুধুমাত্র tangent বা cotangent এবং ৪র্থ চতুর্ভাগে শুধুমাত্র cosine বা secant ধনাত্মক।



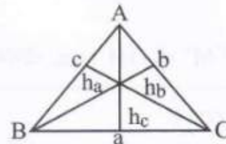
মনে রাখার সুবিধার জন্য,

Quadrant→	1st	2nd	3rd	4th
	All	students	take	care
		↓	↓	↓
		sin(e)	tan(gent)	cos(ine)

উদাহরণস্বরূপ, $\sin(3 \times 90° + \theta) = -\cos\theta$. কারণ এক্ষেত্রে $(3 \times 90° + \theta)$ কোণটিতে 90° এর বিজোড় গুণিতক রয়েছে তাই sine পরিবর্তিত হয়ে cosine হয়েছে এবং $(3 \times 90° + \theta)$ কোণটি ৪র্থ চতুর্ভাগে (Quadrant) অবস্থিত বলে $(-)$ ঋণাত্মক চিহ্ন বসেছে [যেহেতু ৪র্থ চতুর্ভাগে sine ঋণাত্মক] । আর cosecant, secant এবং cotangent এর ক্ষেত্রে অতিরিক্ত ভাবার প্রয়োজন নেই, কারণ এই ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো যথাক্রমে sine, cosine এবং tangent দ্বারা নির্ণয় করা যায়।

◈ ত্রিভুজের গুণাবলি **(Properties of a Triangle):**

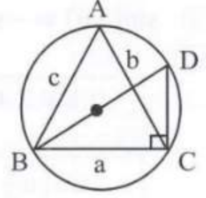
ধরা যাক, ΔABC এর A, B, C কোণের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে a, b, c এবং h_a, h_b, h_c হচ্ছে যথাক্রমে a, b, c এর উপর উচ্চতা আর পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ (পরিব্যাসার্ধ) হচ্ছে R ।



এখন উচ্চতা,

$h_a = b\sin C = c\sin B \Leftrightarrow \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$	$h_b = a\sin C = c\sin A \Leftrightarrow \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$	$h_c = a\sin B = b\sin A$

ফলে $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ । এখন ΔABC ও ΔDBC বৃত্তস্থ ত্রিভুজদ্বয়ে একই চাপ BC উপর দণ্ডায়মান $\angle BAC = \angle BDC = A$ এবং ব্যাস $BD = 2R$ ফলে $\angle BCD = \frac{\pi}{2}$



ফলে ΔDBC থেকে $\frac{BC}{\sin BDC} = \frac{BD}{\sin BCD} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{2R}{\sin\frac{\pi}{2}} = 2R$

$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ যা হচ্ছে sine সূত্র (sine rule)

আবার, $(b\sin A)^2 = h_c^2 = a^2 - (c - b\cos A)^2$; [পিথাগোরাসের উপাপাদ্য অনুসারে]

$\therefore b^2\sin^2 A = a^2 - c^2 + 2bc\cos A - b^2\cos^2 A \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)+c^2-a^2}{2bc} =$

$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ যা হচ্ছে cosine সূত্র (cosine rule) । একইভাবে $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ এবং $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$।

অর্থাৎ, $\cos \text{কোণ} = \frac{(\text{কোণ সংলগ্ন বাহু}_1)^2+(\text{কোণ সংলগ্ন বাহু}_2)^2-(\text{কোণের বিপরীত বাহু})^2}{2(\text{কোণ সংলগ্ন বাহু}_1)(\text{কোণ সংলগ্ন বাহু}_2)}$.

এ sine ও cosine সূত্র দু'টি ত্রিভুজের প্রায় সকল গুণাবলি ব্যাখ্যা করে। ইউক্লিডের সমতল জ্যামিতির ত্রিভুজ সংক্রান্ত অনেক উপপাদ্য এখানে লুকিয়ে আছে। যেমন: sine সূত্রটি থেকে $a \propto \sin A$, $b \propto \sin B$, $c \propto \sin C$ অর্থাৎ ত্রিভুজের বাহু $\propto$ বিপরীত কোণ বা কোণ $\propto$ বিপরীত বাহু যা "বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু, ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর" উপপাদ্যকে সমর্থন করে। আবার cosine সূত্র থেকে $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

ফলে C=1 সমকোণ $= \frac{\pi}{2} = 90°$ হলে,

c বাহুটি অতিভুজ হবে এবং $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times 0 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$ যা পিথাগোরাসের উপপাদ্যকে সমর্থন করে।

এখন একটি ত্রিভুজ নির্দিষ্ট (অনন্য) হবে যদি নিচের যেকোন একটি সত্য হয়: (i) দু'টি বাহু এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্দিষ্ট হয় (ii) দু'টি কোণ এবং একটি বাহু নির্দিষ্ট হয় (iii) তিনটি বাহু নির্দিষ্ট হয় (iv) সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে শুধুমাত্র যেকোন দু'টি বাহু নির্দিষ্ট হয় এ ব্যাপারটি sine ও cosine সূত্র থেকেও বোঝা যায়। যেমন: (i) উক্তিটি সত্য হলে, cosine সূত্র থেকে কোণের বিপরীত বাহু পাওয়া সম্ভব। ফলে তিনটি বাহু পাওয়া যায় যা আবার (iii) উক্তিটি সমর্থন করে। আবার তিনটি বাহু পাওয়া গেলে পুনরায় cosine সূত্র এবং $A + B + C = \pi = 180°$ প্রয়োগ করে বাকি কোণগুলো পাওয়া যায়। আবার (iii) উক্তিটি সত্য হলে, sine সূত্র থেকে সহজে সমাধান করা যায়। আর (iv) এর ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের সূত্র প্রয়োগ করে তৃতীয় বাহুটি (মোট তিনটি বাহু) পাওয়া যায় যা আবার (iii) কে সমর্থন করে। আর যদি দু'টি বাহু এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ ব্যতীত অন্য একটি কোণ দেওয়া থাকে সেক্ষেত্রে সাধারণভাবে দু'টি ত্রিভুজ (যদি প্রদত্ত কোণটি সমকোণ না হয়) পাওয়া সম্ভব। এক্ষেত্রে sine সূত্র প্রয়োগ করলে সহজে সমাধান পাওয়া যাবে। অবশেষে $A + B + C = \pi$, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,

$\cos \text{কোণ} = \frac{(\text{কোণ সংলগ্ন বাহু}_1)^2+(\text{কোণ সংলগ্ন বাহু}_2)^2-(\text{কোণের বিপরীত বাহু})^2}{2(\text{কোণ সংলগ্ন বাহু}_1)(\text{কোণ সংলগ্ন বাহু}_2)}$

আর সাথে সমতল জ্যামিতির জ্ঞান কাজে লাগিয়ে ত্রিভুজ সংক্রান্ত প্রায় যেকোন ত্রিকোণমিতিক সমস্যা সমাধান করা সম্ভব।

এক নজরে বৃত্তীয় ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ

ফাংশন	ডোমেন	রেঞ্জ
$\sin\theta$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$\cos\theta$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$\tan\theta$	$\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$ বা $(-\infty,\infty)$
$\cot\theta$	$\mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$ বা $(-\infty,\infty)$
$\sec\theta$	$\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} - (-1,1)$ বা $(-\infty,1] \cup [1,\infty)$
$\operatorname{cosec}\theta$	$\mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} - (-1,1)$ বা $(-\infty,1] \cup [1,\infty)$

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি

(i) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$; $\cos(-\theta) = \cos\theta$; $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

(ii)

$n, k \in \mathbb{Z}$ এর জন্য	$n = 4k + 0$ 1st Quadrant	$n = 4k + 1$ 2nd Quadrant	$n = 4k + 2$ 3rd Quadrant	$n = 4k + 3$ 4th Quadrant
$\sin\left(n\frac{\pi}{2} + \theta\right)$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$
$\cos\left(n\frac{\pi}{2} + \theta\right)$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$\sin\theta$
$\tan\left(n\frac{\pi}{2} + \theta\right)$	$\tan\theta$	$-\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\cot\theta$

(iii) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$; $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$; $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

(iv) $\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$

(v) $\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$

(vi) $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A.\tan B}$

◈ যোগবোধক থেকে গুণবোধক:

(vii) $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$; $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$

(viii) $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$; $\cos A - \cos B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(B-A)$

◈ গুণবোধক থেকে যোগবোধক:

(ix) $\sin A\cos B = \frac{1}{2}\{\sin(A+B) + \sin(A-B)\}$; $\cos A\sin B = \frac{1}{2}\{\sin(A+B) - \sin(A-B)\}$

(x) $\cos A\cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) + \cos(A+B)\}$; $\sin A\sin B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$

◈ **Double-angle formula:**

(xi) $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(xii) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(xiii) $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

◈ **Triple-Angle Formula:**

(xiv) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A \Rightarrow \sin^3 A = \frac{1}{4}(3\sin A - \sin 3A)$

(xv) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A \Rightarrow \cos^3 A = \frac{1}{4}(3\cos A + \cos 3A)$

(xvi) $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A} \Rightarrow \tan^3 A = 3\tan A + (3\tan^2 A - 1)\tan 3A$

◈ শর্ত সাপেক্ষে ত্রিভুজের বিভিন্ন অজানা রাশির মান নির্ণয়:

Formula ♦ sine rule: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin c} = 2R$; [R পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ]

♦ cosine rule: $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$; $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

♦ $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ যেখানে অর্ধপরিসীমা, $s = \frac{a+b+c}{2}$;

$\Delta = sr$ [r = অন্তঃব্যাসার্ধ] $\Delta = \frac{abc}{4R}$

	Tangent Rule:
♦ $a = b\cos C + c\cos B$ ♦ $b = c\cos A + a\cos C$ ♦ $c = a\cos B + b\cos A$	♦ $\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$ ♦ $\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$ ♦ $\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$

♦ $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$	♦ $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$	♦ $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$
♦ $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$	♦ $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$	♦ $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$
♦ $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$	♦ $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$	♦ $\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

◈ সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$; [b = ভূমি, a = সমান বাহুদ্বয়]

সহজে মনে রাখার কৌশল

➲

ত্রিকোণমিতিক ফাংশন $f(\theta)$	মৌলিক পর্যায়
$A\sin(m\theta + B)$	$\frac{2\pi}{m}$
$A\cos(m\theta + B)$	$\frac{2\pi}{m}$
$A\,\text{cosec}\,(m\theta + B)$	$\frac{2\pi}{m}$
$A\sec\,(m\theta + B)$	$\frac{2\pi}{m}$
$A\tan(m\theta + B)$	$\frac{\pi}{m}$
$A\cot(m\theta + B)$	$\frac{\pi}{m}$

যেমন: $5\sin\left(3\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ এর পর্যায়: $\frac{2\pi}{3}$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও সমাধান

◆ **MCQ:** বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্ন ও সমাধান

01. ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ 10 একক। যদি $c = 10\sqrt{3}$ একক হয়, তবে C কোণের মান নিচের কোনটি? **[DB'22]**

(a) $60°$ (b) $120°$ (c) $30°$ (d) $90°$

সমাধান: **(a)**; ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ, $R = 10$ একক এবং $c = 10\sqrt{3}$ আমরা জানি, ΔABC -এ sine rule অনুসারে,

$\frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \sin C = \frac{c}{2R} = \frac{10\sqrt{3}}{2\times 10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore C = 60°$

02. $\tan\theta = \sqrt{3}$ হলে- **[DB'22]**

(i) $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$

(iii) $\tan 2\theta = -\sqrt{3}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: **(b)**; $\tan\theta = \sqrt{3} \therefore \theta = 60° \Rightarrow 2\theta = 120°$

(i) $\sin 2\theta = \sin 120° = \sin(2\times 90° - 60°)$
$= \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\cos 2\theta = \cos 120° = \cos(2\times 90° - 60°)$
$= -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

(ii) $\tan 2\theta = \tan 120° = \tan(2\times 90° - 60°)$
$= -\tan 60° = -\sqrt{3}$

বিকল্প: এখান, $\tan\theta = \sqrt{3}$

(i) $\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-(\sqrt{3})^2}{1+(\sqrt{3})^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

(iii) $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{1-(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$

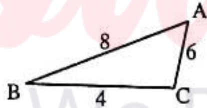
03. $\sin 65° + \cos 65° = ?$ **[DB, CB'22]**
(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40°$ (b) $\frac{1}{2}\sin 20°$
(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 40°$ (d) $\sqrt{2}\cos 20°$
সমাধান: **(d)**; $\sin 65° + \cos 65° = \sin 65° + \cos(90° - 25°) = \sin 65° + \sin 25°$
$= 2\sin\frac{65°+25°}{2}\cos\frac{65°-25°}{2} = 2\sin 45°\cos 20°$
$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 20° = \sqrt{2}\cos 20°$

04. $\tan\frac{\alpha}{2} = 7$ হলে $4\sin\alpha - 3\cos\alpha = ?$ **[DB'22]**
(a) 5 (b) 4 (c) 3 (d) 6
সমাধান: **(b)**; এখানে, $\tan\frac{\alpha}{2} = 7$
তাহলে, $4\sin\alpha - 3\cos\alpha = 4\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} - 3\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$
$= 4.\frac{2.7}{1+7^2} - 3.\frac{1-7^2}{1+7^2} = 4.\frac{14}{50} - 3.\frac{-48}{50} = \frac{28}{25} + \frac{72}{25}$
$= \frac{28+72}{25} = \frac{100}{25} = 4$

05. $\frac{1-\tan^2(45°+x)}{1+\tan^2(45°+x)}$ এর মান কোনটি? **[RB'22; JB'17]**
(a) $-\cos 2x$ (b) $\sin 2x$ (c) $-\sin 2x$ (d) $\cos 2x$
সমাধান: **(c)**; $\frac{1-\tan^2(45°+x)}{1+\tan^2(45°+x)} = \cos\{2(45° + x)\}$
$= \cos(90° + 2x) = -\sin 2x$

06. $\cos 2A = \frac{3}{5}$ হলে, $\sin A$ এর মান কত? **[Ctg.B'22] [Ans: b]**
(a) $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$ (b) $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ (c) $\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{5}}$
সমাধান: **(b)**; $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$
$\Rightarrow \sin^2 A = \frac{1}{5} \therefore \sin A = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



07. ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত? **[Ctg.B'22; SB'19]**
(a) $\sqrt{15}$ বর্গ একক (b) $9\sqrt{15}$ বর্গ একক
(c) $3\sqrt{15}$ বর্গ একক (d) $2\sqrt{15}$ বর্গ একক
সমাধান: **(c)**; $s = \frac{8+6+4}{2} = 9$
$\therefore \Delta\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9 \times 5 \times 3 \times 1}$
$= \sqrt{9 \times 15} = 3\sqrt{15}$

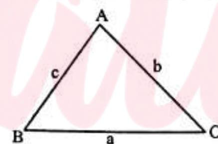
08. $\angle C$ এর মান কত? **[Ctg.B'22]**
(a) $\cos^{-1}\left(\frac{39}{12}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{12}{39}\right)$
(c) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$
সমাধান: **(d)**; $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{4^2+6^2-8^2}{2\times4\times6} = -\frac{1}{4}$
$\therefore C = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$

09. $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ এর মন কত? **[Ctg.B'22]**
(a) $1 - \sqrt{2}$ (b) $-1 + \sqrt{2}$
(c) $1 + \sqrt{2}$ (d) $-1 - \sqrt{2}$
সমাধান: **(b)**; ধরি, $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = x$; এখন, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$
$= \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} \Rightarrow 1 = \frac{2x}{1-x^2} \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$
$\therefore x = -1 \pm \sqrt{2}$
যেহেতু, $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ এর অবস্থান প্রথম চর্তুভাগে তাই, $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ এর মান ধনাত্মক। $\therefore \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = -1 + \sqrt{2}$

10. $\frac{\cot 54°}{\tan 36°} + \frac{\tan 20°}{\cot 70°}$ এর মান কত? **[SB'22]**
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3
সমাধান: **(c)**; $\frac{\cot 54°}{\tan 36°} + \frac{\tan 20°}{\cot 70°} = \frac{\tan 36°}{\tan 36°} + \frac{\tan 20°}{\tan 20°} = 2$

11. যদি $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ হয়, তবে $\cos 3\theta$ এর মান- **[SB'22]**
(a) $\frac{1}{8}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$ (b) $\frac{1}{3}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$
(c) $\frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$ (d) $\frac{3}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$
সমাধান: **(c)**; $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$
$= 4\left\{\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right\}^3 - 3 \cdot \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$
$= \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\left\{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 3\right\}$
$= \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 1\right)$
$= \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^2 - a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



12. $\angle A = 60°, b = 2$ এবং $c = 4$ হলে, a-এর মান কত? **[SB'22]**
(a) $2\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{6}$
সমাধান: **(b)**; $\cos A = \frac{(b^2+c^2-a^2)}{2bc}$,
$\cos 60 = \left(\frac{4+16-a^2}{2\times4\times2}\right) \therefore a = 2\sqrt{3}$

13. $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$ হলে $a : b : c =$ কত? **[SB'22; 17]**
(a) $2 : \sqrt{3} : 1$ (b) $\sqrt{3} : 2 : 1$
(c) $2 : 3 : 1$ (d) $1 : \sqrt{3} : 2$
সমাধান: **(d)**; $A + 2A + 3A = \pi \Rightarrow A = \frac{\pi}{6}$
$\therefore B = \frac{\pi}{3}, c = \frac{\pi}{2}$
এখন, $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$
$= 1 : \sqrt{3} : 2$

14. $\frac{\sin(45°+A)+\sin(45°-A)}{\cos(45°-A)-\cos(45°+A)}=$ কত? [BB'22]
(a) $\cot A$ (b) -1 (c) 1 (d) $\tan A$
সমাধান: (a); $\frac{\sin(45°+A)+\sin(45°-A)}{\cos(45°-A)-\cos(45°+A)}$
$=\frac{2\sin 45°\cos A}{2\sin 45°\sin A}=\cot A$

15. $A+B=\frac{\pi}{2}$ হলে $\cos^2 A-\cos^2 B=$ কত? [BB'22]
(a) $\sin(A-B)$ (b) $\sin(B-A)$
(c) $\cos(A-B)$ (d) 0
সমাধান: (b); $\cos^2 A-\cos^2 B$
$=\sin(A+B)\cdot\sin(B-A)=\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin(B-A)$
$=1\cdot\sin(B-A)=\sin(B-A)$

16. ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রে – [BB'22]
(i) $\cos 4A=\frac{1-\tan^2 2A}{1+\tan^2 2A}$
(ii) $\sin 6A=2\sin 3A\cos 3A$
(iii) $\tan 8\alpha=\frac{2\tan 4\alpha}{1-\tan^2 4\alpha}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); (i) $\cos 4A=\cos(2.2A)=\frac{1-\tan^2 2A}{1+\tan^2 2A}$
(ii) $\sin 6A=2\sin 3A\cos 3A$
(iii) $\tan 8A=\tan(2\cdot 4a)=\frac{2\tan 4a}{1-\tan^2 4a}$

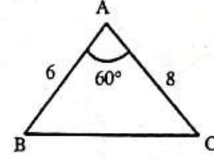
17. যে কোনো ত্রিভুজের বাহু a, b, c এবং এর ক্ষেত্রফল Δ হলে, $\sin A=$ কত? [JB'22] [Ans: b]
(a) $\frac{2\Delta}{ca}$ (b) $\frac{2\Delta}{bc}$ (c) $\frac{2\Delta}{ab}$ (d) $\frac{2\Delta}{abc}$

18. ΔABC এ, $\cos A=\sin B-\cos C$ হলে, ∠A এর মান কোনটি? [JB'22] [Ans: d]
(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

19. $\cos 2A=$ [JB'22]
(i) $-2\sin^2 A+1$ (ii) $2\cos^2 A-1$
(iii) $\frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); $\cos 2A=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}=\frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A}$

20. $2\sin^2 15°$ এর মান কত? [JB'22; BB'17]
(a) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (d) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$
সমাধান: (a); $2\sin^2 15°=1-\cos(2\times 15°)$
$=1-\cos 30°=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

21. Δ ABC এর $AB=6, AC=8$ এবং $\angle BAC=60°$ হলে Δ ABC এর ক্ষেত্রফল কত? [CB'22]
(a) $12\sqrt{3}$ (b) 24 (c) 48 (d) $48\sqrt{3}$
সমাধান: (a); $\Delta ABC=\frac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin\angle BAC$
$=\frac{1}{2}\times 6\times 8\times\sin 60°=\frac{1}{2}\times 6\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}$
$=12\sqrt{3}$ বর্গএকক

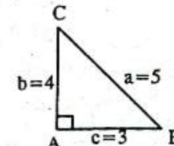


22. n একটি পূর্ণসংখ্যা হলে $\sin\left\{2n\pi+(-1)^{2n}\frac{\pi}{6}\right\}$ এর মান কত? [CB'22]
(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
সমাধান: (b); $\frac{1}{2}$
যেহেতু, $n\in z$
ধরি, $n=1$
$\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$
$=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

অথবা, n এর মান যেকোনো পূর্ণসংখ্যার জন্য,
$\sin\left\{2n\pi+(-1)^{2n}\frac{\pi}{6}\right\}$
$=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{6}\right)$
$=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

23. $\sin 10°=p$ হলে $\sin 20°$ এর মান কোনটি? [CB'22; RB;19; DB'17]
(a) 2p (b) $2p\sqrt{1-p^2}$
(c) $2p\sqrt{p^2-1}$ (d) $2\sqrt{1-p^2}$
সমাধান: (b); ∵ $\sin 10°=P$
∴ $\cos 10°=\sqrt{1-\sin^2 10°}=\sqrt{1-p^2}$
∴ $\sin 20°=2\sin 10°\cos 10°=2p\sqrt{1-p^2}$

24. ΔABC এর $a=5, b=4$ এবং $c=3$ হলে- [Din.B'22]
(i) A কোণের মান 60°
(ii) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক
(iii) ত্রিভুজটি সমকোণী
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (c); (i) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4^2+3^2-5^2}{2\times 4\times 3}$
$=0$ ∴ $A=90°$
(ii) এখানে, $A=90°$ ∴ ΔABC সমকোণী
∴ $\Delta ABC=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6$ বর্গ একক।
(iii) (i) হতে $A=90°$ ∴ ΔABC সমকোণী

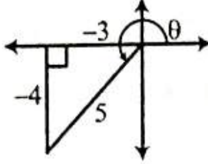


25. $\cot\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ হলে $\sec\theta$ এর মান কত? [Din.B'22]

(a) $\frac{-5}{3}$ (b) $\frac{-5}{4}$ (c) $\frac{5}{4}$ (d) $\frac{5}{3}$

সমাধান: (a); $\cot\theta = \frac{3}{4} = \frac{-3}{-4}\left[\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}\right]$

তাহলে, পাশের চিত্রে, $\sec\theta = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$



26. $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ এবং $g(x) = \sin^{-1}(\sin\sqrt{x})$ হলে- [Din.B'22]

(i) $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$ (ii) $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(iii) $f(1) = \frac{\pi}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (c); (i) $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

$= 2\tan^{-1}x \therefore f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$

(ii) $g(x) = \sin^{-1}(\sin\sqrt{x}) = \sqrt{x} \therefore g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(iii) $f(x) = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = 2\tan^{-1}x$

$\therefore f(1) = 2\tan^{-1}(1) = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

27. $\text{cosec}(-330°)$ এর মান কত? [Din.B'22; JB, BB'17]

(a) -2 (b) $\frac{-2}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) 2

সমাধান: (d); $\text{cosec}(-330°) = -\text{cosec}\,330°$

$= -\text{cosec}(360° - 30°)$

$= -\text{cosec}(4\times 90° - 30°)$

$= -(-\text{cosec}(30°)) = \text{cosec}\,30° = 2$ (Ans.)

28. ΔABC এর ক্ষেত্রে $c^2 + a^2 - b^2 - ca = 0$ হলে $\angle B$ এর পরিমাণ- [MB'22]

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 120°

সমাধান: (c); $c^2 + a^2 - b^2 = ca \Rightarrow \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$= \frac{ca}{2ca} \Rightarrow \cos B = \frac{1}{2} \therefore B = 60°$

29. যে কোনো ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক? [MB'22] [Ans: a]

(a) $c = a\cos B + b\cos A$ (b) $b = c\sin A + a\sin C$

(c) $\Delta = \frac{1}{2}ab\cos C$ (d) $\cos A = \frac{b^2+c^2+a^2}{2bc}$

30. $\sin^4\theta - \cos^4\theta$ সমান- [MB'22]

(a) $1 + 2\sin^2\theta$ (b) $1 + 2\cos^2\theta$

(c) $2\sin^2\theta - 1$ (d) $2\cos^2\theta - 1$

সমাধান: (c); $\sin^4\theta - \cos^4\theta$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$

$= 1\cdot(\sin^2\theta - 1 + \sin^2\theta) = 2\sin^2\theta - 1$

31. যে কোনো ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রে- [DB'19] [Ans: a]

(i) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

(ii) $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A$

(iii) $c - a\cos B = b\cos A$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

32. $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ এর মান- [DB'19]

(a) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

সমাধান: (a); $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\left(2.\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}+2}{4} \therefore \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

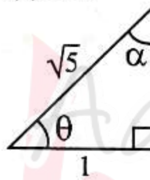
33. ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রে- [DB'19] [Ans: a]

(i) $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ (ii) $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(iii) $\cos 2A = \frac{1+\tan^2 A}{1-\tan^2 A}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

34. 

উদ্দীপক থেকে- [RB'19]

(i) $\tan\theta = 2$ (ii) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

(iii) $\sec\alpha = \sqrt{5}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); $\sec\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

35. $A + B + C = \frac{3\pi}{2}$ হলে, $\text{cosec}(B + C)$ এর মান কোনটি? [RB'19; JB'17]

(a) $-\sec A$ (b) $\sec A$

(c) $-\text{cosec}\,A$ (d) $\text{cosec}\,A$

সমাধান: (a); $\text{cosec}(B + C)$

$= \text{cosec}\left(3.\frac{\pi}{2} - A\right) = -\sec A$

36. $\cos 2\theta$ এর মান- [Ctg.B'19]

(i) $1 - 2\sin^2\theta$ (ii) $\frac{1-\tan^2\theta}{\sec^2\theta}$ (iii) $\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}$

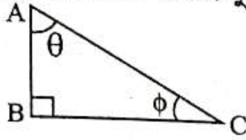
নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$= \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\tan^2\theta}{\sec^2\theta}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



37. $2AB = BC$ হলে $\sin\theta = ?$ **[Ctg.B'19]**

(a) $\sin\phi$ (b) $2\sin\phi$
(c) $\frac{1}{2}\sin\phi$ (d) $\frac{1}{4}\sin\phi$

সমাধান: **(b)**; $\sin\theta = \frac{BC}{AC} = 2 \times \frac{AB}{AC} = 2\sin\phi$

38. $AB = 3, BC = 4$ হলে, $\cos\theta + \cos\phi = ?$ **[Ctg.B'19]**

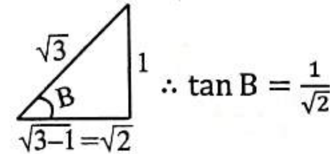
(a) $\frac{5}{8}$ (b) $\frac{5}{7}$ (c) $\frac{7}{5}$ (d) $\frac{8}{5}$

সমাধান: **(c)**; $\cos\theta + \cos\phi = \frac{AB}{AC} + \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$

39. $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\tan(A+B) =$ কত? **[SB'19]**

(a) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ (d) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

সমাধান: **(d)**; $\sqrt{2}$, 1, A, $\sqrt{2-1}=1$ $\therefore \tan A = \frac{1}{1} = 1$



$\therefore \tan B = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

40. $\cos(2n\pi - 30°) =$ কত? **[SB'19]**

(a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: **(b)**; $n = 0$ বসিয়ে $\cos(-30°) = \cos 30°$
$[\because \cos(-\theta) = \cos\theta] = \frac{\sqrt{3}}{2}$

41. $\tan\theta = \sqrt{3}$ হলে- **[MB'22; SB'19]**

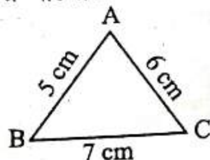
(i) $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$
(iii) $\tan 2\theta = -\sqrt{3}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: **(b)**; $\tan\theta = \sqrt{3} \therefore \theta = 60°$
$\sin 2\theta = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 2\theta = \cos 120° = \frac{-1}{2}$
$\tan 2\theta = \tan 120° = -\sqrt{3}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



42. $\sin\frac{A}{2} =$ কত? **[SB'19]**

(a) $\sqrt{\frac{2}{5}}$ (b) $-\sqrt{\frac{2}{5}}$ (c) $\frac{2}{5}$ (d) $-\frac{2}{5}$

সমাধান: **(a)**; $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+6+7}{2} = 9$ cm

$\therefore \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} = \sqrt{\frac{(9-6)(9-5)}{6\times5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

43. $A = 40°$ ও $B = 50°$ হলে- **[JB'19]**

(i) $\cos 2A = \sin 10°$ (ii) $\sin(A-B) = \sin 10°$
(iii) $\cot(A+B) = \tan 0°$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: **(c)**; (i) $\cos 2A = \cos 80° = \sin 10°$
(ii) $\sin(A-B) = \sin(-10°) = -\sin 10°$
(iii) $\cot(A+B) = \cot 90° = \tan 0°$
$\therefore$ (i) ও (iii) সঠিক

44. $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$ -এর মান কত? **[CB'19]**

(a) $\cot\alpha$ (b) $\cot\beta$ (c) $\tan\alpha$ (d) $\tan\beta$

সমাধান: **(a)**; $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \frac{2\cos\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha\sin\beta} = \cot\alpha$

45. $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$ হলে, $\text{cosec}(\alpha+\gamma)$ এর মান কত? **[CB'19; JB'17]**

(a) $-\text{cosec}\,\beta$ (b) $\text{cosec}\,\beta$
(c) $-\sec\beta$ (d) $\sec\beta$

সমাধান: **(d)**; $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2} - \beta$; $\text{cosec}(\alpha+\gamma)$
$= \text{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sec\beta$

46. $\frac{1+\tan 26°}{1-\tan 26°}$ এর মান কত? **[Din.B'19]**

(a) $\tan 71°$ (b) $\tan 19°$
(c) $\cot 71°$ (d) $\cot 19°$

সমাধান: **(d)**; $\frac{\tan 45° + \tan 26°}{1 - \tan 45° \tan 26°} = \tan(45° + 26°)$
$= \tan 71° = \cot 19°$

47. $\tan 2\theta - \tan\theta$ এর মান কোনটি? **[Din.B'19]**

(a) $\text{cosec}\,2\theta$ (b) $\tan\theta\cos\theta$
(c) $\sin 2\theta$ (d) $\tan\theta\sec 2\theta$

সমাধান: **(d)**; $\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin 2\theta\cos\theta - \sin\theta\cos 2\theta}{\cos 2\theta\cos\theta}$
$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta\cos 2\theta} = \tan\theta\sec 2\theta$

48. sin3x এর পর্যায় কত? **[DB'17] [Ans: a]**

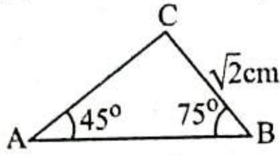
(a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) 3π (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) 2π

49. $\cos\left(7\frac{1}{2}\right)^{\circ} = ?$ **[DB'17]**

(a) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$
(c) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ (d) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

সমাধান: **(b)**; $\cos 15° = \cos(45° - 30°)$
$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \cos 15° = 2\cos^2\left(7\frac{1}{2}\right)^{\circ} - 1$
$\Rightarrow \cos\left(7\frac{1}{2}\right)^{\circ} = \sqrt{\frac{1+\cos 15°}{2}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}}}$
$= \frac{1}{2}\sqrt{2 + \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



50. $\sin(B+C)$ এর মান কত? [RB'17]

(a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $-\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2}$

সমাধান: (b); $\angle A = 45°, \angle B = 75°, \angle C = 60°$

$\therefore \sin(B+C) = \sin(135°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

51. AB = কত সে. মি? [RB'17]

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{3}$

সমাধান: (d); $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

$\Rightarrow c = \frac{a \times \sin C}{\sin A} = \frac{\sqrt{2} \times \sin 60°}{\sin 45°} = \sqrt{3}$

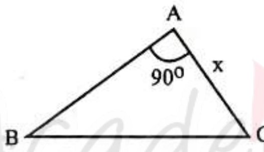
52. $\tan\frac{3x}{2}$ এর মৌলিক পর্যায় কত? [SB'17]

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) π (d) $\frac{3\pi}{2}$

সমাধান: (b); $\tan\frac{3x}{2} = \tan\left(\frac{3x}{2} + \pi\right)$

$= \tan\left[\frac{3}{2}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



53. $\sin B = x$ হলে, $\sin C$ এর মান কত? [SB'17]

(a) x (b) $\frac{1}{x}$

(c) $\sqrt{x^2-1}$ (d) $\sqrt{1-x^2}$

সমাধান: (d); $A + B + C = 180°$

$\Rightarrow 90° + B + C = 180° \Rightarrow B = 90° - C$

$\therefore \sin B = x$

$\Rightarrow \sin(90° - C) = x = \cos C = x$

$\Rightarrow \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - x^2}$

54. ABC ত্রিভুজ $BC = 3, CA = 4$ এবং $AB = 5$ হলে-

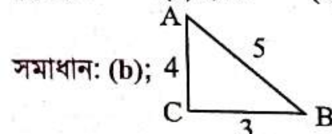
(i) $C = \frac{\pi}{2}$ (ii) ΔABC এর পরিসীমা 24 [BB'17]

(iii) ΔABC এর ক্ষেত্রফল = 6 বর্গ একক

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b);



(i) $\angle c = \frac{\pi}{2}$, (ii) পরিসীমা $= 3 + 4 + 5 = 12$

(iii) ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ বর্গ একক।

55. $A = 60°, B = 45°$ হলে, $\cos(B - A)$ এর মান কোনটি? [Din.B'22; JB'17]

(a) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$ (b) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ (c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

সমাধান: (c); $\cos(B - A) = \cos B \cos A + \sin A \sin B = \cos 60° \cos 45° + \sin 60° \sin 45°$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

56. ΔABC-এ নিচের কোনটি সঠিক নয়? [JB'17] [Ans: a]

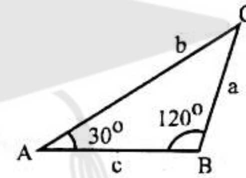
(a) $a = b\cos B + c\cos C$

(b) $a = b\cos C + c\cos B$

(c) $b = c\cos A + a\cos C$

(d) $b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca\cos B$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



57. $\frac{c+a}{b}$ এর মান কোনটি? [CB'17]

(a) 2 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

সমাধান: (c); $\frac{c+a}{b} = \frac{2R(\sin C + \sin A)}{2R \times \sin B} = \frac{\sin 30° + \sin 30°}{\sin 120°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

58. $b = 3$ একক হলে ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [CB'17]

(a) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{9}{2}$

সমাধান: (a); $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{3}{\sin 120°} = \frac{c}{\sin 30°} \Rightarrow c = \sqrt{3}$

$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times bc\sin A = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{3} \times \sin 30$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

59. $y = \cos x$ ফাংশনের পর্যায়কাল নিচের কোনটি? [Din.B'17] [Ans: d]

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) π (c) $-\pi$ (d) 2π

60. নিচের কোনটি সঠিক? [Din.B'17] [Ans: b]

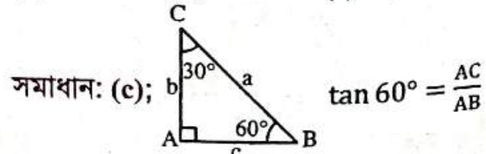
(a) $\sin(-\theta) = \sin\theta$ (b) $\cos(-\theta) = \cos\theta$

(c) $\tan(-\theta) = \tan\theta$ (d) $\cot(-\theta) = \cot\theta$

61. ΔABC-এ $\angle A = 90^0, \angle B = 60^0$ এবং $c = 3$cm হলে, b এর দৈর্ঘ্য কত? [Din.B'17]

(a) 6cm. (b) 4cm. (c) $3\sqrt{3}$cm. (d) $2\sqrt{3}$cm.

সমাধান: (c);



$\tan 60° = \frac{AC}{AB}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{b}{3} \Rightarrow b = 3\sqrt{3}$ cm

MCQ: বিভিন্ন লেখকের মূল বইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

মোঃ কেতাব উদ্দীন স্যার

01. $\sec(-135°)$ এর মান কোনটি? **[Ans: b]**

(a) $\sqrt{2}$ (b) $-\sqrt{2}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

02. $\cos\theta = \frac{5}{13}$ এবং $0° < \theta < 90°$ হলে, $\tan 2\theta$ এর মান-

(i) $\frac{12}{5}$ (ii) $\frac{120}{119}$ (iii) $-\frac{120}{119}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i (b) ii (c) iii (d) ii, iii

সমাধান: (c); $\cos\theta = \frac{5}{13}$ হলে $\tan\theta = \frac{12}{5}$

$\therefore \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{\frac{24}{5}}{1-\frac{144}{25}} = \frac{-120}{119}$

03. $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $180° < \theta < 270°$ হলে- **[Ans: d]**

(i) $\cot\theta = \frac{4}{3}$ (ii) $\cos\theta < 0$

(iii) $\tan 3\theta = -\frac{117}{44}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) ii (b) i, ii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

04. $\sin 15°$ এর মান কোনটি? **[Ans: c]**

(a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (d) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

05. $\cos 68°20' \cos 8°20' + \cos 81°40' \cos 21°40'$ এর মান নিচের কোনটি?

(a) 1 (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 0

সমাধান: (c); $\sin(90° - 68°20')\cos 8°20'$
$+\sin(90° - 81°40')\cos 21°40'$
$= \sin 21°40' : \cos 8°20'$
$+\sin 8°20' \cos 21°40' = \sin(21°40' + 8°20')$
$= \sin 30° = \frac{1}{2}$

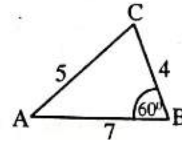
06. $\frac{\cos 8°+\sin 8°}{\cos 8°-\sin 8°}$ এর মান কোনটি?

(a) $\tan 37°$ (b) $\tan 53°$
(c) $\tan 52°$ (d) $\tan 68°$

সমাধান: (b); $\frac{\cos 8°+\sin 8°}{\cos 8°-\sin 8°} = \frac{1+\tan 8°}{1-\tan 8°}$ ($\cos 8°$ দ্বারা বিভাজ্য)

$= \frac{\tan 45°+\tan 8°}{1-\tan 45°.\tan 8°} = \tan(45+8)° = \tan 53°$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



07. ΔABC এর ক্ষেত্রফল–

(i) $10 \sin C$ (ii) $7\sqrt{3}$ বর্গ একক
(iii) $16r$, r ত্রিভুজের অন্তঃব্যাসার্ধ

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \sin C$
$= 10 \sin C \therefore \Delta = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 \times \sin B$
$= 7\sqrt{3}$ বর্গএকক। $\Delta =$ পরিসীমা $\times$ অন্তঃব্যাসার্ধ $= 8r$

08. উদ্দীপকের ক্ষেত্রে–

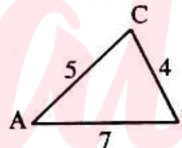
(i) $A = 43.85°$
(ii) ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধ $\frac{20}{\sqrt{3}}$
(iii) $\sec B = 2$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}; \sin A = \frac{4\times\sin 60°}{5}$
$A = 43.85°, \sec B = \sec 60° = 2$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



09. $\frac{\sin B}{\sin C}$ এর মান কত?

(a) $\frac{5}{7}$ (b) $\frac{7}{5}$ (c) $\frac{7}{4}$ (d) $\frac{4}{7}$

সমাধান: (a); $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{2R} \times \frac{2R}{c} = \frac{5}{7}$

10. $\sec A$ এর মান কত?

(a) $\frac{5}{7}$ (b) $\frac{7}{9}$ (c) $\frac{24}{45}$ (d) $\frac{35}{29}$

সমাধান: (d); $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{2bc}{b^2+c^2-a^2} = \frac{2\times5\times7}{5^2+7^2-4^2} = \frac{35}{29}$

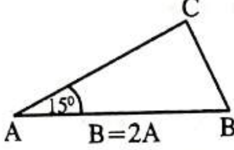
11. $\sec(\theta - 990°)$ এর মান কত?

(a) $\sec\theta$ (b) $-\sec\theta$
(c) $\operatorname{cosec}\theta$ (d) $-\operatorname{cosec}\theta$

সমাধান: (d); $\sec\{-(990° - \theta)\} = \sec(990° - \theta)$
$= \sec(11 \times 90° - \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$ [৩য় চতুর্ভাগ]

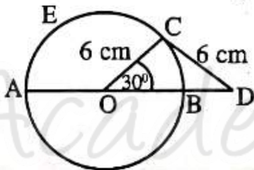
12. $\sin(-\theta)\sec(-\theta)\cot(630° + \theta)$ এর মান কত?
(a) -1 (b) 1 (c) $\tan^2\theta$ (d) $-\tan^2\theta$
সমাধান: (c); $(-\sin\theta)\sec\theta\cot(7\times 90° + \theta)$
$= (-\sin\theta)\sec\theta(-\tan\theta)$ [৪র্থ চতুর্ভাগে]
$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



13. উদ্দীপকের ক্ষেত্রে-
(i) $\sin B = \frac{b}{a}\sin 15°$
(ii) A কোণের বৃত্তীয় মান $\left(\frac{\pi}{15}\right)^c$
(iii) $\tan C$ এর মান -1
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (b); $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b}{a}\sin A$
$= \frac{b}{a}\sin 15°; \angle C = 180° - 45°$
$= 135°; \tan 150° = -1.$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



14. AEC বৃত্ত চাপের দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?
(a) $\frac{5\pi}{6}$ (b) 2π (c) 4π (d) 5π
সমাধান: (d); AEC চাপ, $S = \frac{\pi r\theta}{180} = \frac{\pi\times 6\times 150°}{180°} = 5\pi$

15. ABC ত্রিভুজের $\angle A = 60°, \angle B = 75°$ এবং c বাহুর দৈর্ঘ্য $\sqrt{6}$ cm হলে a বাহুর দৈর্ঘ্য কত সে. মি.?
(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) 3 (c) $2\sqrt{2}$ (d) $3\sqrt{2}$
সমাধান: (b); $\angle A = 60°, \angle B = 75°, \therefore \angle C = 45°$
$c = \sqrt{6}, \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}, \Rightarrow a = \frac{\sqrt{6}\times\sin 60°}{\sin 45°} = 3$ cm

16. $\cos 2\theta = \frac{24}{25}$ হলে, $\tan\theta$ এর মান কত?
(a) ± 7 (b) $\pm\frac{7}{5}$ (c) $\pm\frac{5}{7}$ (d) $\pm\frac{1}{7}$
সমাধান: (d); $\tan\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{24}{25}}{1+\frac{24}{25}}} = \pm\frac{1}{7}$

17. একটি ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 9, 40 ও 41; ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ নিচের কোনটি?
(a) 20.5 (b) 24.5 (c) 25 (d) 30
সমাধান: (a); $R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{9\times 40\times 41}{4\times\sqrt{45(45-9)(45-40)(45-41)}}$
$= 20.5$ একক

18. $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$ হলে, $A + B = ?$
(a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{3}$
সমাধান: (b); $\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$
$= \sin B + \cos B \therefore B = \frac{\pi}{2} - A; A + B = \frac{\pi}{2}$

19. $\frac{\sin 75° + \sin 15°}{\sin 75° - \sin 15°} = ?$
(a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
সমাধান: (a); $\frac{\cos 15° + \sin 15°}{\cos 15° - \sin 15°} = \frac{1 + \tan 15°}{1 - \tan 15°}$ [cos 15° দ্বারা ভাগ]
$\frac{\tan 45° + \tan 15°}{1 - \tan 45°\tan 15°} = \tan(45° + 15°) = \tan 60° = \sqrt{3}$

20. A এর কোন মানের জন্য $\cos A\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right)$ এর মান বৃহত্তম হবে?
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$
সমাধান: (b); $\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right)\cos A$
$= \frac{1}{2}\left\{2\cos A\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right)\right\}$
$= \frac{1}{2}\left\{\sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\frac{\pi}{6}\right\} = \frac{1}{2}\sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}$
বৃহত্তম মানের জন্য $\sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) = 1$
$2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, A = \frac{\pi}{3}$

21. $\frac{\cos 27° - \cos 63°}{\cos 27° + \cos 63°} = ?$
(a) $\cot 18°$ (b) $\cos 18°$
(c) $\sin 18°$ (d) $\tan 18°$
সমাধান: (d); $\frac{\cos 27° - \cos 63°}{\cos 27° + \cos 63°} = \frac{\cos 27° - \sin 27°}{\cos 27° + \sin 27°}$
$= \frac{1 - \tan 27°}{1 + \tan 27°}$ [cos 27° দ্বারা ভাগ]
$\frac{\tan 45° - \tan 27°}{1 + \tan 45°\tan 27°} = \tan(45° - 27°) = \tan 18°$

এস ইউ আহাম্মদ স্যার

22. $\cos 3270°$ এর মান কত? [Ans: a]
(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

23. $n = 5$ হলে, $\cos\left(2n\pi \pm \frac{\pi}{6}\right)$ এর মান কত?
(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\pm\frac{1}{2}$
সমাধান: (a); $n = 8$ হলে, $\cos\left(10\pi \pm \frac{\pi}{6}\right)$
$= \cos\left(20\times\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}\right)$
$= \frac{1}{2}$ [কেননা 1ম ও 4র্থ চতুর্ভাগে Cosine এর অনুপাত positive]

24. $\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}$ এর মান কত?

(a) 0 (b) 1 (c) $-\frac{1}{2}$ (d) −1

সমাধান: (b); $\sin^2\frac{\pi}{8}+\left\{\sin\left(\frac{4\pi+\pi}{8}\right)\right\}^2$
$=\sin^2\frac{\pi}{8}+\left\{\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right\}=\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}=1$

25. $\sin A=\frac{3}{5}$ হলে, $\frac{1+\tan A}{1-\tan A}=$ কত?

(a) −7 (b) 7 (c) $\frac{4}{7}$ (d) $-\frac{1}{7}$

সমাধান: (b); $\sin A=\frac{3}{5}, \tan A=\frac{3}{4}\therefore\frac{1+\tan A}{1-\tan A}=\frac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=7$

26. $\frac{1-\cos2\theta+\sin2\theta}{1+\cos2\theta+\sin2\theta}$ এর মান কত?

(a) $\cot\theta$ (b) $\tan\theta$
(c) $\sin\theta+\cos\theta$ (d) $\sin\theta-\cos\theta$

সমাধান: (b); $\frac{1-\cos2\theta+\sin2\theta}{1+\cos2\theta+\sin2\theta}=\frac{2\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}$
$=\frac{2\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{2\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)}=\tan\theta$

27. $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ হলে, θ এর মান কত?

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) অনির্ণেয় (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) 0

সমাধান: (c); $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta=1\Rightarrow\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta+\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta=1$
$\Rightarrow\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\cos0°\therefore\theta=\frac{\pi}{4}$

28. [ত্রিভুজ ABC: শীর্ষ A, B, C; বাহু a, b, c] উপরের ABC ত্রিভুজে, [Ans: c]

(i) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$
(ii) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}bc\cos A$
(iii) $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

29. $g(\theta)=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$ হলে, $g\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ এর মান কোনটি?

(a) $\sin\theta$ (b) $\cos\theta$ (c) $\sec\theta$ (d) $\tan\theta$

সমাধান: (d); $g\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{1+1.\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$
$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{1+\tan\frac{\pi}{4}.\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right)=\tan\theta$

30. $\sin\left(\frac{\pi}{2^4}\right)$ এর মান কোনটি?

(a) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
(c) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ (d) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

সমাধান: (a); $\sin\left(\frac{\pi}{2^4}\right)=\frac{1}{2}.2\sin\left(\frac{\pi}{2^4}\right)$
$=\frac{1}{2}\sqrt{4\sin\frac{\pi}{2^4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)}$
$=\frac{1}{2}\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{8}}}$
$=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

31. θ কোণ 0° থেকে বেড়ে 90° হলে, sin θ এর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি? [Ans: d]

(a) 1 থেকে কমে 0 হয়
(b) 0 থেকে কমে −1 হয়
(c) −1 থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 0 হয়
(d) 0 থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 1 হয়

অসীম কুমার সাহা স্যার

32. $\cos^2 3°+\cos^2 6°+\cos^2 9°+\ldots+\cos^2 87°=?$

(a) 14 (b) 14.5 (c) 28 (d) 29

সমাধান: (b); ১ম পদ, a = 3, সাধারণ অন্তর, d = 3
∴ n তম পদ= 87 ∴ $a+(n-1)d=87\Rightarrow n=29$.
মধ্যপদ $=\frac{29+1}{2}=15$ তম পদ 15 তম পদ= $3+(15-1)3=45\therefore\cos^2 45°=\frac{1}{2}$. জোড়া: $\cos^2 3°+\cos^2 87°=\cos^2 3°+\sin^2 3°=1$ ∴ জোড়া মোট 14 টি, ∴ সমষ্টি = 14×1 + মধ্যপদের মান
$=14+\frac{1}{2}=14.5$

33. $\sin(A+B)=\frac{a}{b}$ এবং $\sin(A-B)=\frac{b}{a}$ হলে, $\tan A\cot B$ এর মান কত?

(a) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ (b) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ (c) 1 (d) 0

সমাধান: (a); $\tan A\cot B=\frac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}$
$=\frac{2\sin A\cos B}{2\cos A\sin B}=\frac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{\sin(A+B)-\sin(A-B)}=\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

34. tan 2A মান নিচের কোনটি? [Ans: b]

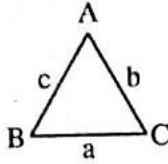
(a) $\frac{\tan^2 A-1}{2\tan A}$ (b) $\frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A-\sin^2 A}$
(c) $\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ (d) $\frac{1-\tan A}{1+\tan A}$

35. $\sin 2A=\frac{3}{5}$ হলে, $\tan A=$ কত?

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{1}{3}$

সমাধান: (d); $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{2\sin A\cos A}{2\cos^2 A}$
[2 cos A দ্বারা লব ও হরকে গুণ]
$=\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\frac{\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



36. (i) $b = 2R\sin B$ [Ans: d]
(ii) $a = c\cos B + b\cos C$
(iii) $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

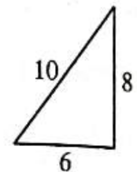
37. ΔABC এর ক্ষেত্রে [Ans: d]
(i) $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ (ii) $\Delta = \frac{abc}{4R}$
(iii) $\sin B = \frac{2\Delta}{ca}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

38. যদি $\cos x + \cos y = p$ এবং $\sin x + \sin y = q$. হয়, তবে $\tan\frac{x+y}{2} = ?$
(a) $\frac{p}{q}$ (b) $\frac{q}{p}$ (c) $\frac{p^2}{q^2}$ (d) $\frac{q^2}{p^2}$
সমাধান: (b); $\cos x + \cos y = p$
$\Rightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = p \ldots\ldots (i)$
এবং $\sin x + \sin y = q$
$\therefore 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = q \ldots\ldots (ii)$
এখন, (ii) ÷ (i) $\Rightarrow \tan\frac{x+y}{2} = \frac{q}{p}$

মো: রফিকুল ইসলাম স্যার

39. $\sin A = \frac{3}{5}$ এবং $\cos B = \frac{12}{13}$ হলে,
(i) $\sin(A-B) = \frac{16}{65}$ (ii) $\cos(A+B) = \frac{63}{65}$
(iii) $\tan A + \tan B = \frac{7}{6}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (c); এখানে, $\sin A = \frac{3}{5}, \cos A = \frac{4}{5}$,
$\cos B = \frac{12}{13}, \sin B = \frac{5}{13}$
$\therefore \sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$
$= \frac{3}{5}.\frac{12}{13} - \frac{4}{5}.\frac{5}{13} = \frac{36-20}{65} = \frac{16}{65}$
আবার, $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$
$= \frac{4}{5}.\frac{12}{13} - \frac{3}{5}.\frac{5}{13} = \frac{48-15}{65} = \frac{33}{65}$
$\therefore \tan A + \tan B = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} + \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}}$
$= \frac{3}{4} + \frac{5}{12} = \frac{9+5}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$

40. কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6, 8 এবং 10 একক হলে-
(i) ত্রিভুজটি সমকোণী
(ii) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 24 বর্গ একক
(iii) ত্রিভুজটির পরিসীমা 12 একক
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (a); এখানে $10^2 = 6^2 + 8^2$ এটি সমকোণী ত্রিভুজ। $\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 6 \times 8$
$= 24$ বর্গএকক



$\therefore$ পরিসীমা $= 6 + 8 + 10$
$= 24$ একক

41. যখন n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা তখন $\cos n\pi$ এর মান-
(a) 1 (b) -1 (c) $(-1)^n$ (d) 0
সমাধান: (c);
$n = 0$ হলে $\cos(0.\pi) = 1 = (-1)^0$
$n = 1$ হলে $\cos(1.\pi) = -1 = (-1)^1$
……………………………………
……………………………………
$n = n$ হলে, $\cos n\pi = (-1)^n$

42. n একটি পূর্ণসংখ্যা হলে $\cos\{(2n+1)\pi + \frac{\pi}{3}\}$ এর মান– [Ans: a]
(a) $-\frac{1}{2}$ (b) 0
(c) 1 (d) কোনটিই নয়

43. $f(\theta) = \cos\theta - \sin\theta$ হলে θ এর কোন মানের জন্য $f(\theta) = 0$?
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) π (d) $\frac{\pi}{6}$
সমাধান: (b); $f(\theta) = 0 \Rightarrow \cos\theta - \sin\theta = 0$
$\Rightarrow \cos\theta = \sin\theta \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

44. $\tan(-15°)$ এর মান কত?
(a) $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (b) $\sqrt{5}$
(c) $\sqrt{3} - 2$ (d) $\sqrt{2} - 3$
সমাধান: (c); $\tan(-15) = -(\tan(45° - 30°))$
$= -\frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45°.\tan 30°} = -\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1.\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$
$= -\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = -\frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{2\sqrt{3}-4}{2} = \sqrt{3} - 2$

45. $\tan 75° - \tan 30° - \tan 75°\tan 30°$ সমান কত?
(a) -1 (b) 1 (c) $\sqrt{3}$ (d) 0
সমাধান: (b); $\tan(75° - 30°) = \tan 45°$
$\Rightarrow \frac{\tan 75° - \tan 30°}{1 + \tan 75°\tan 30°} = 1$
$\Rightarrow \tan 75° - \tan 30° - \tan 75°\tan 30° = 1$

46. $P+Q=\frac{\pi}{4}$ হলে $(1+\tan P)(1+\tan Q)=?$

(a) -2 (b) 1 (c) 2 (d) 3

সমাধান: (c); $P+Q=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(P+Q)=\tan\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{\tan P+\tan Q}{1-\tan P.\tan Q}=1 \Rightarrow \tan P+\tan\theta$

$=1-\tan P.\tan Q$

$\Rightarrow \tan P+\tan Q+\tan P.\tan Q=1$

$\therefore (1+\tan p)(1+\tan Q)$

$=1+\tan P+\tan Q+\tan P\tan Q=1+1=2$

47. $\cos^2(60°+A)+\cos^2(60°-A)$ এর মান-

(a) $1-\frac{1}{2}\cos 2A$ (b) $1+\sin 2A$

(c) $1+3\cos 2A$ (d) $1+\frac{1}{2}\cos 2A$

সমাধান: (a); $\frac{1}{2}\{2\cos^2(60°+A)+2\cos^2(60°-A)\}=\frac{1}{2}\{1+\cos(120°+2A)+1+\cos(120°-2A)\}=\frac{1}{2}(2+2\cos 120°.\cos 2A)$

$=\frac{1}{2}(2-\cos 2A)=1-\frac{1}{2}\cos 2A$

48. $\cos^3 x$ এর সূত্র–

(a) $\frac{4\cos x+\cos 3x}{3}$ (b) $\frac{\cos x+3\cos 3x}{4}$

(c) $\frac{\cos x+\cos 3x}{3}$ (d) $\frac{3\cos x+\cos 3x}{4}$

সমাধান: (d); $4\cos^3 x=3\cos x+\cos 3x$

$\cos^3 x=\frac{3\cos x+\cos 3x}{4}$

49. ABC ত্রিভুজের তিনটি বাহু a, b, c এবং পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R হলে-

(a) $\Delta=\frac{4R}{abc}$ (b) $\Delta=\frac{R}{4abc}$

(c) $\Delta=\frac{R}{abc}$ (d) $\Delta=\frac{abc}{4R}$

সমাধান: (d); ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C$

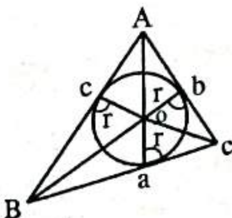
$=\frac{1}{2}ab.\frac{c}{2R}\left[\because \frac{c}{\sin c}=2R\right]=\frac{abc}{4R} \therefore \Delta=\frac{abc}{4R}$

50. ত্রিভুজের অর্ধ পরিসীমা s এবং অন্তঃব্যাসার্ধ r হলে-

(a) $\Delta=r+s$ (b) $\Delta=r-s$

(c) $\Delta=rs$ (d) $\Delta=\frac{s}{r}$

সমাধান: (c);



ΔABC এর ক্ষেত্রফল $=\Delta OBC$ এর ক্ষেত্রফল $+\Delta OAB$ এর ক্ষেত্রফল $+\Delta OAC$ এর ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}br=\frac{r}{2}.(a+b+c)$

$=r.\frac{a+b+c}{2}=rs \therefore \Delta=rs$

51. একক ব্যাসার্ধের বৃত্তে অন্তর্লিখিত একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

(a) $\frac{3}{2}$ একক (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ একক

(c) $\sqrt{3}$ একক (d) 1 একক

সমাধান: (c); $R=1,$ একক $a=b=c$ [সমবাহু ত্রিভুজ]

$\Delta=\frac{abc}{4R} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{a^3}{4R} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{a}{4.1} \Rightarrow a=\sqrt{3}$ একক

এ.টি.এস.এম. মাসুদুল হাকিম স্যার

52. ABC ত্রিভুজের $\angle C=90°$ হলে $\cos^2 A+\cos^2 B$ এর মান কত?

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) 1 (d) 3

সমাধান: (c); $[A+B=90° \angle C=90°]$

$\cos^2 A+\cos^2 B$

$=\cos^2 A+\cos^2(90°-A)$

$=\cos^2 A+\sin^2 A=1$

53. $\tan 20°+\tan 25°+\tan 20°\tan 25°$ এর মান কত?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) 1 (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

সমাধান: (c); $\tan 45°=\tan(20°+25°)$

$\Rightarrow 1=\frac{\tan 20°+\tan 25°}{1-\tan 20°\tan 25°}$

$\Rightarrow 1-\tan 20°.\tan 25°=\tan 20°+\tan 25°$

$\therefore \tan 20°+\tan 25°+\tan 20°.\tan 25°=1$

54. একটি ত্রিভুজের বাহুত্রয় $a=13, b=14, c=15$ হলে, অন্তঃব্যাসার্ধ $r=?$

(a) 2 (b) 8 (c) 4 (d) 6

সমাধান: (c); $a=13, b=14, c=15, s=21$

$r=\frac{\Delta}{s}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}=4$

55. $c^2+a^2-b^2=ac$ হলে, $\angle B=?$

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) None

সমাধান: (a); $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{ac}{2ca}=\frac{1}{2} \therefore B=\frac{\pi}{3}$

MCQ: সম্ভাব্য নমুনা প্রশ্ন ও সমাধান

01. $\cos(180° + \theta) = ?$ **[Ans: b]**
(a) $\cos\theta$ (b) $-\cos\theta$ (c) $\sin\theta$ (d) $-\sin\theta$

02. ΔABC -এ —
(i) $\cos A = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ (ii) $\cos B = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
(iii) $\cos C = \frac{b^2+a^2-c^2}{2ba}$ **[Ans: c]**
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii (c) iii (d) i, ii, iii

03. $\tan x = \frac{b}{a}$ হলে $a\cos 2x + b\sin 2x$ এর মান হলো–
(a) a (b) a − b (c) a + b (d) b
সমাধান: **(a)**; $a \times \frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{b^2}{a^2}} + b \times \frac{2.\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}}$
$= a\times\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + b\times\frac{2ab}{a^2+b^2} = \frac{a^3-ab^2+2ab^2}{a^2+b^2} = \frac{a(a^2+b^2)}{a^2+b^2} = a$

04. $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ হলে, $\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A =$ কত?
(a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) 3
সমাধান: **(b)**; $\frac{1}{\tan(A+B+C)}$
$= \frac{1-(\tan A\tan B+\tan A\tan C+\tan B\tan C)}{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C} = 0$
$\Rightarrow \tan A\tan B + \tan B\tan C + \tan C\tan A = 1$

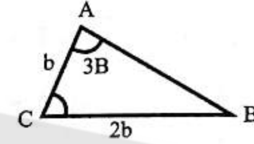
05. $\sin^2 10^0 + \sin^2 20° + \sin^2 30° + \ldots \sin^2 90° =$ কত? **[Ans: b]**
(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 8
$\Rightarrow AC = 5\sqrt{13}$ cm

06. $\sin A.\cos B + \cos A.\sin B = 1$ এবং $A = 30°$ হলে, $B = ?$
(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°
সমাধান: **(c)**; $\sin(A + B) = 1 \Rightarrow A + B = 90°$
$\Rightarrow B = 90° - 30° = 60°$

07. ABC ত্রিভুজের, $\angle A = 30°, c = a\sqrt{2}$ হলে $\angle C = ?$
(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°
সমাধান: **(b)**; (চিত্র: A, B, C; $a\sqrt{2}$, 30°, 105°, 45°, a) $\frac{a}{\sin 30°} = \frac{a\sqrt{2}}{\sin C}$
$\Rightarrow \sin C = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$C = 45°$ হলে $\frac{b}{\sin B} = 2a$; $C = 135°$ হলেও $\frac{b}{\sin B} = 2a$
$\therefore C = 45°$ অথবা 135°

08. (চিত্র: 1, 2, $\sqrt{5}$, α, θ) চিত্র থেকে– **[Ans: c]**
(i) $\tan\theta = 2$ (ii) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (iii) $\sec\alpha = \sqrt{5}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) ii (c) iii (d) i, ii, iii

09. ΔABC – এ $a = 2b$ এবং $A = 3B$ হলে $\angle B =$ কত?
(a) 30° (b) 60° (c) 90° (d) 120°
সমাধান: **(a)**;



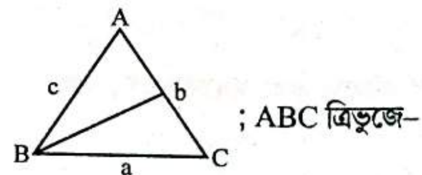
$\frac{2b}{\sin 3B} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow 2 = 3 - 4\sin^2 B$
$\Rightarrow \sin B = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \sin B = \frac{1}{2}$; [B-ত্রিভুজের 1 টি কোণ]
$\therefore B = 30°$ অথবা, 150°। কিন্তু, 3B ত্রিভুজের 1টি কোণ।
$\therefore B = 30°$.

10. $\sin 18°$ এর মান কোনটি? **[Ans: c]**
(a) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
(c) $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ (d) $\frac{1}{4}\sqrt{5+1}$

11. $\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C} = ?$
(a) $\frac{b+c}{b-c}$ (b) $\frac{b-c}{b+c}$ (c) $\frac{2c}{3b}$ (d) $\frac{c}{R}$
সমাধান: **(b)**; $\sin B \propto b$; $\sin C \propto c$
$\therefore \frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C} = \frac{b-c}{b+c}$

12. $x = \sin(A + 60°), y = \sin(A - 60°)$, $x + y$ এর মান কোনটি?
(a) sinA (b) cos A (c) 1 (d) $\sqrt{3}$
সমাধান: **(a)**; $\sin(A + 60°) + \sin(A - 60°)$
$= 2\sin$ক$.\cos 60° = \sin A$

13. **[Ans: c]**



; ABC ত্রিভুজে–
(i) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
(ii) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}bc\cos A$
(iii) $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

14. $\cos 15° + \sin 15° = ?$ **[Ans: a]**

(a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{3}{2}$

15. n পূর্ণসংখ্যা হলে $\sin\left\{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}\right\}$ এর মান কত? **[Ans: c]**

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. ABC সমকোণী ত্রিভুজ হলে, $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$ এর মান কত?

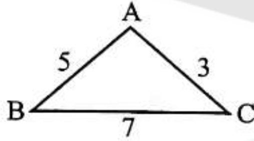
(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) 0 (d) -1

সমাধান: (b); $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

$= \cos^2\frac{\pi}{2} + \sin^2 B + \cos^2 B$

$= 0 + 1 = 1$ (Use Calculator)

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:



17. ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম কোণ কত ডিগ্রি?

(a) 21.78° (b) 20.41° (c) 38.21° (d) 25.32°

সমাধান: (a); $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5^2+7^2-3^2}{2\times5\times7}\right) = 21.78°$

18. (i) $\cos3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ **[Ans: b]**

(ii) $4\sin^3 A = \sin3A - 3\sin A$

(iii) $\cos2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

19. $f(x) = \sin2x, g(x) = x^3$ হলে $f\left(g\left(\frac{\sqrt[3]{\pi}}{2}\right)\right)$ এর মান কত? **[Ans: a]**

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

20. $\tan A = \frac{3}{4}, \tan B = \frac{5}{12}$ হলে $\sin(A+B)$ এর মান কত?

(a) $-\frac{16}{65}$ (b) $\frac{16}{65}$ (c) $\frac{56}{65}$ (d) $-\frac{65}{56}$

সমাধান: (c); $\tan A = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow A = \pi + \tan^{-1}\frac{3}{4}$ or, $\tan^{-1}\frac{3}{4}$

$\tan B = \frac{5}{12} \Rightarrow B = \pi + \tan^{-1}\frac{5}{12}$ or, $\tan^{-1}\frac{5}{12}$

$\therefore \sin(A+B) = \frac{56}{65}$ or, $-\frac{56}{65}$

21. $\cos192° + \sin438° + \tan168° + \tan12°$ এর সঠিক মান নিচের কোনটি? **[Ans: a]**

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) -1

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু 8 সে.মি., 9 সে.মি. এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ θ।

22. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $18\sqrt{2}$ বর্গ সে.মি. হলে $\theta =$ কত? [θ-সূক্ষ্ম কোণ]

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

সমাধান: (b); $\frac{1}{2}ab\sin\theta = 18\sqrt{2} \Rightarrow \sin\theta = \frac{36}{8\times9}\sqrt{2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore \theta = 45°$ or, $\theta = 135°$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$A + B + C = \pi$$

23. $\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) =$ কত? **[Ans: c]**

(a) $-\sin\frac{A}{2}$ (b) $-\cos\frac{A}{2}$ (c) $\sin\frac{A}{2}$ (d) $\cos\frac{A}{2}$

24. $\tan(A+C) =$ কত? **[Ans: a]**

(a) $-\tan B$ (b) $-\cot B$ (c) $\sin B$ (d) $\frac{\sin B}{\cos B}$

25. ABC ত্রিভুজের বাহুগুলো a, b, c এবং $(a+b+c)(b-c-a) = 3bc$ হলে— **[Ans: a]**

(i) $A = 60°$ (ii) $B = 60°$ (iii) $C = 60°$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i (b) ii (c) iii (d) i, ii, iii

26. ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ R হলে, উহার ক্ষেত্রফল কত? **[Ans: b]**

(a) $\frac{4R}{abc}$ (b) $\frac{abc}{4R}$ (c) $\frac{abc}{R}$ (d) $\frac{R}{abc}$

27. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলোর পরিমাণ, 3, 5 ও 7 হলে, স্থূলকোণের পরিমাণ কত?

(a) 60° (b) 100° (c) 120° (d) 180°

সমাধান: (c); $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}\right) = 120°$

28. $\sin3A = \cos3A$ হবে যখন $A =$ কত? **[Ans: c]**

(a) 10° (b) 20° (c) 15° (d) 45°

29. ABC ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ R হলে sin A এর জন্য নিচের কোনটি সঠিক? **[Ans: b]**

(a) $\frac{a}{R}$ (b) $\frac{a}{2R}$ (c) 2R (d) $\frac{2R}{a}$

30. $\cot A - \tan A =$ কত?

(a) $2\cos^2 A$ (b) $2\cos 2A$
(c) $2\cot 2A$ (d) $2\sin^2 A$

সমাধান: (c); $\cot A - \tan A = \frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\sin A}{\cos A}$

$= 2 \times \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{2\cos A \sin A} = 2\cot 2A$

31. $\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} =$ কত?

(a) $\tan\theta$ (b) $\cot\theta$ (c) $\tan^2\theta$ (d) 1

সমাধান: (a); $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

$\therefore \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} = \sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}} = \tan\theta$

32. একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 2 একক। ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের ব্যাস কত?

(a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

সমাধান: (c); $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{2}{\sin 60°} = 2R \Rightarrow 2R = \frac{4}{\sqrt{3}}$

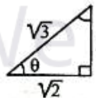
33. ΔABC এ A, B, C কোণগুলির অনুপাত যথাক্রমে 2: 3: 7 হলে a: b =?

(a) $\sqrt{2}:\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{3}:\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{2}:1$ (d) $1:\sqrt{2}$

সমাধান: (d); $2x + 3x + 7x = 180° \Rightarrow x = 15°$

$\therefore a:b = \sin 30° : \sin 45° = 1:\sqrt{2}$

34. নিচের ত্রিভুজ থেকে $\tan\theta + \cot\theta =$ কত? [Ans: c]



(a) $2\sqrt{3}$ (b) $\frac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$ (c) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

35. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ্য কর: [Ans: d]

(i) $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$
(ii) $a\sin B = b\sin A$
(iii) $b = c\cos A + a\cos C$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

36. $\frac{4\cos^2\theta-1}{2\cos\theta-1}$ এর মান কত? [Ans: a]

(a) $2\cos\theta + 1$ (b) $2\cos\theta$
(c) $2\sin\theta$ (d) $2\sin^2\theta$

37. $0 < \theta < \pi$ হলে $\frac{\sin\frac{\theta}{2}-\sqrt{1+\sin\theta}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sqrt{1+\sin\theta}} =?$ [Ans: b]

(a) $\tan\frac{\theta}{2}$ (b) $\cot\frac{\theta}{2}$
(c) $\tan\frac{\theta}{2} - 1$ (d) $-\left(\cot\frac{\theta}{2} + 2\right)$

38. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ্য কর: [Ans: a]

(i) $\Delta = \frac{abc}{4R}$, R পরিব্যাসার্ধ
(ii) $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$
(iii) $\sin 3A = 4\sin^3 A - 3\sin A$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

39. $\sin 25° + \cos 25° =$ কত? [Ans: a]

(a) $\sqrt{2}\cos 20°$ (b) $-\sqrt{2}\cos 20°$
(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 20°$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 20°$

40. ΔABC সমকোণী ত্রিভুজের $\sin(A + B + C) =?$ [Ans: b]

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) $-\text{Cos}A$

41. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ্য কর: [Ans: b]

(i) $2\sin A\sin B = \cos(A - B) + \cos(A + B)$
(ii) $\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$
(iii) $\cos 70° - \cos 10° + \sin 40° = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

42. $\sin^2 10° + \sin^2 20° + \sin^2 30° + \cdots + \sin^2 200° =?$

(a) 9.147 (b) 10 (c) 20 (d) 30

সমাধান: (a); $\sin^2 10° + \sin^2 20° + ... + \sin^2 90° +$
$\sin^2(90° + 10°) + \sin^2(90° + 20°) + \cdots +$
$\sin^2 180° + \sin^2(180° + 10°(+ \sin^2(180° + 20°)$
$= 9 + 0.147 = 9.147$

43. $\cos^2 0° + \cos^2 10° + \cos^2 20° + \cdots + \cos^2 90° =$ কত? [Ans: a]

(a) 5 (b) 3 (c) 2 (d) 0

সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

◆ **CQ: বিগত বছরসমূহের বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান:**

01. $\sin\theta = \frac{3}{5}$ এবং $A = \frac{\pi}{12}$. [DB'22]

(ক) দেখাও যে, $\cos 75° = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ 2

(খ) $\frac{\cot\theta+\cos(-\theta)}{\operatorname{cosec}(-\theta)+\tan\theta}$ এর মান নির্ণয় কর; যখন $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ হয়। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $\tan A\tan 3A\tan 5A\tan 7A\tan 11A = 1$. 4

সমাধান

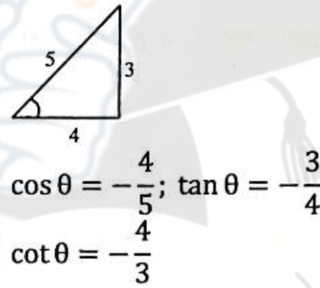
ক. $\cos 75° = \cos(45°+30°) = \cos 45°\cos 30° - \sin 45°\sin 30° = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)$

$\cos 75° = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ (দেখানো হলো)

খ. দেওয়া আছে,

$\sin\theta = \frac{3}{5}\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{3}$ এখানে, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

$\therefore$ θ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত। কাজেই, $\sin\theta$ ধনাত্মক কিন্তু $\cos\theta$ ও $\tan\theta$ এর মান ঋণাত্মক।



$\cos\theta = -\frac{4}{5};\ \tan\theta = -\frac{3}{4}$

$\cot\theta = -\frac{4}{3}$

$\therefore \frac{\cot\theta+\cos(-\theta)}{\operatorname{cosec}(-\theta)+\tan\theta} = \frac{\cot\theta+\cos\theta}{-\operatorname{cosec}\theta+\tan\theta} = \frac{-\frac{4}{3}-\frac{4}{5}}{-\frac{5}{3}-\frac{3}{4}}$

$\therefore \frac{\cot\theta+\cos(-\theta)}{\operatorname{cosec}(-\theta)+\tan\theta} = \frac{\frac{20+12}{15}}{\frac{20+9}{12}} = \frac{32}{15}\times\frac{12}{29} = \frac{128}{145}$ **(Ans.)**

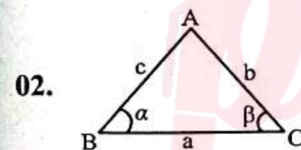
গ. দেওয়া আছে, $A = \frac{\pi}{12}\therefore$ L. H. S. $= \tan A.\tan 3A.\tan 5A.\tan 7A.\tan 11A$

$= \tan\frac{\pi}{12}.\tan\frac{3\pi}{12}.\tan\frac{5\pi}{12}.\tan\frac{7\pi}{12}.\tan\frac{11\pi}{12} = \tan\frac{\pi}{12}.\tan\frac{\pi}{4}.\tan\frac{5\pi}{12}.\tan\frac{6\pi+\pi}{12}.\tan\frac{6\pi+5\pi}{12}$

$= \tan\frac{\pi}{12}.1.\tan\frac{5\pi}{12}.\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right).\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{12}.\tan\frac{5\pi}{12}.\left(-\cot\frac{\pi}{12}\right)\left(-\cot\frac{5\pi}{12}\right)$ $[\because \tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\cot\theta]$

$= \tan\frac{\pi}{12}.\tan\frac{5\pi}{12}.\frac{1}{\tan\frac{\pi}{12}}.\frac{1}{\tan\frac{5\pi}{12}} = 1 \therefore$ L. H. S = R. H. S **(Proved)**

02. [DB'22]



(ক) দেখাও যে, $\frac{b+c}{b-c} = \frac{\sin B+\sin C}{\sin B-\sin C}$ 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B} = 2$. 4

(গ) $\alpha = 45°, \beta = 60°$ এবং $a = (\sqrt{3}+1)$ সে.মি. হলে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. যেকোনো ত্রিভুজ ΔABC এ, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$\therefore$ L. H. S $= \frac{b+c}{b-c} = \frac{2R\sin B+2R\sin C}{2R\sin B-2R\sin C} = \frac{2R(\sin B+\sin C)}{2R(\sin B-\sin C)} = \frac{\sin B+\sin C}{\sin B-\sin C}$ = R. H. S (দেখানো হলো)

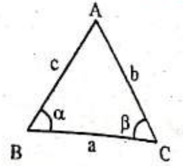
খ. এখানে, $A+B+C = \pi \therefore$ L. H. S $= \frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}$

$= \frac{\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C}{\sin A\sin B\sin C} = \frac{\sin 2A+\sin 2B+2\sin C\cos C}{2\sin A\sin B\sin C}$

$= \frac{2\sin\frac{2A+2B}{2}\cos\frac{2A-2B}{2}+2\sin C\cos C}{2\sin A\sin B\sin C} = \frac{2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C}{2\sin A\sin B\sin C}$

$= \frac{2\sin(\pi-C)\cos(A-B)+2\sin C.\cos\{\pi-(A+B)\}}{2\sin A\sin B\sin C} = \frac{2\sin C\cos(A-B)-2\sin C\cos(A+B)}{2\sin A\sin B\sin C}$

$= \frac{2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]}{2\sin A\sin B\sin C} = \frac{2\sin C.2\sin\frac{A-B+A+B}{2}\sin\frac{A+B-A+B}{2}}{2\sin A\sin B\sin C} = \frac{4\sin C.\sin A.\sin B}{2\sin A\sin B\sin C} = 2 \therefore$ L. H. S = R. H. S (প্রমাণিত)



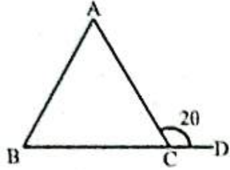
গ. এখানে, $B = \alpha = 45°; C = \beta = 60° \therefore A = 180° - (B + C) = 180° - (45° + 60°) = 75°$

এখানে, $\sin 75° = \sin(45° + 30°)$

$= \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° = \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} + 1)$

ΔABC হতে sine সূত্রানুসারে, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a}{\sin A} . \sin B = \frac{(\sqrt{3}+1)}{\sin 75°} . \sin 45° = \frac{(\sqrt{3}+1)}{\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)} . \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} . \frac{1}{\sqrt{2}}$

$b = 2 \therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল, $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1) . 2 . \sin 60° = (\sqrt{3} + 1) . \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \Delta = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ cm² **(Ans.)**

03. 

[RB'22]

(ক) $\mathbf{a = \sqrt{3} + 1, \ b = \sqrt{3} - 1, C = 60°}$ হলে $\mathbf{\Delta ABC}$ এ **c** বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 2

(খ) $\mathbf{A + B = 120°}$ হলে উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $\mathbf{\sin^2(\theta + \alpha) + \sin^2(\theta - \alpha) - \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}}$. 4

(গ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\mathbf{\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = -4 \cos A \sin B \cos 2\theta}$. 4

সমাধান

ক. আমরা জানি, $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2-c^2}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2}{2} = \frac{2\{(\sqrt{3})^2+(1)^2\}-c^2}{(\sqrt{3})^2-1^2} \Rightarrow 1 = \frac{2(3+1)-c^2}{3-1}$

$\Rightarrow 1 = \frac{8-c^2}{2} \Rightarrow 2 = 8 - c^2 \Rightarrow c^2 = 8 - 2 = 6 \therefore c = \sqrt{6}$

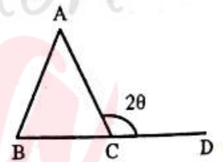
খ. বহিঃস্থ কোণ $\angle ACD = \angle A + \angle B \Rightarrow 2\theta = 120° \Rightarrow \theta = 60°$

$L.H.S = \sin^2(\alpha + \theta) + \sin^2(\theta - \alpha) - \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}[2 \sin^2(\theta + \alpha) + 2 \sin^2(\theta - \alpha)] - \cos^2 \alpha$

$= \frac{1}{2}[1 - \cos(2\theta + 2\alpha) + 1 - \cos(2\theta - 2\alpha)] - \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}[2 - \cos(2\theta + 2\alpha) - \cos(2\theta - 2\alpha)] - \cos^2 \alpha$

$= 1 - \frac{1}{2}[\cos(2\theta + 2\alpha) + \cos(2\theta - 2\alpha)] - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} . 2 \cos\left(\frac{2\theta+2\alpha+2\theta-2\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{2\theta+2\alpha-2\theta+2\alpha}{2}\right) - \cos^2 \alpha$

$= 1 - \cos 2\theta \cos 2\alpha - \cos^2 \alpha = 1 - \cos 120° \cos 2\alpha - \cos^2 \alpha$



$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \cos 120° \cos 2\alpha - \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha - \cos^2 \alpha$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[1 + \cos 2\alpha] - \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} = R.H.S$ **(Showed)**

গ. এখানে, $A + B + C = \pi$ আবার, $C + 2\theta = \pi \Rightarrow C = \pi - 2\theta$

$L.H.S = \sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = (\sin 2A + \sin 2C) - \sin 2B$

$= 2 \sin \frac{2A+2C}{2} \cos \frac{2A-2C}{2} - \sin 2B = 2 \sin(A + C) \cos(A - C) - 2 \sin B \cos B$

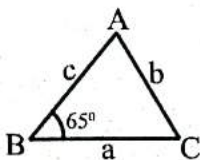
$= 2 \sin(\pi - B) \cos(A - C) - 2 \sin B \cos B = 2 \sin B . \cos(A - C) - 2 \sin B \cos B$

$= 2 \sin B [\cos(A - C) - \cos\{\pi - (A + C)\}] = 2 \sin B [\cos(A - C) + \cos(A + C)]$

$= 2 \sin B . 2 \cos \frac{A-C+A+C}{2} \cos \frac{A-C-A-C}{2} = 4 \sin B \cos A . \cos(-C)$

$= 4 \sin B \cos A . \cos C = 4 \sin B \cos A . \cos(\pi - 2\theta) = -4 \cos A \sin B \cos 2\theta$

$\therefore L.H.S = R.H.S$ **(Proved)**

04. 

[RB'22]

(ক) $\mathbf{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 1}$ হলে দেখাও যে, $\mathbf{\sin \alpha \operatorname{cosec} \beta + \cos \alpha \sec \beta = 0}$. 2

(খ) $\mathbf{C = 75°}$ হলে উদ্দীপক হতে দেখাও যে, $\mathbf{\sec 2A - \sqrt{3} \operatorname{cosec} 2A = 4}$. 4

(গ) উদ্দীপক ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $\mathbf{\frac{a^2}{bc} \sin(B - C) + \frac{b^2}{ca} \sin(C - A) + \frac{c^2}{ab} \sin(A - B) = 0}$ 4

সমাধান

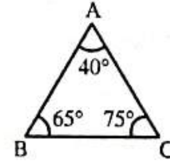
ক. দেওয়া আছে, $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 1 \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = 1 \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos 0 \Rightarrow \alpha+\beta = 0 \therefore \alpha = -\beta$

$L.H.S = \sin\alpha\operatorname{cosec}\beta + \cos\alpha\sec\beta = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\sin(-\beta)}{\sin\alpha} + \frac{\cos(-\beta)}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = -1+1 = 0 = R.H.S$

$\therefore L.H.S = R.H.S$ (দেখানো হলো)

খ. দেওয়া আছে, $B = 65°, C = 75°$

$\therefore A = 180° - (B+C) = 180° - (65°+75°) = 40°$



$L.H.S = \sec 2A - \sqrt{3}\operatorname{cosec} 2A = \frac{1}{\cos 2A} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 2A} = \frac{\sin 2A - \sqrt{3}\cos 2A}{\sin 2A\cos 2A}$

$= \frac{\frac{1}{2}\sin 2A - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2A}{\frac{1}{2}\sin 2A.\cos 2A} = \frac{\cos 60°\sin 2A - \sin 60°\cos 2A}{\frac{1}{4}\times 2\sin 2A\cos 2A}$

$= 4\times\frac{\sin(2A-60°)}{\sin 4A} = 4\times\frac{\sin(2\times 40° - 60°)}{\sin(4\times 40°)} = 4\times\frac{\sin 20°}{\sin 160°} = 4\times\frac{\sin 20°}{\sin(180°-20°)} = 4\times\frac{\sin 20°}{\sin 20°} = 4\times 1 = 4$

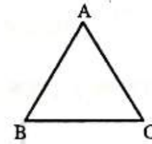
$\therefore L.H.S = R.H.S$ (দেখানো হলো)

গ. উদ্দীপকে, $A+B+C = \pi$, যেকোনো ত্রিভুজে, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

এখানে, $\frac{a^2}{bc}.\sin(B-c) = \frac{a^3}{abc}(\sin B\cos C - \cos B\sin C)$

$= \frac{a^3}{abc}\left(\frac{b}{2R}.\cos C - \cos B\frac{c}{2R}\right) = \frac{a^3}{2Rabc}(b\cos C - c\cos B) = \frac{a^2}{2Rabc}(b\cos c + c\cos B)(b\cos C - c\cos B)$

[যেকোনো ত্রিভুজে, $a = b\cos C + c\cos B$]



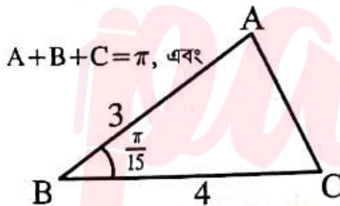
$\frac{a^2}{bc}\sin(B-C) = \frac{a^2}{2Rabc}(b^2\cos^2 C - c^2\cos^2 B)$ ……… (i)

অনুরূপভাবে, $\frac{b^2}{ca}\sin(C-A) = \frac{b^2}{2Rabc}(c^2\cos^2 A - a^2\cos^2 C)$ ……… (ii)

$\frac{c^2}{ab}\sin(A-B) = \frac{c^2}{2Rabc}(a^2\cos^2 B - b^2\cos^2 A)$ ……… (iii)

(i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই, $\frac{a^2}{bc}\sin(B-C) + \frac{b^2}{ca}\sin(C-A) + \frac{c^2}{ab}\sin(A-B) = \frac{1}{2Rabc}\{(a^2b^2\cos^2 C - a^2c^2\cos^2 B)$
$+(b^2c^2\cos^2 A - b^2a^2\cos^2 C) + (c^2a^2\cos^2 B - c^2b^2\cos^2 A)\}$

$\Rightarrow \frac{a^2}{bc}\sin(B-C) + \frac{b^2}{ca}\sin(C-A) + \frac{c^2}{ab}\sin(A-B) = \frac{1}{2Rabc}\times 0 = 0$ (প্রমাণিত)

05. 

[Ctg.B'22]

(ক) প্রমাণ কর: $\tan 35° + \tan 10° + \tan 35°\cdot\tan 10° = 1$ 2

(খ) প্রমাণ কর: $\cos^2 A - \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\sin A\cos B\sin C$. 4

(গ) ABC ত্রিভুজটি সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. আমরা জানি, $\tan 45° = 1 \Rightarrow \tan(35°+10°) = 1 \Rightarrow \frac{\tan 35° + \tan 10°}{1 - \tan 35°\tan 10°} = 1$

$\Rightarrow \tan 35° + \tan 10° = 1 - \tan 35°\tan 10° \therefore \tan 35° + \tan 10° + \tan 35°\tan 10° = 1$ (প্রমাণিত)

খ. ΔABC এ, $A+B+C = \pi$; $L.H.S = \cos^2 A - \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2C) - \cos^2 B$

$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2C) - \cos^2 B = 1 + \cos(A+C)\cos(A-C) - \cos^2 B$

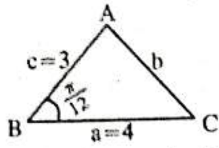
$= 1 + \cos(\pi - B)\cos(A-C) - \cos^2 B = 1 - \cos B.\cos(A-C) - \cos^2 B$

$= 1 - \cos B[\cos(A-C) + \cos B] = 1 - \cos B.[\cos(A-C) + \cos\{\pi - (A+C)\}]$

$= 1 - \cos B.[\cos(A-C) - \cos(A+C)] = 1 - \cos B.2\sin\frac{A-C+A+C}{2}.\sin\frac{A+C-A+C}{2}$

$= 1 - 2\sin A\cos B\sin C \therefore L.H.S = R.H.S$ (প্রমাণিত)

গ.



$B = \frac{\pi}{15} = 12°$

এখন, $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \Rightarrow \cos 12° = \frac{4^2+3^2-b^2}{2\times4\times3} \Rightarrow 0.978 = \frac{25-b^2}{24} \Rightarrow 23.472 = 25 - b^2 \Rightarrow b = \sqrt{25-23.472}$

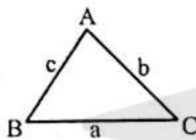
$\boxed{\therefore b = 1.236}$ আবার, $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Rightarrow \cos A = \frac{1.236^2+3^2-4^2}{2\times1.236\times3} \Rightarrow \cos A = -0.738 \Rightarrow A = \cos^{-1}(-0.738)$

$\therefore A = 137.56° \therefore c = 180° - (A+B) = 180° - (137.56° + 12°)$

$\boxed{C = 30.44°}$ $\therefore \Delta ABC$ এর সবগুলো বাহু ও কোণ নিম্নরূপ:

$a = 4 ; b = 1.236 ; c = 3$ | $A = 137.56° ; B = 12° ; C = 30.44°$

06. দৃশ্যকল্প-১: [SB'22]



দৃশ্যকল্প-২: $\sec\theta = \frac{m-n\cos\phi}{m\cos\phi-n}, m = \frac{P+Q}{2}, n = \frac{P-Q}{2}$.

(ক) $\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+\sin\theta}}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ থেকে দেখাও যে, $a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right) = (b+c)\sin\frac{A}{2}$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ থেকে প্রমাণ কর যে, $\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{P}} = \frac{\tan\frac{\phi}{2}}{\sqrt{Q}}$. 4

সমাধান

ক. $\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+\sin\theta}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}} = 1$ **(Ans.)**

খ. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \therefore a = 2R\sin A ; b = 2R\sin B ; C = 2R\sin C$

$\therefore \frac{b+c}{a} = \frac{2R\sin B+2R\sin C}{2R\sin A} = \frac{\sin B+\sin C}{\sin A} = \frac{\sin B+\sin(\pi-A-B)}{\sin A} = \frac{2\sin\left(\frac{B+\pi-A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{B-\pi+A+B}{2}\right)}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$

$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\cos\left(B+\frac{A}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sin\frac{A}{2}\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)}{\sin\frac{A}{2}} \therefore (b+c)\sin\frac{A}{2} = a\sin\left(\frac{A}{2}+b\right)$ **(Showed)**

গ. দেওয়া আছে, $m = \frac{P+Q}{2} \therefore 2m = P+Q \ldots\ldots\ldots (i)$

$n = \frac{P-Q}{2} \therefore 2n = P-Q \ldots\ldots\ldots (ii)$

$(i)+(ii) \Rightarrow 2(m+n) = 2P \therefore P = m+n$

$(i)-(ii) \Rightarrow 2(m-n) = 2Q \therefore Q = m-n$

এখন, $\sec\theta = \frac{m-n\cos\emptyset}{m\cos\emptyset-n} \Rightarrow \cos\theta = \frac{m\cos\emptyset-n}{m-n\cos\emptyset} \Rightarrow \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{m.\frac{1-\tan^2\frac{\emptyset}{2}}{1+\tan^2\frac{\emptyset}{2}}-n}{m-n.\frac{1-\tan^2\frac{\emptyset}{2}}{1+\tan^2\frac{\emptyset}{2}}} \Rightarrow \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{m-m\tan^2\frac{\emptyset}{2}-n-n\tan^2\frac{\emptyset}{2}}{m+m\tan^2\frac{\emptyset}{2}-n+n\tan^2\frac{\emptyset}{2}}$

$\Rightarrow \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{(m-n)-(m+n)\tan^2\frac{\emptyset}{2}}{(m-n)+(m+n)\tan^2\frac{\emptyset}{2}} = \frac{Q-P\tan^2\frac{\emptyset}{2}}{Q+P\tan^2\frac{\emptyset}{2}} \Rightarrow \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}+1+\tan^2\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}-1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{Q-P\tan^2\frac{\emptyset}{2}+Q+P\tan^2\frac{\emptyset}{2}}{Q-P\tan^2\frac{\emptyset}{2}-Q-P\tan^2\frac{\emptyset}{2}}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$\Rightarrow \frac{2}{-2\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2Q}{-2P\tan^2\frac{\emptyset}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{Q}{P\tan^2\frac{\emptyset}{2}} \Rightarrow \frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{P} = \frac{\tan^2\frac{\emptyset}{2}}{Q} \therefore \frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{P}} = \frac{\tan\frac{\emptyset}{2}}{\sqrt{Q}}$ **(Proved)**

07. (i) $T = \sec x + \tan x$. **[SB'22]**
(ii) $M = \cos^3 x + \cos^3(60° - x) + \cos^3(60° + x)$
(ক) $3\tan\theta = 1$ হলে $\sin\left(\frac{\pi-4\theta}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। 2
(খ) (i) নং থেকে প্রমাণ কর যে, $T = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. 4
(গ) (ii) নং থেকে দেখাও যে, $4M = (6\cos x - \cos 3x)$. 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $3\tan\theta = 1 \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{3}$

এখন, $\sin\left(\frac{\pi-4\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$; $\sin\left(\frac{\pi-4\theta}{2}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9-1}{9+1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ **(Ans.)**

খ. (i) নং হতে পাই, $T = \sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$ $\left[\sin x = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right);\ \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]$

$= \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \frac{2\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}}{2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}$ $\therefore T = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ (প্রমাণিত)

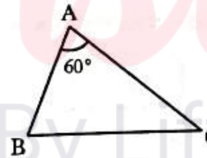
বিকল্প: $T = \sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 1 + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}$

$= \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}} = \frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}} = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}$ $\therefore T = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ (প্রমাণিত)

গ. আমরা জানি, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$; $4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x$

$L.H.S = 4M = 4[\cos^3 x + \cos^3(60° - x) + \cos^3(60° + x)]$
$= (\cos 3x + 3\cos x) + \{\cos(180° - 3x) + 3\cos(60° - x)\} + \{\cos(180° + 3x) + 3\cos(60° + x)\}$
$= \cos 3x + 3\cos x - \cos 3x + 3\cos(60° - x) - \cos 3x + 3\cos(60° + x)$
$= 3\cos x - \cos 3x + 3[\cos(60° + x) + \cos(60° - x)]$
$= 3\cos x - \cos 3x + 3.2\cos\frac{60°+x+60°-x}{2}\cos\frac{60°+x-60°+x}{2} = 3\cos x - \cos 3x + 6\cos 60°\cos x$
$= 3\cos x - \cos 3x + 6 \times \frac{1}{2}\cos x = 3\cos x - \cos 3x + 3\cos x = 6\cos x - \cos 3x = R.H.S$
$L.H.S = R.H.S$ **(Showed)**

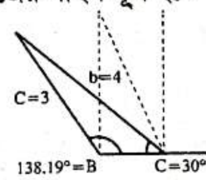
08. দৃশ্যকল্প-১: $M = \cos^2 5\alpha + \cos^2 5\beta - \sin^2 5\gamma + 2\cos 5\alpha\cos 5\beta\cos 5\gamma$. **[BB'22]**
দৃশ্যকল্প-২:



(ক) যে কোনো ABC ত্রিভুজে $b = 4cm, c = 3cm$ এবং $\angle C = 30°$ হলে $\angle B$ নির্ণয় কর। 2
(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $M = 0$ যেখানে $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. 4
(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $\frac{b-c}{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{B-C}{2}$. 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, ΔABC এ, $b = 4cm, c = 3cm$ এবং $\angle c = 30°$ ত্রিভুজের সাইন সূত্র হতে পাই,





$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \Rightarrow \frac{\sin B}{4} = \frac{\sin 30°}{3} \Rightarrow \sin B = 4 \times \frac{\frac{1}{2}}{3} \Rightarrow B = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ $\therefore B = 41.81°, 138.19°$ $[\because 0 \le B < 180°]$
$B = 41.81°$ হলে ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী এবং $B = 138.19°$ হলে ত্রিভুজটি স্থূলকোণী।

খ. ধরি, $5\alpha = A, 5\beta = B, 5\gamma = C \because \alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow 5\alpha+5\beta+5\gamma = 5\pi \therefore A+B+C=5\pi$

এখন, $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{1}{2}(2\cos^2 A + 2\cos^2 B) + \cos^2 C = \frac{1}{2}(1+\cos 2A + 1 + \cos 2B) + \cos^2 C$

$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C = 1 + \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2 C$

$= 1 + \cos(5\pi - c)\cos(A-B) + \cos^2 C = 1 + \cos(\pi - c)\cos(A-B) + \cos^2 C$

$= 1 - \cos C\cos(A-B) + \cos^2 C = 1 - \cos C[\cos(A-B) - \cos C]$

$= 1 - \cos C[\cos(A-B) - \cos\{5\pi - (A+B)\}] = 1 - \cos C[\cos[(A-B) - \cos\{\pi - (A+B)\}]$

$= 1 - \cos C[\cos(A-B) + \cos(A+B)] = 1 - \cos C \cdot 2\cos A\cos B$

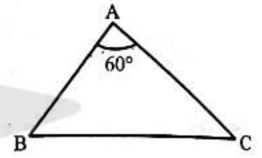
$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$

এখন, $\cos^2 5\alpha + \cos^2 5\beta + \cos^2 5\gamma = 1 - 2\cos 5\alpha \cdot \cos 5\beta \cdot \cos 5\gamma$

$\Rightarrow \cos^2 5\alpha + \cos^2 5\beta + 1 - \sin^2 5\gamma = 1 - 2\cos 5\alpha\cos 5\beta\cos 5\gamma$

$\Rightarrow \cos^2 5\alpha + \cos^2 5\beta - \sin^2 5\gamma + 2\cos 5\alpha\cos 5\beta \cdot \cos 5\gamma = 0 \therefore M = 0$ (প্রমাণিত)

গ. আমরা জানি, যেকোনো ত্রিভুজ ΔABC এ, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$



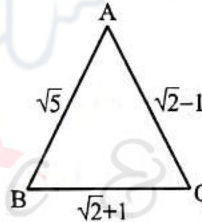
এখন, $L.H.S = \frac{b-c}{2a} = \frac{2R\sin B - 2R\sin C}{2\cdot 2R\sin A} = \frac{\sin B - \sin C}{2\sin A} = \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin A}$

$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\sin\frac{B-C}{2}}{\sin A}\left[\because A+B+C=\pi \Rightarrow B+C = \pi - A \therefore \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right]$

$= \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sin\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sin\frac{B-C}{2}}{2\times\cos\frac{60^\circ}{2}} = \frac{\sin\frac{B-C}{2}}{2\times\cos 30^\circ} = \frac{\sin\frac{B-C}{2}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{B-C}{2} = R.H.S$ **(Proved)**

09. দৃশ্যকল্প-১: $\angle P + \angle Q = \angle R$ **[JB'22]**

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) প্রমাণ কর যে, $\sin\theta + \sin(120^\circ + \theta) + \sin(240^\circ + \theta) = 0.$ 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে দেখাও যে, $\cos^2\frac{P}{3} + \cos^2\frac{Q}{3} + \cos^2\frac{R}{3} = 1 + 2\cos\frac{P}{3}\cos\frac{Q}{3}\cos\frac{R}{3}$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সাহায্যে $\angle C$ এর মান নির্ণয় কর। অতঃপর দেখাও যে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $\frac{\sqrt{3}}{4}$ বর্গ একক। 4

সমাধান

ক. $L.H.S = \sin\theta + \sin(120^\circ+\theta) + \sin(240^\circ+\theta)$

$= \sin\theta + \sin 120^\circ\cos\theta + \cos 120^\circ\sin\theta + \sin 240^\circ.\cos\theta + \cos 240^\circ\sin\theta$

$= \sin\theta + \sin(90^\circ+30^\circ)\cos\theta + \cos(90^\circ+30^\circ)\sin\theta + \sin(2\times 90^\circ + 60^\circ)\cos\theta + \cos(2\times 90^\circ+60^\circ)\sin\theta$

$= \sin\theta + \cos(30^\circ)\cos\theta - \sin 30^\circ\sin\theta. - \sin 60^\circ\cos\theta - \cos 60^\circ\sin\theta$

$= \sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta = 0$ [প্রমাণিত]

খ. দেওয়া আছে, $\angle P + \angle Q = \angle R \Rightarrow \frac{\angle P}{3} + \frac{\angle Q}{3} = \frac{\angle R}{3} \therefore \frac{P}{3} + \frac{Q}{3} = \frac{R}{3}$ ……… (i) [মান বিবেচনায়]

$L.H.S = \cos^2\frac{P}{3} + \cos^2\frac{Q}{3} + \cos^2\frac{R}{3} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2P}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2Q}{3}\right) + \cos^2\frac{R}{3}\ [\because \cos^2 A = \frac{1}{2}(1+\cos 2A)]$

$= 1 + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2P}{3} + \cos\frac{2Q}{3}\right) + \cos^2\frac{R}{3}$

$= 1 + \frac{1}{2}\times 2\cos\left(\frac{P}{3}+\frac{Q}{3}\right)\cos\left(\frac{P}{3}-\frac{Q}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{P}{3}+\frac{Q}{3}\right)\left[\because \cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right]$

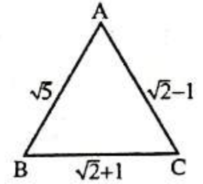
$= 1 + \cos\left(\frac{P}{3}+\frac{Q}{3}\right)\left\{\cos\left(\frac{P}{3}-\frac{Q}{3}\right) + \cos\left(\frac{P}{3}+\frac{Q}{3}\right)\right\}$

$= 1 + \cos\frac{R}{3}\times 2\cos\frac{P}{3}\cos\frac{Q}{3} = 1 + 2\cos\frac{P}{3}\cos\frac{Q}{3}\cos\frac{R}{3} = R.H.S$ **(Showed)**

গ. চিত্র হতে পাই, ΔABC-এ

AB বাহুর দৈর্ঘ্য, $c = \sqrt{5}$ একক ; BC বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \sqrt{2} + 1$ একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য, $b = \sqrt{2} - 1$ একক ; Cosine Rule অনুযায়ী, $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$



$\Rightarrow \cos C = \frac{(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}-1)^2-(\sqrt{5})^2}{2.(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{(\sqrt{2})^2+1^2+2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2+1^2-2\sqrt{2}-5}{2(2-1)} = \frac{2+1+2+1-5}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore \angle C = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

আমরা জানি, ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin C = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) \times \sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{1}{2}\left\{(\sqrt{2})^2 - 1\right\} \times \frac{5}{2}$ বর্গএকক $= \frac{1}{2} \times (2-1) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ বর্গএকক $\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $\frac{\sqrt{3}}{4}$ বর্গএকক। **(Showed)**

10. ABC একটি ত্রিভুজ এবং $f(x) = \sin x$ **[CB'22]**

(ক) দেখাও যে, $f(A) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$. 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $c(\cos B - \cos A) = 2(a-b)\cos^2\frac{C}{2}$ 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $f(A+B-C) + f(B+C-A) + f(C+A-B) = 4\sin A \sin B \sin C$ 4

সমাধান

ক. ABC ত্রিভুজে, $A + B + C = \pi$; $f(x) = \sin x$

$f(A) = \sin A = \sin\{\pi - (B+C)\} = \sin(B+C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$ (দেখানো হলো)

খ. ΔABC এ, $a = b\cos C + c\cos A$; $b = a\cos C + c\cos A$; $c = a\cos B + b\cos A$

$L.H.S = c(\cos B - \cos A) = c\cos B - c\cos A$

$= (c\cos B + b\cos C) - (c\cos A + a\cos C) - b\cos C + a\cos C$

$= a - b + a\cos C - b\cos C = (a-b) + (a-b)\cos C = (a-b)(1+\cos C) = 2(a-b)\cos^2\frac{C}{2}$

$\therefore L.H.S = R.H.S$ (প্রমাণিত)

গ. $A + B + C = \pi$

$L.H.S = f(A+B-C) + f(B+C-A) + f(C+A-B) = \sin(A+B-C) + \sin(B+C-A) + \sin(C+A-B)$

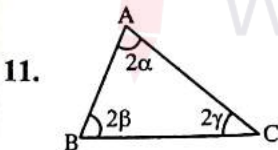
$= \sin(\pi - 2C) + \sin(\pi - 2A) + \sin(\pi - 2B) = \sin 2C + \sin 2A + \sin 2B = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$= 2\sin\frac{2A+2B}{2}\cos\frac{2A-2B}{2} + 2\sin C.\cos C = 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C.\cos C$

$= 2\sin(\pi - C).\cos(A-B) + 2\sin C.\cos\{\pi - (A+B)\} = 2\sin C\,\cos(A-B) - 2\sin C.\cos(A+B)$

$= 2\sin C.[\cos(A-B) - \cos(A+B)] = 2\sin C.2\sin\frac{A-B+A+B}{2}\sin\frac{A+B-A+B}{2}$

$= 4\sin A \sin B \sin C \therefore L.H.S = R.H.S$ (প্রমাণিত)

11. 

[Din.B'22]

(ক) প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos 6x}}} = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{3x}{2}$. 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 1$ 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $(c-b)\sec\left(\frac{A}{2}+B\right) = a\sec\frac{A}{2}$ 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $L.H.S = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos 6x}}} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2+2(2\cos^2 3x-1)}}}$ $[\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1]$

$= \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2+4\cos^2 3x-2}}} = \frac{1}{\sqrt{2-2\cos 3x}} = \frac{1}{\sqrt{2-2(1-2\sin^2\frac{3x}{2})}} = \frac{1}{\sqrt{2-2+4\sin^2\frac{3x}{2}}} = \frac{1}{2\sin\frac{3x}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{3x}{2} = R.H.S$ (প্রমাণিত)

খ. চিত্র হতে, $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma \ldots\ldots\ldots (i)$

$L.H.S = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$= \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) + \frac{1}{2}(1-\cos 2\beta) + \sin^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$= 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + \sin\gamma(\sin\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta)$

$\therefore \left[\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right]; \ [2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)]$

$= 1 - \frac{1}{2} \times 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \sin\gamma\{\sin\gamma + \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\}$

$= 1 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \sin\gamma\left\{\sin\gamma + \cos(\alpha-\beta) - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\right\}$

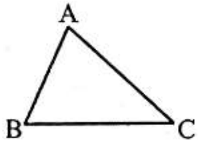
$= 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\cos(\alpha-\beta) + \sin\gamma\{\sin\gamma + \cos(\alpha-\beta) - \sin\gamma\}$

$= 1 - \sin\gamma\cos(\alpha-\beta) + \sin\gamma\cos(\alpha-\beta) = 1 = R.H.S$ **(Proved)**

গ. $\frac{c-b}{a} = \frac{2R(\sin C - \sin B)}{2R\sin A}; \frac{c-b}{a} = \frac{\sin C - \sin B}{\sin A}; \frac{c-b}{a} = \frac{2\sin\frac{C-B}{2}\cos\frac{C+B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$

$\frac{c-b}{a} = \frac{2\sin\frac{\pi-(A+B)-B}{2}\cos\frac{C+B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}; C = \pi - (A+B); \frac{c-b}{a} = \frac{2\sin\frac{\pi-A-2B}{2}\cos\left(\frac{\pi-A}{2}\right)}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}; C + B = \pi - A$

$\frac{c-b}{a} = \frac{2\sin[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{A}{2}+B\right)\sin\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}; \frac{c-b}{2} = \frac{\cos\left(\frac{A}{2}+B\right)}{\cos\frac{A}{2}}; \frac{c-b}{a} = \frac{\sec\frac{A}{2}}{\sec\left(\frac{A}{2}+B\right)} \Rightarrow (c-b)\sec(\frac{A}{2}+B) = a\sec\frac{A}{2} =$ **R. H. S (প্রমাণিত)**

12. 

[MB'22]

(ক) **$\cos 3A$ কে $\cos A$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।** 2

(খ) **$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C$ এর মান কত?** 4

(গ) **$A = 60°$ হলে দেখাও যে, $\cos\frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{2a}$.** 4

সমাধান

ক. আমরা জানি, $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$; $\cos 3A = \cos(2A + A) = \cos 2A.\cos A - \sin 2A.\sin A$

$= \cos 2A.\cos A - 2\sin^2 A.\cos A \because [\sin 2A = 2\sin A\cos A]$

$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\cos A(1-\cos^2 A) = 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A + 2\cos^3 A$

$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ **(Ans.)**

খ. ΔABC ত্রিভুজে, $A + B + C = \pi$

এখন, $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B) + \cos^2 C$

$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C = 1 + \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2 C$

$= 1 + \cos(\pi - C)\cos(A-B) + \cos^2 C = 1 - \cos C.\cos(A-B) + \cos^2 C$

$= 1 - \cos C[\cos(A-B) - \cos C] = 1 - \cos C[\cos(A-B) - \cos\{\pi - (A+B)\}]$

$= 1 - \cos C[\cos(A-B) + \cos(A+B)] = 1 - \cos C.2\cos\frac{A-B+A+B}{2}.\cos\frac{A-B-A-B}{2}$

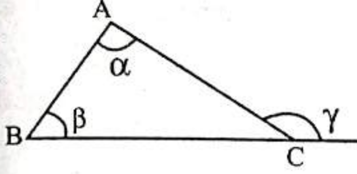
$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$

সুতরাং, $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$ **(Ans.)**

গ. ΔABC এ B- $\frac{b+c}{2a} = \frac{2R\sin B + 2R\sin C}{2.2R\sin A} = \frac{\sin B + \sin C}{2\sin A} = \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin A} = \frac{\sin\left(\frac{\pi-A}{2}\right)\cos\frac{B-C}{2}}{\sin A}$

$= \frac{\sin\frac{180°-60°}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\sin 60°} = \frac{\sin 60°.\cos\frac{B-C}{2}}{\sin 60°} = \frac{b+c}{2a} = \cos\frac{B-C}{2} \therefore \cos\frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{2a}$ **(Showed)**

বিকল্প: $\frac{b+c}{2a} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\cos\frac{B-C}{2}}{\sin A} = \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{2\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}} = \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{60°}{2}} = \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{2\times\frac{1}{2}}; \frac{b+c}{2a} = \cos\frac{B-C}{2} \therefore \cos\frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{2a}$ **(Showed)**

13. 

[DB'19]

(ক) দেখাও যে, $\sec\frac{5x}{2} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 10x}}}$ 2

(খ) উদ্দীপকের সাহায্যে দেখাও যে, $AC\sin\left(\frac{B}{2}+C\right) = (AB+BC)\sin\frac{B}{2}$ 4

(গ) উদ্দীপকের সাহায্যে দেখাও যে, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. 4

সমাধান

ক. R.H. S: $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 10x}}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos 10x)}}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2.2\cos^2 5x}}} = \frac{2}{\sqrt{2+2\cos 5x}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2(1+\cos 5x)}} = \frac{2}{\sqrt{2.2\cos^2\frac{5x}{2}}} = \frac{2}{2\cos\frac{5x}{2}} = \sec\frac{5x}{2} =$ L. H. S (**Showed**)

বিকল্প: $\sec\frac{5x}{2} = \frac{1}{\cos\frac{5x}{2}} = \frac{2}{2\cos\frac{5x}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2.2\cos^2\frac{5x}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2(1+\cos 5x)}} = \frac{2}{\sqrt{2+2\cos 5x}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2.2\cos^2 5x}}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos 10x)}}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 10x}}}$ (**Showed**)

খ. 06 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. এখানে, $\alpha+\beta+(\pi-\gamma) = \pi \Rightarrow \alpha+\beta-\gamma = 0 \Rightarrow \alpha+\beta = \gamma$

L.H.S: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + \cos^2\gamma$

$= \frac{1}{2}.2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 1 + \cos^2\gamma = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\gamma + 1$

$= \cos\gamma\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\gamma + 1 = \cos\gamma[\cos(\alpha-\beta) + \cos\gamma] + 1$

$= \cos\gamma\ [\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] + 1 = \cos\gamma\ [2\cos\alpha\cos\beta] + 1$

$= 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =$ R. H. S (**Showed**)

14. $p = \tan A.\ \tan B,\ q = \tan C.\ \tan D, r = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - 1.$ [RB'19]

(ক) $\cos 75°$ এর মান নির্ণয় কর। (ক্যালকুলেটর ব্যতিত) 2

(খ) $A = 20°,\ B = 2A,\ C = 3A,\ D = 4A$ হলে, দেখাও যে, $pq = 3$. 4

(গ) $\alpha+\beta+\gamma = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = r + 2$. 4

সমাধান

ক. 01 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. L. S = tanA tanB tanC tanD = tan20° tan40° tan60° tan80°

$= \sqrt{3}\tan 20\left(\frac{\tan 60 - \tan 20}{1+\tan 60\tan 20}\right)\left(\frac{\tan 60+\tan 20}{1-\tan 60\tan 20}\right) = \sqrt{3}\tan 20\left(\frac{3-\tan^2 20}{1-3\tan^2 20}\right)$

$= \sqrt{3}\left(\frac{3\tan 20 - \tan^3 20}{1-3\tan^2 20}\right) = \sqrt{3}\tan(3\times 20°) = \sqrt{3}\tan 60° = (\sqrt{3})^2 = 3 =$ R.S

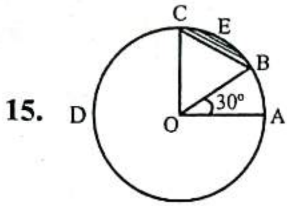
$\therefore$ L. H. S = R. H. S [**Showed**]

গ. দেওয়া আছে, $r = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - 1$; $\alpha+\beta+\gamma = 0$

R.S $= r + 2 = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - 1 + 2 = 2\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2} + 1$

$= 2\left\{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right\}\cos\frac{\gamma}{2} + 1 = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2} - 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2} + 1$

$= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \left(2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1\right) = \cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma$ = L. S [**Proved**]

15. 

[Ctg.B'19]

$\angle AOC = 90°$, $OA = 2$ এবং $P = \tan\theta \ \tan 2\theta \ \tan 5\theta$.

(ক) $\sec x = -2$ এবং $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\cos x + \tan x = \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ 2

(গ) $\theta = 40°$ হলে প্রমাণ কর যে, $P = \sqrt{3}$. 4

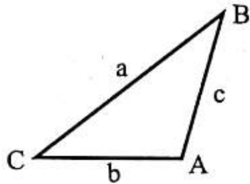
সমাধান

ক. $\sec x = -2$; $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ $\therefore \cos x = -\frac{1}{2}$ $\therefore \tan x = \sqrt{3}$ $\therefore \cos x + \tan x = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ **(Proved)**

গ. এখানে, $\theta = 40°$ $\therefore P = \tan 40 \tan 80 \tan 200 = \tan 80 \tan(120-80)\tan(120+80)$

$= \tan 80° \frac{\tan 120° - \tan 80°}{1+\tan 120 \tan 80} \frac{\tan 120 + \tan 80}{1 - \tan 120 \tan 80} = \tan 80° \frac{-\sqrt{3} - \tan 80}{1-\sqrt{3}\tan 80} \frac{-\sqrt{3} + \tan 80}{1+\sqrt{3}\tan 80}$

$= \tan 80° \frac{3 - \tan^2 80}{1 - 3\tan^2 80} = \frac{3\tan 80 - \tan^3 80}{1-3\tan^2 80} = \tan(3\times 80) = \tan(240°) = \sqrt{3} = R.S$ **[Proved]**

16. 

[Ctg.B'19]

(ক) প্রমাণ কর: $\sin 78°19' \cos 18°19' - \sin 11°41' \sin 18°19' = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 2

(খ) $a = \sqrt{b^2 + bc + c^2}$ হলে ত্রিভুজটির সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের সমষ্টি নির্ণয় কর। 4

(গ) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $\frac{a-b}{c} \operatorname{cosec}\frac{A-B}{2} = \sec\frac{C}{2}$ 4

সমাধান

ক. $L.H.S = \sin 78°19' \cos 18°19' - \sin 11°41' \sin 18°19' = \sin 78°19' \cos 18°19' - \sin(90° - 78°19') \sin 18°19'$

$= \sin 78°19' \cos 18°19' - \sin 18°19' \cos 78°19' = \sin(78°19' - 18°19') = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = R.S$ **(Proved)**

খ. এখানে, $a = \sqrt{b^2+bc+c^2} \Rightarrow a^2 = b^2 + bc + c^2$

এখন, $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+c^2-b^2-bc-c^2}{2bc}$; $\cos A = -\frac{1}{2}$; $\boxed{A = 120°}$

আমরা জানি, $A + B + C = 180° \Rightarrow 120 + (B+C) = 180°$ $\boxed{B + C = 60°}$ **(Ans.)**

গ. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

এখানে, $\frac{a-b}{c} = \frac{2R(\sin A - \sin B)}{2R\sin C} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin C} = \frac{2\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi-C}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}}$

$= \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} \Rightarrow \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}}$ $\therefore \frac{(a-b)}{c} \operatorname{cosec}\left(\frac{A-B}{2}\right) = \sec\frac{C}{2}$ **[Proved]**

$A + B + C = \pi$
$\Rightarrow \boxed{A + B = \pi - C}$

17. (ক) দেখাও যে, $\tan 65° = \tan 25° + 2\tan 40°$ [SB'19]

সমাধান

ক. $\tan 65° = \tan(40° + 25°) = \frac{\tan 40° + \tan 25°}{1 - \tan 40° \tan 25°} \Rightarrow \tan 65° - \tan 65° \tan 40° \tan 25° = \tan 40° + \tan 25°$

$\Rightarrow \tan 60° - \tan 65° \times \tan 40° \times \tan(90° - 65°) = \tan 40° + \tan 25°$

$\Rightarrow \tan 60° - \tan 65° \times \tan 40° \times \cot 65° = \tan 40° + \tan 25°$

$\Rightarrow \tan 60° - \tan 40° = \tan 40° + \tan 25° \Rightarrow \tan 60° = \tan 25° + 2\tan 40°$ **(Showed)**

18. $\mathbf{K = \cos P + \cos R}$ **[SB'19]**

(ক) প্রমাণ কর যে, $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20°} - \frac{1}{\cos 20°} = 4.$ 2

(খ) $P + Q + R = \pi$ হলে দেখাও যে, $K - 1 + \cos Q = 4\sin\frac{P}{2}\sin\frac{Q}{2}\sin\frac{R}{2}$ 4

(গ) $K = \sin Q$ হলে দেখাও যে, PQR ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ। 4

সমাধান

ক. $L.H.S. = \frac{\sqrt{3}}{\sin 20} - \frac{1}{\cos 20} = \frac{\sqrt{3}\cos 20 - \sin 20}{\sin 20 \cos 20} = 4.\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20 - \frac{1}{2}.\sin 20}{2\sin 20\cos 20}$

$= 4.\frac{\sin 60°\cos 20° - \cos 60°\sin 20°}{\sin 40} = 4.\frac{\sin(60°-20°)}{\sin 40} = 4 = R.H.S.$ **(Proved)**

খ. $P + Q + R = \pi \therefore K - 1 + \cos Q = \cos P + \cos Q + \cos R - 1$

$= 2\cos\left(\frac{P+Q}{2}\right)\cos\left(\frac{P-Q}{2}\right) + 1 - 2\sin^2\frac{R}{2} - 1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{R}{2}\right)\cos\left(\frac{P-Q}{2}\right) - 2\sin^2\frac{R}{2}$

$= 2\sin\frac{R}{2}\left\{\cos\left(\frac{P-Q}{2}\right) - \cos\left(\frac{P+Q}{2}\right)\right\}$ $\left[\sin\frac{R}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{P+Q}{2}\right) = \cos\left(\frac{P+Q}{2}\right)\right]$ $= 2\sin\frac{R}{2}\sin\frac{P}{2}\sin\frac{Q}{2}$ **(Showed)**

গ. $K = \sin Q \Rightarrow \cos P + \cos R = \sin Q \Rightarrow 2\cos\frac{P+R}{2}\cos\frac{P-R}{2} = 2\sin\frac{Q}{2}\cos\frac{Q}{2}$

$\Rightarrow 2\sin\frac{Q}{2}\cos\frac{P-R}{2} = 2\sin\frac{Q}{2}\cos\frac{Q}{2}$ $\left[\cos\frac{P+R}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{Q}{2}\right) = \sin\frac{Q}{2}\right]$

$\Rightarrow \cos\frac{P-R}{2} = \cos\frac{Q}{2}$ [Q ত্রিভুজের কোণ বলে $Q \neq 0$] $\therefore \frac{P-R}{2} = \frac{Q}{2}$ $\therefore P = Q + R$

আবার, $P + Q + R = 180° \Rightarrow P + P = 180°$ $\therefore P = 90°$ $\therefore$ ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ। **(Showed)**

19. $\mathbf{X = \sin\alpha - \cos\alpha,\ Y = \cos\beta - \sin\beta}$, যেখানে $\alpha \neq \beta, P = \text{cosec}20°,\ Q = \sec 20°.$ **[BB, Din.B'19]**

(ক) $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3}$ হলে, $\cos 3\theta$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $X = Y$ হলে, দেখাও যে, $2(\alpha + \beta) = \pi$ 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $P + 3Q = 4\tan 50°.$ 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3}$ $\therefore \cos\theta = \frac{1}{3}$, এখন, $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3.\frac{1}{3} = -\frac{23}{27}$

খ. $X = Y \Rightarrow \sin\alpha - \cos\alpha = \cos\beta - \sin\beta \Rightarrow \sin\alpha + \sin\beta = \cos\alpha + \cos\beta$

$\Rightarrow 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \Rightarrow \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow \tan\frac{\alpha+\beta}{2} = 1$

$\Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ $\therefore 2(\alpha + \beta) = \pi$ **(Showed)**

গ. [প্রশ্ন ভুল আছে, 3Q এর স্থলে $\sqrt{3}$Q হবে]

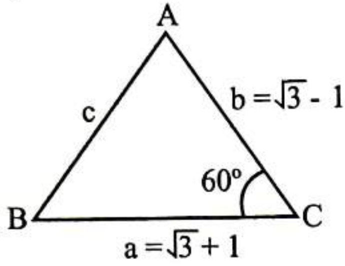
$L.H.S = P + \sqrt{3}Q = \text{cosec}\,20° + \sqrt{3}\sec 20° = \frac{1}{\sin 20°} + \frac{\sqrt{3}}{\cos 20°}$

$= \frac{\cos 20° + \sqrt{3}\sin 20°}{\sin 20°\cos 20°} = \frac{\frac{1}{2}\cos 20° + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20°}{\frac{1}{4}\times 2\sin 20°\cos 20°} = \frac{\sin 20°\cos 20° + \cos 30°\sin 20°}{\frac{1}{4}\sin 20°}$

$= \frac{\sin(30° + 20°)}{\frac{1}{4}\times\cos(90° - 40°)} = 4.\frac{\sin 50°}{\cos 50°} = 4\tan 50° = R.H.S. \therefore P + \sqrt{3}Q = 4\tan 50°$ **[Proved]**

20. দৃশ্যকল্প-১: ΔABC এর $A = 75°$, $B - C = 15°$ [JB'19]

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) $\cos 30°32' \cos 29°28' - \sin 149°28' \sin 29°28'$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ অনুযায়ী দেখাও যে, $\cos\frac{B}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+3}}.$ 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ অনুযায়ী ত্রিভুজটির সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. $\cos(30°32')\cos(29°28') - \sin(149°28')\sin(29°28')$

$= \cos 30°32' \cos 29°28' - \sin(180° - 30°32')\sin 29°28'$

$= \cos 30°32' \cos 29°28' - \sin 30°32' \sin 29°28' = \cos(30°32' + 29°28') = \cos 60° = \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ. $A + B + C = 180° \Rightarrow B + C = 180° - A = 180° - 75° = 105° \ldots\ldots\ldots$ (i)

$B - C = 15° \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow 2B = 120° \Rightarrow B = 60° \Rightarrow \frac{B}{8} = \frac{60°}{8} = \frac{15°}{2}$

$\cos\frac{B}{8} = \cos\frac{15°}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\times 2\cos^2\frac{15°}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2(1+\cos 15°)} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2\times 2\cos^2 15°}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos 30°)}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} =$ R.H.S (দেখানো হল) [বিদ্র: প্রশ্নে $\cos\left(\frac{C}{8}\right)$ এর স্থলে $\cos\left(\frac{B}{8}\right)$ দিতে হবে]

গ. $c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C} = \sqrt{6}$ $\therefore \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\therefore A = 105°$

$\therefore \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ $\therefore B = 15°$ $\therefore c = \sqrt{6}$, $A = 105°$, $B = 15°$

[N.B: কোণ A ও B বের করার ক্ষেত্রে sin এর সূত্র use করা যাবেনা।]

21. দৃশ্যকল্প-১: $2P = \tan\frac{x+y}{2} + \tan\frac{x-y}{2}$ [CB'19]

দৃশ্যকল্প-২: $\sin x = a - \sin y$, $\cos x = b - \cos y$

(ক) দেখাও যে, $P = \frac{\sin x}{\cos x + \cos y}$. 2

(গ) দৃশ্যকল্প-২ থেকে প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{1}{2}(x-y) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2-b^2}$. 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $2P = \tan\frac{x+y}{2} + \tan\frac{x-y}{2} \Rightarrow 2P = \frac{\sin\frac{x+y}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}} + \frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\cos\frac{x-y}{2}} = \frac{\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}$

$\Rightarrow P = \frac{\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)}{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = \frac{\sin x}{\cos\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)+\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)}$ $\therefore P = \frac{\sin x}{\cos x + \cos y}$ (দেখানো হল)

গ. দেওয়া আছে, $\sin x = a - \sin y$ $\therefore \sin x + \sin y = a \ldots\ldots\ldots$ (i)

আবার, $\cos x = b - \cos y$ $\therefore \cos x + \cos y = b \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(i) ও (ii) কে বর্গ করে যোগ করে পাই, $\sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 y + \cos^2 y + 2\sin x\sin y + 2\cos x\cos y = a^2 + b^2$

$\Rightarrow 2 + 2\cos(x-y) = a^2 + b^2 \Rightarrow \cos(x-y) = \frac{a^2+b^2-2}{2}$

$\Rightarrow -\cos(x-y) = \frac{2-a^2-b^2}{2} \Rightarrow 1 - \cos(x-y) = \frac{2-a^2-b^2}{2} + 1$

$\Rightarrow 2\sin^2\frac{1}{2}(x-y) = \frac{4-a^2-b^2}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{1}{2}(x-y) = \frac{4-a^2-b^2}{4}$ $\therefore \sin\frac{1}{2}(x-y) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2-b^2}$ [প্রমাণিত]

22. দৃশ্যকল্প-২: ΔPQR G $P = 2q$ এবং $P = 3Q$ [CB'19]
(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে R কোণ এর মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

গ. [$P = 2q$ এবং $P = 3Q$ ধরে অঙ্কটি করা হল]
ΔPQR-এ, $\frac{P}{\sin P} = \frac{q}{\sin Q} \Rightarrow \frac{2q}{\sin 3Q} = \frac{q}{\sin Q} \Rightarrow \frac{2}{3\sin Q - 4\sin^3 Q} = \frac{1}{\sin Q} \Rightarrow \frac{2}{3-4\sin^2 Q} = 1$
$\Rightarrow 2 = 3 - 4\sin^2 Q \Rightarrow 4\sin^2 Q = 1 \Rightarrow 4(1-\cos^2 Q) = 1$ [$\sin Q = -\frac{1}{2}$ গ্রহণযোগ্য নয়]
$\Rightarrow 4 - 1 = 4\cos^2 Q \Rightarrow \frac{3}{4} = \cos^2 Q \Rightarrow \cos Q = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Q = 30° \therefore Q = 30°$
$\therefore P = 3 \times 30° = 90° \therefore R = 180° - 90° - 30° = 60° \therefore$ R কোণ এর মান 60°

23. (ক) প্রমাণ কর যে, $\sin 44° + \cos 44° = \sqrt{2}\cos 1°$. [All.B'18]

সমাধান

ক. $L.H.S = \sin 44° + \cos 44° = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 44° + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 44°\right)$
$= \sqrt{2}(\sin 45° \sin 44° + \cos 45° \cos 44°) = \sqrt{2}\cos(45° - 44°) = \sqrt{2}\cos 1° = R.H.S$ **(Proved)**

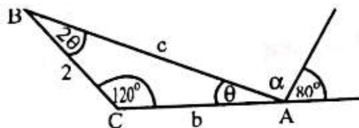
24. $p = \sin 2\alpha,\ q = \sin 2\beta,\ r = \cos 2\alpha,\ s = \cos 2\beta, t = \sin 2\gamma$ [All.B'18]
(ক) প্রমাণ কর যে, $\sec\frac{3x}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{8+8\cos 6x}}}$ 2
(খ) যদি $p + q = c, r + s = d$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cos(2\alpha + 2\beta) = \frac{d^2-c^2}{d^2+c^2}$. 4
(গ) যদি $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ হয়, তবে দেখাও যে, $p^2 + q^2 + t^2 = 2 - 2\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma$ 4

সমাধান

ক. $R.H.S = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{8+8\cos 6x}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2(1+\cos 6x)}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4+4\cos 3x}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\cos 3x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}} = \sec\frac{3x}{2} = L.H.S$ **[proved]**

খ. দেওয়া আছে,
$\sin 2\alpha + \sin 2\beta = c \ldots (i)$
$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = d \ldots (ii)$
(i) হতে পাই, $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = c \ldots (iii)$
(ii) হতে পাই, $2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = d \ldots (iv)$
(iii)/(iv) $\Rightarrow \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{c}{d} \Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = \frac{c}{d}$
এখন, $L.H.S = \cos(2\alpha+2\beta) = \cos 2(\alpha+\beta) = \frac{1-\tan^2(\alpha+\beta)}{1+\tan^2(\alpha+\beta)} = \frac{1-\frac{c^2}{d^2}}{1+\frac{c^2}{d^2}} = \frac{d^2-c^2}{d^2+c^2} = R.H.S$ **[Showed]**

গ. $L.H.S = p^2 + q^2 + t^2 = \sin^2 2\alpha + \sin^2 2\beta + \sin^2 2\gamma$
$= \frac{1}{2}(2 - \cos 4\alpha - \cos 4\beta) + \sin^2 2\gamma = \frac{1}{2}(2 - 2\cos(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha-2\beta)) + 1 - \cos^2 2\gamma$
$= 2 - \cos 2\gamma \cos(2\alpha - 2\beta) - \cos^2 2\gamma [2\gamma = 2\pi - (2\alpha+2\beta)]$
$= 2 - \cos 2\gamma[\cos(2\alpha-2\beta) + \cos(2\alpha+2\beta)] = 2 - 2\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma = R.H.S$ **[Showed]**

25. দৃশ্যকল্প-I: 

[DB'17]

দৃশ্যকল্প-II: $p = \tan\theta \tan 2\theta \tan\alpha$.
(ক) $\sin 25° + \cos 25°$ এর মান কত? 2
(খ) দৃশ্যকল্প-I হতে b এবং c এর মান নির্ণয় কর। 4
(গ) দৃশ্যকল্প-II হতে দেখাও যে, $p = \sqrt{3}$ 4

সমাধান

ক. $\sin 25^\circ + \cos 25^\circ = \sin 25^\circ + \cos(90^\circ - 65^\circ) = \sin 25^\circ + \sin 65^\circ$

$= 2\sin\frac{25^\circ+65^\circ}{2}\cos\frac{65^\circ-25^\circ}{2} = 2\sin 45^\circ \cos 20^\circ = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos 20^\circ = \sqrt{2}\cos 20^\circ$ **(Ans.)**

খ. ΔABC এ $\theta + 2\theta + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow 3\theta = 60^\circ \Rightarrow \theta = 20^\circ$

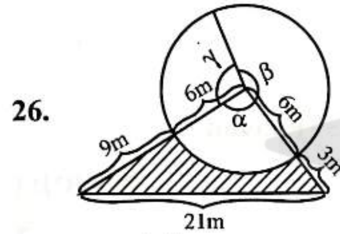
ধরি, $BC = a = 2$, আমরা জানি, ত্রিভুজের sine সূত্র $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ...... (i)

এখন (i) হতে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{2}{\sin 20^\circ} = \frac{b}{\sin 40^\circ} \Rightarrow \frac{2}{\sin 20^\circ} = \frac{b}{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ} \Rightarrow b = 4\cos 20^\circ = 3.76$

আবার, (i) হতে পাই, $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{2\sin 120^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} = 5.06$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $b = 3.76, c = 5.06$ **(Ans.)**

গ. 15 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

26. 

[RB'17]

(খ) উদ্দীপকের সাহায্যে মান নির্ণয় কর: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. 4

সমাধান

খ. $\alpha + \beta + \gamma = 2\alpha$

প্রদত্ত রাশি $= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2\alpha + 2\cos^2\beta) + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha + 1 + \cos 2\beta) + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$= \frac{1}{2}(2 + \cos 2\alpha + \cos 2\beta) + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$= 1 + \frac{1}{2}.2\cos\frac{2\alpha+2\beta}{2}\cos\frac{2\alpha-2\beta}{2} + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$= 1 + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

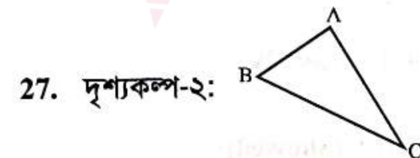
$= 1 + \cos(2\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ $[\because \alpha+\beta+\gamma = 2\pi]$

$= 1 + \cos\gamma\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1 + \cos\gamma\{\cos(\alpha-\beta) + \cos\gamma\} - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$= 1 + \cos\gamma[\cos(\alpha-\beta) + \cos\{2\pi - (\alpha+\beta)\}] - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$= 1 + \cos\gamma\{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\} - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$= 1 + \cos\gamma.2\cos\alpha\cos\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$ **(Ans.)**

27. দৃশ্যকল্প-২: 

[Ctg.B'17]

(ক) $\sin(A - B + C)$ কে বিস্তৃত কর। 2

(খ) $\frac{1}{\sec A} = \frac{1}{\text{cosec} C} - \frac{1}{\sec B}$ হলে দৃশ্যকল্প-২ এর কোন কোণটি সমকোণ, নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\sin(A-B+C) = \sin(A-B)\cdot\cos C + \cos(A-B)\cdot\sin C$

$= (\sin A\cos B - \cos A\cdot\sin B)\cos C + (\cos A\cos B + \sin A\sin B)\sin C$

$= \sin A\cos B\cos C - \cos A\cdot\sin B\cdot\cos C + \cos A\cos B\cdot\sin C + \sin A\sin B\cdot\sin C$ **(Ans.)**

খ. 18 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

28. দৃশ্যকল্প: ABC ত্রিভুজের পরিসীমা 2s। [Ctg.B'17]

(ক) $\frac{\cos75°+\cos15°}{\cos75°-\cos15°}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $\sec B = \sec C \sec A$ হলে দেখাও যে, $\tan A = 2\cot C$. 4

(গ) দৃশকল্পের আলোকে $4s(s-b) = 3ca$ হলে, $\angle B$ এর মান কত? 4

সমাধান

ক. $\frac{\cos 75°+\cos 15°}{\cos 75°-\cos 15°} = \frac{2\cos\frac{75°+15°}{2}\cdot\cos\frac{75°-15°}{2}}{2\sin\frac{75°+15°}{2}\cdot\sin\frac{15°-75°}{2}} = \frac{\cos 45°\cdot\cos 30°}{\sin 45°\cdot\sin(-30°)} = -\cot 30° = -\sqrt{3}$

খ. $\sec B = \sec C\cdot\sec A \Rightarrow \frac{1}{\cos B} = \frac{1}{\cos C}\cdot\frac{1}{\cos A} \Rightarrow \cos B = \cos C\cdot\cos A$

এখন, $A+B+C=\pi \Rightarrow A+C = \pi - B \Rightarrow \cos(A+C) = \cos(\pi - B)$

$\Rightarrow \cos A\cdot\cos C - \sin A\sin C = -\cos B$

$\Rightarrow 2\cos A\cdot\cos C - \sin A\sin C = 0 \Rightarrow 2\cos A\cos C = \sin A\sin C$

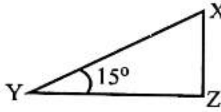
$\Rightarrow 2\cot A\cdot\cot C = 1 \Rightarrow 2\cot C = \tan A$ (দেখানো হলো)।

গ. আমরা জানি, $2s = a+b+c \quad \therefore 4s(s-b) = 3ca \Rightarrow 2s(2s-2b) = 3ca \Rightarrow (a+b+c)(a+b+c-2b) = 3ca$

$(a+b+c)^2 - 2b(a+b+c) = 3ca \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-2ab-2b^2-2bc = 3ca$

$\Rightarrow a^2+c^2-b^2 = ca \Rightarrow \frac{a^2+c^2-b^2}{2ca} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos B = \cos 60° \Rightarrow B = 60°$ **(Ans.)**

29. দৃশ্যকল্প-১: [SB'17]



দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$

(ক) $\cos74°33'\cos14°33' + \cos75°27'\cos15°27'$ এর মান বের কর। 2

(খ) উদ্দীপক-১ এ যদি $\cos x = \sin y - \cos z$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর $\angle x + \angle y = \angle z$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ অনুসারে $f(2\pi - 4\theta)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর। যেখানে $-2\pi < \theta < 2\pi$. 4

সমাধান

ক. $\cos74°33'\cos14°33' + \cos75°27' + \cos15°27' = \frac{1}{2}(2\cos74°33'\cos14°33' + 2\cos75°27'\cos15°27')$

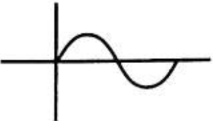
$= \frac{1}{2}\{\cos(75°33'+14°33') + \cos(74°33'-14°33') + \cos(75°27'+15°27') + \cos(75°27'-15°27')\}$

$= \frac{1}{2}\{2\cos60° + \cos(89°6') + \cos(90°45')\} = \frac{1}{2}\cos 60° + \frac{1}{2}(\cos89°6' + \cos90°54')$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times 2\,.\cos\frac{89°6'+90°54'}{2}\times\cos\frac{89°6'-90°54'}{2} = \frac{1}{4}$ **(Ans.)**

খ. 18 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

গ. $f(0) = \frac{1}{2}\sin(\pi - 2\theta) = \frac{1}{2}\sin 2\theta$; Draw $\frac{1}{2}f(\theta) = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ Figure.



30. ; ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ R. [SB'17]

(ক) $A + B = 105°$ হলে $\sin C$ নির্ণয় কর। 2

(খ) ΔABC এর ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $a^2+b^2+c^2 = 8R^2(1+\cos A\cos B\cos C)$ 4

(গ) ΔPQS এর ক্ষেত্রে $-\frac{1}{PQ+PS} = \frac{3}{PS+PQ+QS} - \frac{1}{PS+QS}$ হলে $\angle Q$ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\sin C = \sin(180° - (A+B)) = \sin(A+B) = \sin 105° = \sin(90° + 15°) = \cos 15°$
$= \cos(45° - 30°) = \cos 45°.\cos 30° + \sin 45° \sin 30°\ ; \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ **(Ans.)**

খ. $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = 2R^2(1 - \cos 2A + 1 - \cos 2B + 2\sin^2 C)$
$= 2R^2(2 - 2\cos(A+B)\cos(A-B) + 2\sin^2 C) = 4R^2(1 - \cos(\pi - C)\cos(A-B) + 1 - \cos^2 C)$
$= 4R^2(2 + \cos C \cos(A-B) - \cos^2 C) = 4R^2(2 + \cos C[\cos(A-B) - \cos(\pi - (A+B))$
$= 4R^2(2 + \cos C(\cos(A+B) + \cos(A-B))$
$= 4R^2(2 + 2\cos A \cos B \cos C) = 8R^2(1 + \cos A \cos B \cos C)$ **[proved]**

গ. $\frac{1}{PQ+PS} = \frac{3}{PS+PQ+QS} - \frac{1}{PS+QS} \Rightarrow \frac{1}{PQ+PS} + \frac{1}{PS+QS} = \frac{3}{PS+PQ+QS} \Rightarrow \frac{PS+QS+PS+PQ}{PS^2+(PQ+QS)PS+PQ.QS} = \frac{3}{PS+PQ+QS}$
$\Rightarrow [2PS + (PQ+QS)](PS + (PQ+QS)) = 3PS^2 + 3(PQ+QS)PS + 3PQ.QS$
$\Rightarrow 2PS^2 + PS \times 3(PQ+QS) + (PQ+QS)^2 = 3PS^2 + 3(PQ = QS)PS + 3PQ.QS$
$\Rightarrow 2PS^2 + PQ^2 + QS^2 + 2PQ.QS = 3PS^2 + 3PQ.QS$
$\Rightarrow PQ^2 + QS^2 - PS^2 = PQ.QS \Rightarrow \frac{PQ^2+QS^2-PS^2}{2PQ.QS} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos Q = \frac{1}{2} \therefore Q = 60°$ **(Ans.)**

31. দৃশ্যকল্প-২: $\mathbf{\sin C + \sin D = p\ ;\ \cos C + \cos D = q}$ **[BB'17]**

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, $\sin\frac{C-D}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4 - p^2 - q^2}$ । 4

সমাধান

গ. 21 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

32. দৃশ্যকল্প-১: ABC ত্রিভুজে $\mathbf{a = \sqrt{3}b}$ এবং $\mathbf{A = 2B}$ **[BB'17]**

(খ) দৃশ্যকল্প-১: এর আলোকে ABC ত্রিভুজের কোণগুলো নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. আমরা জানি, ত্রিভুজের সাইন সূত্রানুসারে, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}b}{\sin 2B} = \frac{b}{\sin B}$ $[\because a = \sqrt{3}b,\ A = 2B$
$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2\sin B \cos B} = \frac{1}{\sin B} \Rightarrow \sqrt{3}\sin B = 2\sin B\cos B \Rightarrow \sqrt{3}\sin B - 2\sin B \cos B = 0 \Rightarrow \sin B(\sqrt{3} - 2\cos B) = 0$
এখন, $\sin B \neq 0[\because \angle B \neq 0] \therefore \sqrt{3} - 2\cos B = 0 \Rightarrow \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos B = \cos 30° \therefore B = 30°$
$\therefore A = 2B = 2 \times 30° = 60° \therefore \angle C = 180° - (A+B) = 180° - (60° + 30°) = 90°$ **(Ans.)**

33. দৃশ্যকল্প-১: $\mathbf{\Delta XYZ}$ এ $\mathbf{\cos X = \sin Y - \cos Z}$. **[JB'17]**

দৃশ্যকল্প-২: $\mathbf{\sqrt{1+n}.\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-n}.\tan\frac{\beta}{2}}$.

(ক) প্রমাণ কর যে, $\mathbf{\tan 75° = 2 + \sqrt{3}}$. 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে দেখাও যে, $\mathbf{\cos\beta = \frac{\cos\alpha - n}{1 - n\cos\alpha}}$ । 4

সমাধান

ক. $\tan 75° = \frac{\sin 75°}{\cos 75°} = \frac{\sin(45+30)}{\cos(45+30)} = \frac{\sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°}{\cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°}$
$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{2} \times (\sqrt{3}+1)^2 = 2 + \sqrt{3}$ **[Proved]**

খ. 18 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

গ. $\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta}{2}} = \frac{\sqrt{1-n}}{\sqrt{1+n}} \quad \therefore \tan\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{1+n}}{\sqrt{1-n}} \tan\frac{\alpha}{2} \therefore \cos\beta = \frac{1 - \tan^2\frac{\beta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\beta}{2}} = \frac{1 - \frac{1+n}{1-n}\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \frac{1+n}{1-n}\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{(1-n) - (1+n)\tan^2\frac{\alpha}{2}}{(1-n) + (1+n)\tan^2\frac{\alpha}{2}}$
$= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}(1-n) - (1+n)\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}(1-n) + (1+n)\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} - n\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} - n\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\cos\alpha - n}{1 - n\cos\alpha}$ **[Showed]**

34. $\angle E + \angle F = 65°, \angle F - \angle E = 25°$

[JB'17]

(ক) $\tan\beta = \frac{1}{3}$ হলে, $\sin 2\beta$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দেখাও যে, $2\sin\left(\pi + \frac{F}{4}\right) = -\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ 4

(গ) দেখাও যে, $\tan\angle E.\tan 2\angle E.\tan 3\angle E.\tan 4\angle E = 3.$ 4

সমাধান

ক. $\tan\beta = \frac{1}{3}; \sin 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1+\tan^2\beta} = \frac{\frac{2}{3}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ **(Ans.)**

খ. $\angle F = \frac{65°+25°}{2} = 45° = \frac{\pi}{4}$

$\text{L.H.S} = 2\sin\left(\pi + \frac{\pi}{16}\right) = -2\sin\frac{\pi}{16} = -\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{16}} = -\sqrt{2\times 2\sin^2\frac{\pi}{16}} = -\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)}$

$= -\sqrt{2 - \sqrt{\left(2\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}} = -\sqrt{2 - \sqrt{2\times\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}} = -\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \text{R.H.S}$ **[Showed]**

গ. $\text{L.H.S} = \tan\angle E\tan 2\angle E\tan 3\angle E\tan 4\angle E = \frac{\sin E\sin 2E\sin 3E\sin 4E}{\cos E\cos 2E\cos 3E\cos 4E} = \frac{2\sin E\sin 3E.2\sin 4E\sin 2E}{2\cos E\cos 3E.2\cos 4E\cos 2E}$

$= \frac{(\cos 2E - \cos 4E)(\cos 2E - \cos 6E)}{(\cos 2E + \cos 4E)(\cos 2E + \cos 6E)} = \frac{(\cos 40° - \cos 80°)(\cos 40° - \cos 120°)}{(\cos 40° + \cos 80°)(\cos 40° + \cos 120°)}$

$= \frac{(\cos 40° - \cos 80°)\left(\cos 40° + \frac{1}{2}\right)}{(\cos 40° + \cos 80°)\left(\cos 40° - \frac{1}{2}\right)} = \frac{\cos^2 40° + \frac{1}{2}\cos 40° - \frac{1}{2}\cos 80° - \cos 40°\cos 80°}{\cos^2 40° - \frac{1}{2}\cos 40° - \frac{1}{2}\cos 80° + \cos 80°\cos 40°}$

$= \frac{1+\cos 80° + \cos 40° - \cos 80° - \cos 120° + \cos 40°}{1 + \cos 80° - \cos 40° - \cos 80° + \cos 120° + \cos 40°} = \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$ **(Showed)**

35. $A = \frac{2\pi}{15}, \alpha + \beta + \gamma = \pi$ এবং $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$

[CB'17]

(ক) প্রমাণ কর যে, $\cos 2p = \frac{1-\tan^2 p}{1+\tan^2 p}$। 2

(খ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $16\cos A\cos 2A\cos 4A\cos 7A = 1$ 4

(গ) উদ্দীপক থেকে দেখাও যে, $\tan\alpha = \tan\beta + \tan\gamma$ 4

সমাধান

ক. বামপক্ষ $= \cos 2p = \cos^2 p - \sin^2 p = \frac{(\cos^2 p. - \sin^2 p)\sec^2 p}{\sec^2 p}$

$= \frac{\cos^2 p.\sec^2 p - \sin^2 p.\sec^2 p}{\sec^2 p} = \frac{1 - \sin^2 p.\frac{1}{\cos^2 p}}{1+\tan^2 p} = \frac{1-\frac{\sin^2 p}{\cos^2 p}}{1+\tan^2 p} = \frac{1-\tan^2 p}{1+\tan^2 p} =$ ডানপক্ষ $\therefore \cos 2p = \frac{1-\tan^2 p}{1+\tan^2 p}$ **[Proved]**

খ. বামপক্ষ $= 16\cos A\cos 2A\cos 4A\cos 7A = \frac{8.2\sin A\cos A\cos 2A\cos 4A\cos 7A}{\sin A}$ [sin A দ্বারা লব ও হরকে গুণ করে]

$= \frac{8\sin 2A\cos 2A\cos 4A\cos 7A}{\sin A} = \frac{4.(2\sin 2A\cos 2A)\cos 4A\cos 7A}{\sin A}$

$= \frac{4\sin 4A\cos 4A\cos 7A}{\sin A} = \frac{2.(2\sin 4A\cos 4A)\cos 7A}{\text{Sin} A} = \frac{2\sin 8A\cos 7A}{\sin A}$

$= \frac{\sin(8A+7A)+\sin(8A-7A)}{\sin A} = \frac{\sin 15A + \sin A}{\sin A} = \frac{\sin 15A}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin A} = \frac{\sin\left(15.\frac{2\pi}{15}\right)}{\sin\frac{2\pi}{15}} + 1$ [$A = \frac{2\pi}{15}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{\sin 2\pi}{\sin\frac{2\pi}{15}} + 1 = \frac{0}{\sin\frac{2\pi}{15}} + 1 = 0 + 1 = 1 =$ ডানপক্ষ $\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

গ. ডানপক্ষ $= \tan\beta + \tan\gamma = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}$

$= \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\cos\alpha} [\because \cos\alpha = \cos\beta\cos\delta] = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos\alpha} [\because \alpha+\beta+\alpha = \pi]$

$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha =$ বামপক্ষ $\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ **(Showed)**

36. দৃশ্যকল্প-১ $\sin x + \sin y = a$ এবং $\cos x + \cos y = b$ দুইটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ। [CB'17]

দৃশ্যকল্প-২: ΔABC এর $A + B + C = \pi$

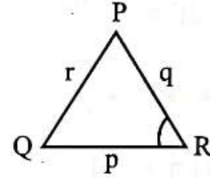
(ক) যদি ΔPQR এর তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে p, q, r এবং $p^2 + q^2 - r^2 = \sqrt{2}\, pq$ হয়, তবে R কোণের মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প:১ এর আলোকে $\cos(x + y)$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প:২ হতে প্রমাণ কর যে, $\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin A \cos B \sin C$. 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $p^2 + q^2 - r^2 = \sqrt{2}pq$



$\Rightarrow \frac{p^2+q^2-r^2}{2pr} = \frac{\sqrt{2}\,pq}{2pq}$ [2pq দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow \cos R = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos R = \cos 45° \Rightarrow R = 45° \therefore$ R কোণের মান 45°

খ. $\sin x + \sin y = a \Rightarrow 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a$ ……………… (i)

আবার, $\cos x + \cos y = b \Rightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = b$ ……………… (ii)

এখন, (i) ÷ (ii) থেকে পাই, $\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = \frac{a}{b} \Rightarrow \tan\frac{x+y}{2} = \frac{a}{b}$ ………… (iii)

এখন, প্রদত্ত রাশি $\cos(x+y) = \cos 2\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1-\tan^2\frac{x+y}{2}}{1+\tan^2\frac{x+y}{2}} = \frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}$ [(iii) থেকে মান বসিয়ে]

$= \frac{1-\frac{a^2}{b^2}}{1+\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\frac{b^2-a^2}{b^2}}{\frac{b^2+a^2}{b^2}} = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$ **(Ans.)**

গ. বামপক্ষ $= \sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1}{2}(2\sin^2 A - 2\sin^2 B) + \sin^2 C$

$= \frac{1}{2}\{(1-\cos 2A) - (1-\cos 2B)\} + \sin^2 C = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A - 1 + \cos 2B) + \sin^2 C$

$= \frac{1}{2}(\cos 2B - \cos 2A) + \sin^2 C = \frac{1}{2}.2\sin\frac{2B+2A}{2}\sin\frac{2A-2B}{2} + \sin^2 C$

$= \sin\frac{2B+2A}{2}\sin\frac{2A-2B}{2} + \sin^2 C = \sin(A+B)\sin(A-B) + \sin^2 C$

$= \sin(\pi - C)\sin(A-B) + \sin^2 C$ [$\because A+B+C=\pi$]

$= \sin C\sin(A-B) + \sin^2 C = \sin C\{\sin(A-B) + \sin C\}$

$= \sin C[\sin(A-B) + \sin\{\pi-(A+B)\}] \because [A+B+C=\pi]$

$= \sin C\{\sin(A-B) + \sin(A+B)\} = \sin$ গ. $2\sin A\cos B = 2\sin A\cos B\sin C =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin A\cos B\sin C$ (প্রমাণিত)।

37. $f(x) = \sin x$ এবং $g(x) = \cos x$ [Din.B'17]

(ক) $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ হলে, $\sqrt{\frac{2-\cot^2\theta}{2+\cot^2\theta}}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $f(x) + f(y) = p$ এবং $g(x) + g(y) = q$ হলে প্রমাণ কর যে, $f\left(\frac{x-y}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4-p^2-q^2}$ 4

সমাধান

ক. $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}} \therefore \cot^2\theta = \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sec^2\theta - 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 - 1} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2 - 1} = \frac{9}{13-9} = \frac{9}{4}$

$\therefore \sqrt{\frac{2-\cot^2\theta}{2+\cot^2\theta}} = \sqrt{\frac{2-\frac{9}{4}}{2+\frac{9}{4}}} = \sqrt{\frac{\frac{-1}{4}}{\frac{17}{4}}} = \sqrt{\frac{-1}{17}}$ **(Ans.)**

খ. 21 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

◆ **CQ: সম্ভাব্য প্রশ্ন ও সমাধান:**

01. $A = \cot\theta . \cot 3\theta \cot 5\theta \cdots\cdots \cot 19\theta$ এবং $B = \frac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \text{cosec}(-\theta)}$

(ক) $\tan 15° + \tan 45° + \tan 75° + \cdots\cdots + \tan 165° = ?$ 2

(খ) $\theta = \frac{\pi}{20}$ হলে, A এর মান বের কর? 4

(গ) $\sin\theta = \frac{5}{13}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হলে, B এর মান বের কর? 4

সমাধান

ক. $\tan 15° + \tan 45° + \tan 75° + \cdots\cdots + \tan 165°$
$= \tan 15° + \tan 45° + \tan 75° + \tan 105° + \tan 135° + \tan 165°$
$= \tan 15° + \tan 45° + \tan 75° + \tan(90° + 15°) + \tan(180° - 45°) + \tan(180° - 15°)$
$= \tan 75° - \cot 15° = \tan 75° - \tan 75° = 0$ **(Ans.)**

খ. $20\theta = \pi \Rightarrow 10\theta = \frac{\pi}{2}$
এখন, $\cot x \cot(10\theta + x) = \cot x \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x\ (\tan x) = -1$
$\therefore \cot\theta \cot 11\theta = \cot 3\theta . \cot 13\theta = -1 \therefore\ \cot\theta\cot 11\theta = \cot 9\theta \cot 19\theta = -1$
$\cot\theta$ থেকে $\cot 9\theta$ পর্যন্ত পদসংখ্যা $= \frac{9-1}{2} + 1 = 5$ টি $\therefore \cot\theta . \cot 3\theta \cdots\cdots \cot 19\theta = (-1)^5 = -1$ **(Ans.)**

গ. বোর্ড প্রশ্ন **01 (খ)** এর অনুরূপ।

02. দৃশ্যকল্প-১: $\tan\alpha : \tan\beta = x : y$
দৃশ্যকল্প-২: $\tan\theta = k\tan\emptyset$

(ক) $\tan 20° + \tan 25° + \tan 20° \tan 25° =$ কত? 2

(খ) $\theta = \alpha + \beta$ হয়, তবে দৃশ্যকল্প - ১ হতে প্রমাণ কর যে, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{x-y}{x+y}\sin\theta$ । 4

(গ) $\theta = \alpha - \emptyset$ হয়, তাহলে দৃশ্যকল্প - ২ হতে প্রমাণ কর যে, $\sin(\theta - \emptyset) = \frac{k-1}{k+1}\sin\alpha$ । 4

সমাধান

ক. $\tan 20° + \tan 25° + \tan 20° \tan 25°$ এখানে, $\tan 45° = \tan(20° + 25°) \Rightarrow 1 = \frac{\tan 20° + \tan 25°}{1 - \tan 25° \tan 20°}$
$\Rightarrow 1 - \tan 25° \tan 20° = \tan 20° + \tan 25° \therefore \tan 20° + \tan 25° + \tan 25° . \tan 20° = 1$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে $\theta = \alpha + \beta$; $\tan\alpha : \tan\beta = x : y$
$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} = \frac{x+y}{x-y} \Rightarrow \tan\alpha + \tan\beta = \frac{x+y}{x-y}(\tan\alpha - \tan\beta)$
$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{x+y}{x-y}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right) \Rightarrow \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{x+y}{x-y}\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}\right)$
$\Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \frac{x+y}{x-y}\sin(\alpha - \beta) \quad \Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \frac{x-y}{x+y} . \sin\theta$ [প্রমাণিত]

গ. দেওয়া আছে, $\theta = \alpha - \emptyset \Rightarrow \theta + \emptyset = \alpha$; $\tan\theta = k\tan\emptyset$; $\frac{\tan\theta}{\tan\emptyset} = K$; $\frac{\tan\theta + \tan\emptyset}{\tan\theta - \tan\emptyset} = \frac{k+1}{k-1}$
$\Rightarrow \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin\emptyset}{\cos\emptyset}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\emptyset}{\cos\emptyset}} = \frac{k+1}{k-1} \Rightarrow \frac{\frac{\sin\theta\cos\emptyset + \sin\emptyset\cos\theta}{\cos\theta\cos\emptyset}}{\frac{\cos\emptyset\sin\theta - \sin\emptyset\cos\theta}{\cos\theta\cos\emptyset}} = \frac{k+1}{k-1} \Rightarrow \frac{\sin\theta\cos\emptyset + \sin\emptyset\cos\theta}{\cos\theta\cos\emptyset} \times \frac{\cos\theta\cos\emptyset}{\sin\theta\cos\emptyset - \sin\emptyset\cos\theta} = \frac{k+1}{k-1}$
$\Rightarrow \frac{\sin(\theta + \emptyset)}{\sin(\theta - \emptyset)} = \frac{k+1}{k-1} \therefore \sin(\theta - \emptyset) = \frac{k-1}{k+1}\sin\alpha$ **(Proved)**

03. দৃশ্যকল্প-১: $a\cos(x + \alpha) = b\cos(x - \alpha)$
দৃশ্যকল্প-২: $a\sin(\theta + \alpha) = b\sin(\theta + \beta)$

(ক) কোন একটি ত্রিভুজে $\cos A = \cos B \cos C$ হলে $(\tan B + \tan C)$ এর মান বের কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প: ২ হতে দেখাও যে, $\cot\theta = \frac{a\cos\alpha - b\cos\beta}{b\sin\beta - a\sin\alpha}$ । 4

(গ) দৃশ্যকল্প: ১ হতে প্রমাণ কর যে, $\frac{(a-b)^2\cot^2\alpha - (a+b)^2\sec^2 x}{(a+b)^2} = -1$ । 4

সমাধান

ক. $\tan B + \tan C = \frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\sin B \cos C + \cos B \sin C}{\cos B \cos C}$ [$\because A + B + C = \pi$ এবং $\cos A = \cos B \cos C$]
$= \frac{\sin(B+C)}{\cos B \cos C} = \frac{\sin(180° - A)}{\cos A} = \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A \therefore \tan B + \tan C = \tan A$

খ. দেওয়া আছে, $a\sin(\theta + \alpha) = b\sin(\theta + \beta) \Rightarrow a(\sin\theta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\theta) = b(\sin\theta\cos\beta + \sin\beta\cos\theta)$
$\Rightarrow a\sin\theta\cos\alpha - b\sin\theta\cos\beta = b\sin\beta\cos\theta - a\sin\alpha\cos\theta$
$\Rightarrow (a\cos\alpha - b\cos\beta)\sin\theta = (b\sin\beta - a\sin\alpha)\cos\theta \Rightarrow \cot\theta = \frac{a\cos\alpha - b\cos\beta}{b\sin\beta - a\sin\alpha}$ **(Showed)**

গ. দেওয়া আছে, $a\cos(x + \alpha) = b\cos(x - \alpha) \Rightarrow a(\cos x\cos\alpha - \sin x\sin\alpha) = (\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha) \times b$
$\Rightarrow (a - b)\cos x\cos\alpha = (a + b)\sin x\sin\alpha \Rightarrow (a + b)\frac{\sin x}{\cos x} = (a - b)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow (a + b)\tan x = (a - b)\cot\alpha$
$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{a+b}{a-b}\tan x \Rightarrow \cot^2\alpha = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\tan^2 x \Rightarrow (a - b)^2\cot^2\alpha = (a + b)^2\sec^2 x - (a + b)^2$
$\Rightarrow \frac{(a-b)^2\cot^2\alpha - (a+b)^2\sec^2 x}{(a+b)^2} = -1$ **(Proved)**

04. (i) $16\cos 2A\cos 4A\cos 8A\cos 14A$
(ii) $\sin^3 A + \sin^3(120° + A) + \sin^3(240° + A) = B$

(ক) $\frac{1}{\sin 10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°} = ?$ 2

(খ) $A = \frac{\pi}{15}$ হলে দেখাও যে, (i) এর মান 1 । 4

(গ) (ii) এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $B = -\frac{3}{4}\sin 3x$ । 4

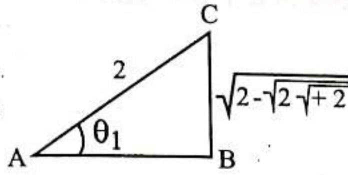
সমাধান

ক. বোর্ড প্রশ্ন 18 (ক) এর অনুরূপ।

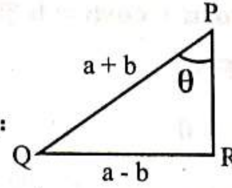
খ. ধরি, $\frac{2\pi}{15} = \theta$; $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15} = 16\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 7\theta$
$= \frac{8}{\sin\theta}(2\sin\theta\cos\theta)\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 7\theta = \frac{8}{\sin\theta}(\sin 2\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 7\theta)$ [$\because \sin 2A = 2\sin A\cos A$]
$= \frac{4}{\sin\theta}(2\sin 2\theta\cos 2\theta)\cos 4\theta\cos 7\theta = \frac{4}{\sin\theta}\sin 4\theta\cos 4\theta\cos 7\theta$
$= \frac{2}{\sin\theta}(2\sin 4\theta\cos 4\theta)\cos 7\theta = \frac{2}{\sin\theta}\sin 8\theta\cos 7\theta$
$= \frac{1}{\sin\theta}(2\sin 8\theta\cos 7\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\{\sin(8\theta + 7\theta) + \sin(8\theta - 7\theta)\}$
[$\because 2\sin A\cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$]
$= \frac{1}{\sin\theta}\{\sin 15\theta + \sin\theta\} = \frac{1}{\sin\theta}(\sin 15\theta + \sin\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\left\{\sin\left(15 \times \frac{2\pi}{15}\right) + \sin\theta\right\}$
$= \frac{1}{\sin\theta}(\sin 2\pi + \sin\theta) = \frac{1}{\sin\theta}(0 + \sin\theta) = 1 \therefore 16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15} = 1$ **(Showed)**

গ. $L.H.S = \sin^3 x + \sin^3(120° + x) + \sin^3(240° + x) = \frac{1}{4}\{4\sin^3 x + 4\sin^3(120° + x) + 4\sin^3(240° + x)\}$
$= \frac{1}{4}\{(3\sin x - \sin 3x + 3\sin(120° + x) - \sin 3(120° + x) + 3\sin(240° + x) - \sin 3(240° + x)\}$
[$\because 4\sin^3\theta = 3\sin\theta - \sin 3\theta$]
$= \frac{1}{4}[3\sin x - \sin 3x + 3\sin\{180° + (x - 60°)\} - \sin(360° + 3x) + 3\sin\{180° + (x + 60°)\} - \sin(2.360° + 3x)]$
$= \frac{1}{4}[3\sin x - \sin 3x - 3\sin(x - 60°) - \sin 3x - 3\sin(x + 60°) - \sin 3x]$
$= \frac{1}{4}[3\sin x - 3\sin 3x - 3\{\sin(x + 60°) + \sin(x - 60°)\}]$
$= \frac{3}{4}[\sin x - \sin 3x - \{2\sin x\cos 60°\}] = \frac{3}{4}\left[\sin x - \sin 3x - 2(\sin x)\frac{1}{2}\right]$
$= \frac{3}{4}[\sin x - \sin 3x - \sin x] = -\frac{3}{4}\sin 3x = R.H.S$ **(Proved)**

05. দৃশ্যপট-১:



দৃশ্যপট-২:



(ক) $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\emptyset}{2}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos\emptyset=\frac{\cos\theta-e}{1-e\cos\theta}$ 2

(খ) দৃশ্যপট-১: হতে প্রমাণ কর যে, $\theta_1=\frac{\pi}{16}$ 4

(গ) দৃশ্যপট-২: হতে প্রমাণ কর যে, $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{\frac{b}{a}}$ 4

সমাধান

ক. বোর্ড প্রশ্ন 35 (গ) এর অনুরূপ।

খ. $\sin\theta_1=\frac{1}{2}(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2\left(1+\cos 2.\frac{\pi}{8}\right)}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{8}}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{2.2\sin^2\frac{\pi}{16}}=\sin\frac{\pi}{16}\therefore\theta_1=\frac{\pi}{16}$ **[Proved]**

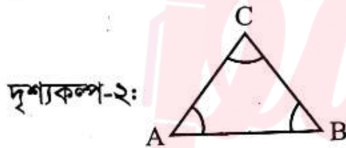
গ. দৃশ্যপট-২ হতে, $\sin\theta=\frac{a-b}{a+b}$

$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{2.\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\sin2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{1+\cos2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{1+\sin\theta}$

$=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2}}{1+\frac{a-b}{a+b}}=\frac{\sqrt{\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a+b}}}{\frac{a+b+a-b}{a+b}}=\frac{\sqrt{4ab}}{2a}=\frac{2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2a}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\therefore\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{\frac{b}{a}}$ **[Proved]**

06. দৃশ্যকল্প-১: $A+B+C=\frac{\pi}{2}$

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) ABC একটি সাধারণ ত্রিভুজ হলে, $\tan A+\tan B+\tan C=?$ 2

(খ) দৃশ্যকল্প ১ হতে দেখাও যে, $\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=2\cos A\cos B\sin C.$ 4

(গ) দৃশ্যকল্প ২ হতে দেখাও যে, $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1.$ 4

সমাধান

ক. $A+B+C=\pi$; $A+B=\pi-C\Rightarrow\tan(A+B)=\tan(\pi-C)$

$\Rightarrow\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C\Rightarrow\tan A+\tan B=-\tan C+\tan\tan B\tan C$

$\Rightarrow\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ **(Ans.)**

খ. $L.H.S.=\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=\frac{1}{2}(1+\cos 2A+1+\cos 2B)-\cos^2 C$

$=1+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)-\cos^2 C=\frac{1}{2}.2\cos(A+B)\cos(A-B)+1-\cos^2 C$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)\cos(A-B)+\sin^2 C=\sin C\cos(A-B)+\sin^2 C$

$=\sin C\{\cos(A-B)+\sin C\}=\sin C[\cos(A-B)+\sin\{\frac{\pi}{2}-(A+B)\}]$

$=\sin C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]=\sin C.2\cos A\cos B=2\cos A\cos B\sin C=R.H.S$ **(Showed)**

গ. বোর্ড প্রশ্ন 12 (খ) এর অনুরূপ।

07. $\sin\alpha + \sin\beta = a$ এবং $\cos\alpha + \cos\beta = b$ দুটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ। [যেখানে $\alpha + \beta = 180°$]

(ক) $\sin\alpha - \sin\beta$ নির্ণয় কর। 2

(খ) দেখাও যে, $\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} + 1 = 0$। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $1 + \cos(\alpha - \beta) = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\alpha + \beta = 180°$; $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$= 2\cos\frac{180°}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos 90°.\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2.0.\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$ (**Ans.**)

খ. দেওয়া আছে, $\sin\alpha + \sin\beta = a \therefore 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = a \cdots\cdots(i)$ $\left[\because \sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\right]$

এবং $\cos\alpha + \cos\beta = b \therefore 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = b \cdots\cdots(ii)$ $\left[\because \cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}.\cos\frac{C-D}{2}\right]$

এখন (ii) নং কে (i) নং দ্বারা ভাগ করে পাই, $\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{b^2}{a^2}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$ [বিয়োজন-যোজন করে] $\Rightarrow \frac{\cos 2\frac{\alpha+\beta}{2}}{1} = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$ $[\because \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A]$

$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} \Rightarrow \cos 180^o = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$ $[\because \alpha + \beta = 180°] \Rightarrow -1 = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} \therefore \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} + 1 = 0$ (**Showed**)

গ. দেওয়া আছে, $\sin\alpha + \sin\beta = a \cdots\cdots (i)$

$\cos\alpha + \cos\beta = b \cdots\cdots (ii)$

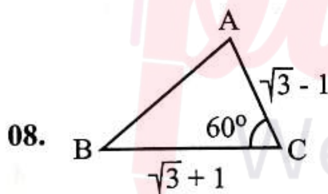
(i) ও (ii) কে বর্গ করে পাই, $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow \sin^2\alpha + 2\sin\alpha.\sin\beta + \sin^2\beta + \cos^2\beta + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha.\cos\beta = a^2 + b^2$

$\Rightarrow 1 + 1 + 2\cos(\alpha - \beta) = a^2 + b^2$ $[\because \cos(A - B) = \cos A.\cos B + \sin A.\sin B]$

$\Rightarrow 2\{(1 + \cos(\alpha - \beta)\} = a^2 + b^2 \Rightarrow 1 + \cos(\alpha - \beta) = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ (**Proved**)

08.



(ক) দেখাও যে, $a^2(\sin^2 B - \sin^2 C) + b^2(\sin^2 C - \sin^2 A) + c^2(\sin^2 A - \sin^2 B) = 0$ 2

(খ) দেখাও যে, $\cos^2(\theta - C) + \cos^2\theta + \cos^2(\theta + C) = \frac{3}{2}$ 4

(গ) ত্রিভুজটি সমাধান কর। 4

সমাধান

ক. $L.H.S = a^2(\sin^2 B - \sin^2 C) + b^2(\sin^2 C - \sin^2 A) + c^2(\sin^2 A - \sin^2 B)$

আমরা জানি, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \therefore a = 2R\sin A$

$\therefore L.H.S = (2R\sin A)^2(\sin^2 B - \sin^2 C) + (2R\sin B)^2(\sin^2 C - \sin^2 A) + (2R\sin C)^2(\sin^2 A - \sin^2 B)$

$= 4R^2\{\sin^2 A\sin^2 B - \sin^2 A\sin^2 C + \sin^2 B\sin^2 C - \sin^2 B\sin^2 A + \sin^2 C\sin^2 A - \sin^2 C\sin^2 B\}$

$= 4R^2 \times 0 = 0 = R.H.S$ (**Showed**)




খ. $L.H.S = \cos^2\theta + \cos^2(\theta - C) + \cos^2(\theta + C) = \cos^2\theta + \cos^2(\theta - 60°) + \cos^2(\theta + 60°)$

$= \frac{1}{2}\{1 + \cos2\theta + 1 + \cos2(\theta - 60°) + 1 + \cos2(\theta + 60°)\}$

$= \frac{1}{2}\{3 + \cos2\theta + \cos(2\theta - 120°) + \cos(2\theta + 120°) = \frac{1}{2}\{3 + \cos2\theta + 2\cos2\theta \times \cos120°\}$

$= \frac{1}{2}\left\{3 + \cos2\theta + 2\cos2\theta\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{1}{2}(3 + \cos2\theta - \cos2\theta\} = \frac{3}{2} =$ R.H.S **(Showed)**

গ. বোর্ড প্রশ্ন 20 (গ) এর অনুরূপ।

09. **ABC** যেকোন একটি ত্রিভুজ।

(ক) $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ হলে, $\cos 2\theta$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপকের ত্রিভুজে $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$ দেখাও যে, $C = 45°$ অথবা $135°$ । 4

(গ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর, $\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin A \cos B \sin C$ । 4

সমাধান

ক. $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$; $\cos2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)^2 - 1 = 2.\frac{1}{4}\left(x^2 + 2x.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - 1$

$= \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 1 - 1 = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$

খ. দেওয়া আছে, $a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2) \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 - 2c^2a^2 - 2b^2c^2 = 0$

$\Rightarrow (a^2)^2 + (b^2)^2 + (-c^2)^2 + 2a^2.b^2 + 2b^2(-c^2) + 2(-c)^2a^2 = 2a^2b^2$

$\Rightarrow (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 2a^2b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = \pm\sqrt{2}ab$

$\Rightarrow 2ab\cos C = \pm\sqrt{2}ab \Rightarrow \cos C = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos C = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে, $C = 45°$

$\cos C = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে, $\cos C = -\cos45° = \cos(180° - 45°) \therefore C = 135° \therefore C = 45°$ or $135°$ **(Showed)**

গ. বোর্ড প্রশ্ন 38 (গ) এর অনুরূপ

10. (i) ΔABC এ, $\cos A = \sin B - \cos C$

(ii) $2\sin\frac{\pi}{16}$

(ক) দেখাও যে, $\cot B\cot C + \cot C\cot A + \cot A\cot B = 1$ [যখন, $A + B + C = \pi$] 2

(খ) দেখাও যে, (i) নং ত্রিভুজটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ। 4

(গ) (ii) নং হতে প্রমাণ কর, $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = 2\sin\frac{\pi}{16}$ । 4

সমাধান

ক. $A + B + C = \pi \Rightarrow A + B = \pi - C \Rightarrow \cot(A + B) = \cot(\pi - C)$

$\Rightarrow \frac{\cot A\cot B - 1}{\cot B + \cot A} = -\cot C \Rightarrow \cot A\cot B - 1 = -\cot B\cot C - \cot A\cot C$

$\Rightarrow \cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot A\cot C = 1$ **(Showed)**

খ. বোর্ড প্রশ্ন 18 (গ) এর অনুরূপ।

গ. বোর্ড প্রশ্ন 34 (খ) এর অনুরূপ।

অধ্যায় ০৯ অন্তরীকরণ

এই অধ্যায়ের বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্নের বিশ্লেষণ:

বোর্ড	২০২২				২০২১				২০১৯				২০১৮				২০১৭			
	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ
	ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ	
ঢাকা	2	1	1	5	2	2	2	4	1	1	1	4	1			2	1	1	1	
রাজশাহী	2	1	1	5	2	2	2	9	1	1	1	2	সকল বোর্ড				2	2	1	3
চট্টগ্রাম	2	1	1	6	2	2	2	6	1	1	1	2					2	2	1	2
সিলেট	1	1	1	4	1	2	2	6	2	1		2					1	1	1	2
বরিশাল	1	2	2	4	2	2	2	7	1	1	1	6					2	1	1	2
যশোর	2	2	1	4	2	2	2	9	1	1	1	4					2	2	1	4
কুমিল্লা	2	2		5	2	2	2	5	1	1	1	4					1	1	1	3
দিনাজপুর	1	2	2	6	2	2	2	6	1	1	1	4					1	1	1	4
ময়মনসিংহ	2	2	2	6	1	1	2	6												

বি.দ্র.- ২০২০ সালে বোর্ড পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয় নাই এবং ২০১৮ সালে সকল বোর্ডে অভিন্ন প্রশ্ন পদ্ধতিতে পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয়।

গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা ও তথ্যাবলি

◈ লিমিট:

কোনো বিন্দু $x = a$ তে কোনো ফাংশন $f(x)$ এর লিমিট হল এমন একটি সংখ্যা l যেন x কে a এর 'যথেষ্ট কাছাকাছি' এনে $f(x)$ কে l এর 'যতখুশি তত কাছে' আনা যায়। তখন একে $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ এর মানে হল যেকোনো বাস্তব মান $\epsilon > 0$ এর জন্য এরকম $\delta > 0$ আছে যেন যদি $0 < |x - a| < \delta$ হয়, তাহলে $|f(x) - l| < \epsilon$ হবে।

◈ কোনো বিন্দুতে লিমিটের অস্তিত্ব থাকার শর্ত:

কোনো বিন্দুতে কোন ফাংশনের লিমিট $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ অস্তিত্বশীল হবে যদি $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ হয় [এর অর্থ ফাংশনের ডান সীমা = ফাংশনের বাম সীমা]। $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এর ডান সীমা হল x এর মান ক্রমান্বয়ে a হতে অনেক বড় সংখ্যা হতে a এর কাছাকাছি আসলে [অর্থাৎ x অক্ষের ধনাত্মক অংশ হতে ঋণাত্মক অংশের দিকে অগ্রসর হলে প্রাপ্ত সীমা] যে সীমা পাওয়া যায়। অর্থাৎ $\lim\limits_{h\to 0} f(a + h), [h > 0]$ এর মান। একে $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অপরদিকে $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ এর বাম সীমা হল x এর মান ক্রমান্বয়ে a অপেক্ষা ক্ষুদ্র মান হতে a এর দিকে অগ্রসর হলে যে সীমা পাওয়া যায় [অর্থাৎ x অক্ষের ঋণাত্মক অংশ হতে ধনাত্মক অংশের দিকে অগ্রসর হলে প্রাপ্ত সীমা] অর্থাৎ $\lim\limits_{h\to 0} f(a - h)$ সেখানে $h > 0$। একে $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এই দুই লিমিট একই হলে কেবল $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এ অস্তিত্ব থাকবে। যেমন $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ অস্তিত্বশীল নয় কেননা $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$ কিন্তু $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$ [$\therefore x < 0$ হলে $|x| = -x$]

একইভাবে $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2(x-1)}}{x-1}$ ইত্যাদি অস্তিত্বশীল নয় [উল্লেখ্য এক্ষেত্রে একদিকবর্তী সীমা অর্থাৎ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ কিংবা $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ অস্তিত্বশীল]

◈ যদি $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ হয়, তাহলে $f(x)$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে। সুতরাং $f(x)$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবার শর্ত: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

◈ $\lim_{x\to a} f(x)$ বিদ্যমান $\Rightarrow \lim_{x\to a^-} f(x)$ এবং $\lim_{x\to a^+} f(x)$ উভয়েই বিদ্যমান এবং এদের মান সমান।

◈ লিমিটের সাধারণ ধর্মাবলি: যদি $\lim_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = m$ হয় তবে,

(i) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = l + m$

(ii) $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = l - m$

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$ [যদি $m \neq 0$ হয়]

(iv) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

◈ sinx, cosx ইত্যাদি সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের লিমিট নির্ণয় করতে x কে অবশ্যই রেডিয়ানে পরিমাপ করতে হবে।

◈ অন্তরীকরণ:

(i) কোনো ফাংশন $f(x)$ এর অন্তরক সহগ $f'(x)$ দ্বারা এরূপ একটি ফাংশন বোঝানো হয় যার মান $y = f(x)$ বক্ররেখার x বিন্দুতে বক্ররেখার ঢালের সমান। তাই $y = f(x)$ বক্ররেখাস্থ দুইটি পরস্পর সন্নিকটস্থ বিন্দু $(x, f(x))$ ও $(x+h, f(x+h)$ হলে, $(x, f(x))$ বিন্দুতে বক্ররেখার ঢাল $= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$

(ii) sinx, cosx ইত্যাদি ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় করার সময় x কোণটি রেডিয়ানে পরিমাপিত মনে করা হয়। x কোণটি অন্য কোন এককে থাকলে তাকে রেডিয়ানে পরিণত করে নিতে হবে।

(iii) কোনো বিন্দুতে অন্তরকের মান নির্ণয়যোগ্য হবে যদি $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ লিমিটটি অস্তিত্বশীল হয়।

অর্থাৎ, $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

◈ গুরুমান ও লঘুমান:

$y = f(x)$ ফাংশনের গুরুমান বা লঘুমান পাওয়া যাবে যদি $f'(x) = 0$ হয় x এর বাস্তব মানের জন্য। সেক্ষেত্রে $f''(x) < 0$ এর জন্য গুরুমান এবং $f''(x) > 0$ এর জন্য লঘুমান পাওয়া যাবে।

বি:দ্র: কোন ক্ষেত্রে $f''(x) = 0$ হলে সেক্ষেত্রে $f^{(3)}(x)$ নির্ণয় করে তাতে উক্ত মান বসাতে হবে। এটির মানও শূন্য হলে উপরোক্ত পদ্ধতি অনুসারে অগ্রসর হতে হবে যতক্ষণ না $f^{(n)}(x)$ এর মান অশূন্য কোন সংখ্যা না হয়। এই $f^{(n)}(x)$ এর জন্য n এর মান জোড় হলে সেক্ষেত্রে x এর উক্ত মান $f(x)$ এর গুরু না লঘু মান হয় তা $f''(x)$ এর ক্ষেত্রের মত অর্থাৎ পূর্বের মত নির্ধারিত হবে। কিন্তু n বিজোড় হলে এটি ফাংশনটির গুরু বা লঘু কোন মান হবে না। একটি ফাংশনের লেখচিত্রে x-axis বরাবর অগ্রসর হলে যদি দেখতে পাও এর উপর অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল +ve হতে কমতে কমতে একটি বিন্দুতে এসে −ve হচ্ছে তবে ঐ বিন্দুতে ফাংশনটির একটি গুরুমান থাকবে। এর বিপরীত হলে লঘুমান থাকবে।

দ্রষ্টব্য: মনে রাখবে, লঘু / গুরুমান মানেই ক্ষুদ্রতম / বৃহত্তম মান নয়।

◈ **Concept:**

বিশেষত: জটিল আকৃতির বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনে প্রতিস্থাপন পদ্ধতি প্রয়োগ হয়। নিম্নোক্ত প্রতিস্থাপনের ফলে অন্তরক সহগ নির্ণয় সহজতর হয়।

Term –এর আকৃতি	যা ধরতে হবে
$1 - x^2$	$x = \sin\theta / \cos\theta$
$1 + x^2$	$x =* \tan\theta / \cot\theta$
$x^2 - 1$	$x =* \sec\theta / \text{cosec}\,\theta$
$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ or, $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	$x = \cos\theta$
$\frac{2x}{1\pm x^2}$ or, $\frac{1-x^2}{1+x^2}$	$x = \tan\theta$
$\frac{1-x}{1+x}, \frac{1+x}{1-x}$	$x = \tan\theta$
$\frac{a+x}{1-ax}, \frac{a-x}{1+ax}$	$x = \tan\theta$

বি.দ্র. চলক [x, t] ধরার ক্ষেত্রে '*' চিহ্নিত ফাংশন first choice হবে।

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি

লিমিট:

(i) $\lim\frac{f(x)}{f(y)}=\frac{\lim f(x)}{\lim f(y)}$ [যেখানে $\lim(y)\neq 0$]

(ii) $\lim(c)=c$ [c ধ্রুবক]

(iii) $\lim(cx)=c\lim(x)$ [c ধ্রুবক]

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

(v) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$

(vi) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

(vii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$

(viii) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$

(ix) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$

(x) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$

(xi) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

(xii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^x=e^m$

(xiii) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(xiv) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

[উল্লেখ্য $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$]

(xv) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

(xvi) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=1$

(xvii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin^{-1}x}=1$

(xviii) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=\lim\limits_{x\to 0}x$

(xix) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan^{-1}x}=1$

(xx) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{d}{dx}\{f(x)\}$

(xxi) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{nx}=e^{mn}$

(xxii) $\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{n}{x}}=e^{mn}$

L' Hôpital's Rule:

যদি $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$ ভগ্নাংশটির একটি অনির্ণেয় আকার আসে তবে লব ও হরকে বারবার Differentiation করতে হবে যতক্ষণ না পর্যন্ত বাস্তব মান পাওয়া যায়। অর্থাৎ, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(a)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(a)}{g''(a)}=\cdots\cdots\cdots$[শর্ত প্রযোজ্য]

ব্যাখ্যা: L' Hôpital হচ্ছে গাণিতিকভাবে অসুস্থ (অনির্ণেয়) রাশির জন্যে চিকিৎসাকেন্দ্র। আপাদমস্তক একই রোগে আক্রান্ত রোগীর জন্য (অর্থাৎ, $\frac{0}{0}$ এবং $\frac{\infty}{\infty}$) এটি কার্যকর এবং আপাদমস্তক একই ডাক্তার (Differentiation) দিয়ে Operation চালাতে হবে। যতক্ষণ অসুস্থ থাকবে ($\frac{0}{0}$ এবং $\frac{\infty}{\infty}$ আকার) ততক্ষণ Operation চলবে। অন্যান্য রোগীদের ($\pm\infty,\frac{1}{0},\infty,0$ ইত্যাদি) নিয়ে বা সুস্থ রাশিকে (বাস্তব) নিয়ে Operation করা চলবে না। প্রয়োজনে Change করে $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ আকারে নিয়ে তারপর L'Hôpital's প্রয়োগ করা যাবে। অর্থাৎ, সুস্থ রাশিকে অসুস্থ $\left(\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\right)$ বানিয়ে প্রয়োগ করা যাবে।

অন্তরীকরণ:

(i) $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$

(ii) $\frac{d}{dx}(\sin nx)=n\cos nx$

(iii) $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$

(iv) $\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$

(v) $\frac{d}{dx}(\cot x)=-\cos ec^2x$

(vi) $\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x.\tan x$

(vii) $\frac{d}{dx}(\text{cosec}\,x)=-\cos ecx.\cot x$

(viii) $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$

(ix) $\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}$

(x) $\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\ln a$

(xi) $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$

(xii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

(xiii) $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}$

(xiv) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(xv) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(xvi) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$

(xvii) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)=\frac{-1}{1+x^2}$

(xviii) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(xix) $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(xx) $f'(x)=\frac{dy}{dx}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

(xxi) $\frac{d}{dx}(u\pm v)=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}$

(xxii) $\frac{d}{dx}(uvw)=uvw\left\{\frac{\frac{d}{dx}(u)}{u}+\frac{\frac{d}{dx}(v)}{v}+\frac{\frac{d}{dx}(w)}{w}\right\}$

- **n–তম অন্তরক:**

  (i) $y = x^n$ হলে $y_n = n!$

  (ii) $y = e^{ax+b}$ হলে $y_n = a^n e^{ax+b}$

  (iii) $y = a^x$ হলে $y_n = a^x(\ln a)^n$

  (iv) $y = \sin(ax+b)$ হলে $y_n = a^n \sin\left[\frac{n\pi}{2} + ax + b\right]$

  (v) $y = \cos(ax+b)$ হলে $y_n = a^n \cos\left[\frac{n\pi}{2} + ax + b\right]$

  (vi) $y = \ln(x)$ হলে $y_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

  (vii) $y = e^{ax}T(bx+c)$ হলে $y_n = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} T\left(bx + c + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$ (যেখানে $T = \sin$ বা $\cos$)

- **স্পর্শক ও অভিলম্ব:**

  (i) (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$

  (ii) (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ: $x - x_1 + f'(x_1)(y - y_1) = 0$

সহজে মনে রাখার কৌশল

01. $\frac{d}{dx}(u^v)$ মনে রাখার টেকনিক:

$$\frac{d}{dx}(u^v) = u^v\left\{\frac{v}{u}\cdot\frac{d}{dx}(u) + \ln(u)\cdot\frac{d}{dx}(v)\right\}$$

u^v → যা আছে তাই; $\frac{v}{u}$ → $\frac{\text{উপরের Part}}{\text{নিচের Part}}$; $\frac{d}{dx}(u)$ → নিচের Part এর derivative; $\ln(u)$ → নিচের Part এর ln; $\frac{d}{dx}(v)$ → উপরের Part এর derivative

উদাহরণ: $(1+x^2)^{2x}$; এখানে নিচের পার্ট $(1+x^2)$ এবং উপরের পার্ট $2x$ তাহলে, $\frac{d}{dx}(1+x^2)^{2x} =$(যা আছে তাই)$\left\{\frac{\text{উপরের part}}{\text{নিচের part}}\cdot\frac{d}{dx}(\text{নিচের পার্ট}) + \ln(\text{নিচের পার্ট}).\frac{d}{dx}(\text{উপরের পার্ট})\right\}$

$= (1+x^2)^{2x}\left\{\frac{2x}{1+x^2}(2x) + \ln(1+x^2).2\right\}$

02. $\frac{d}{dx}\left(\frac{PQR}{ST}\right) = \frac{PQR}{ST}\left[\frac{1}{p}\frac{dp}{dx} + \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dx} + \frac{1}{R}\frac{dR}{dx} - \frac{1}{S}\frac{ds}{dx} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dx}\right]$

গুণ এবং ভাগ হিসেবে অনেকগুলো ফাংশন থাকলে এদের অন্তরজ বের করার নিয়ম এরকম:

শুরুতে $\frac{PQR}{ST}$ অর্থাৎ যা আছে তাই, এর পর যেগুলো ফাংশন লবে আছে, তাদের পৃথকভাবে অন্তরজ এবং সাথে $\frac{1}{\text{ফাংশন}}$ গুণ করে করে যোগ করতে হবে, এবং লবের ফাংশনের ক্ষেত্রে বিয়োগ করতে হবে।

উদাহরণ: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2\ln x}{\tan^{-1}x}\right) = \frac{x^2\ln x}{\tan^{-1}x}\cdot\left[\frac{1}{x^2}\cdot(2x) + \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan^{-1}x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right]$

derivative

যেহেতু $\tan^{-1}x$ হরে আছে

03. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2} = \frac{\text{হর}\times\frac{d}{dx}(\text{লব}) - \text{লব}\frac{d}{dx}(\text{হর})}{(\text{হর})^2}$

একে এভাবে মনে রাখা যায় নিচে $(\text{হর})^2$, উপরে ডানেও হর, বামেও হর, শুধু মাঝে লব।

04. ক্রমিক অন্তরীকরণ:

(i) $y = e^{mx}; y_n = m^n.e^{mx}$

দেখো, e^{mx} কে একবার অন্তরীকরণ করলে me^{mx} পাওয়া যায়।

যেখানে, me^{mx}

অপরিবর্তিত অংশ

একবার অন্তরীকরণে m এর Power 1।
তাহলে n বার অন্তরীকরণে Power হবে m^n

সুতারাং, $y_n = m^n.e^{mx}$

(ii) $y = \sin/\cos(bx + c); y_n = b^n.\sin/\cos\left(bx + c + \frac{n\pi}{2}\right)$

ধরো, sin 2x কে একবার অন্তরীকরণ করা হলো,

তাহলে, $y_1 = 2\cos 2x = 2\sin\left(2x + \frac{1.\pi}{2}\right)$

1 বার অন্তরীকরণে 2^1,
তাহলে n বার অন্তরীকরণে 2^n

1 বার অন্তরীকরণে 1,
তাহলে n বার অন্তরীকরণে n

$\therefore y_n = \frac{d^n}{dx^n}(a\sin/\cos(bx + c)) = a^n.\sin/\cos\left(bx + c + \frac{n\pi}{2}\right)$

(iii) $y = \ln(ax + b)\,; y_n = \frac{a^n.(-1)^{n-1}.(n-1)!}{(ax+b)^n}$ এবং $y = \frac{1}{ax+b}; y_n = \frac{a^n.(-1)^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$

এই দুইটাকে একত্রে মনে রাখা যায়। ধরো তোমার কাছে $\ln x$ আছে, একে একবার $\frac{d}{dx}$ করলে আছে $\frac{1}{x^1}$। তাহলে n বার $\frac{d}{dx}$ করলে নিচে থাকবে x^n. অন্যদিকে $\frac{1}{x}$ একে একবার $\frac{d}{dx}$ করলে আসে $\frac{-1}{x^2}$ আবার $\frac{1}{x^2}$ কে $\frac{d}{dx}$ করলে $\frac{-2}{x^3}$. অর্থাৎ নিচে Power 1 বেশি হয়। তাহলে n বার $\frac{d}{dx}$ করলে নিচে থাকবে x^{n+1}.

এখন, $y = \ln(ax + b)$ এর ক্ষেত্রে $y_n = \frac{a^n.(-1)^{n-1}.(n-1)!}{(ax+b)^n}$ 1 কম

আবার, $y = \frac{1}{ax+b}$ এর ক্ষেত্রে $y_n = \frac{a^n.(-1)^n.(n)!}{(ax+b)^{n+1}}$ 1 কম

(iv) $y = e^{ax}\sin/\cos(bx + c); y_n = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n.e^{ax}.\sin/\cos\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

অপরিবর্তিত অংশ

অপরিবর্তিত

e এর Power এর x এর সহগ এবং sin/cos এর ভিতরে x এর সহগের বর্গ যোগ করে root

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও সমাধান

MCQ: বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্ন ও সমাধান

01. x এর সাপেক্ষে $e^{\sin^2 x}$ এর অন্তরজ কোনটি? [DB'22]
(a) $e^{\sin^2 x}\sin 2x$ (b) $2e^{\sin^2 x}\sin x$
(c) $-e^{\sin^2 x}\sin 2x$ (d) $e^{\sin^2 x}$
সমাধান: (a); $\frac{d}{dx}\left(e^{\sin^2 x}\right) = e^{\sin^2 x}.2\sin x.\cos x$
$= e^{\sin x^2}\sin 2x$

02. $y = ax(1-x)$ বক্ররেখাটির মূলবিন্দুতে ঢাল কত? [DB, MB'22; JB'17]
(a) $-a$ (b) a (c) $a-2ax$ (d) $a+2ax$
সমাধান: (b); $y = ax(1-x) = ax - ax^2$
$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = a - 2ax$
∴ মূলবিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $\frac{dy}{dx}|_{(0,0)} = a - 2a.0 = a$

03. $\frac{d}{dx}(\log_{10} x)$ এর মান কোনটি? [DB'22, 21; RB'19; SB'17]
(a) $\frac{1}{x}$ (b) $\frac{1}{x}\log_{10} e$
(c) $\frac{1}{x}\log_e 10$ (d) $\log_{10} e$
সমাধান: (b); $\frac{d}{dx}(\log_{10} x) = \frac{1}{x}\log_{10} e$

04. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = ?$ [DB'22]
(a) 0 (b) ∞ (c) 1 (d) -1
সমাধান: (c); আমরা জানি, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

05. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x+7}{3x^2-4x+3}$ এর মান- [DB'22; RB, Din'17]
(a) $-\frac{5}{6}$ (b) $-\frac{2}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{5}$
সমাধান: (c); $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x+7}{3x^2-4x+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}$
$= \frac{2+0+0}{3-0+0} = \frac{2}{3}$

06. $y = x^3 - 8x^2 + 7$ বক্ররেখার (1,1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ কোনটি? [RB'22; Din.B'19] [Ans: d]
(a) $13x - y + 12 = 0$ (b) $13x + y + 12 = 0$
(c) $x + 13y + 12 = 0$ (d) $x - 13y + 12 = 0$

07. $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$ [RB'22] [Ans: d]
(a) 2 (b) $\sqrt{2}$ (c) 0 (d) 1

08. মূলবিন্দুতে $y = \sin^{-1}\frac{x}{3}$ এর স্পর্শকের সমীকরণ নিচের কোনটি? [RB'22] [Ans: a]
(a) $x - 3y = 0$ (b) $x + 3y = 0$
(c) $3x + y = 0$ (d) $3x - y = 0$

09. $x^y = y^x$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$ [RB'22] [Ans: b]
(a) $\frac{x(y\ln y - y)}{y(x\ln y - x)}$ (b) $\frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}$
(c) $\frac{y(x\ln y + y)}{x(y\ln x + x)}$ (d) $\frac{x(y\ln x - y)}{y(x\ln y - x)}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+7^{n+1}}{5^n-7^n}$ এর মান নিচের কোনটি? [RB'22] [Ans: a]
(a) -7 (b) -5 (c) 5 (d) 7

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan bx}{\sin ax}$ এর মান কত? [Ctg.B'22]
(a) $\frac{a}{b}$ (b) ab (c) $\frac{b}{a}$ (d) ab^2
সমাধান: (c); $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan bx}{\sin ax} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\tan bx}{bx}}{\frac{\sin ax}{ax}} \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$

12. $\sec^{-1}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$ এর অন্তরক সহগ কত? [Ctg.B'22]
(a) $\frac{1}{(x\sqrt{x^2-1})}$ (b) $\frac{-2}{(\sqrt{1-x^2})}$ (c) $\frac{1}{(1+x^2)}$ (d) $\frac{2}{(1+x^2)}$
সমাধান: (d); $\sec^{-1}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$
$= 2\tan^{-1}x$ ∴ অন্তরক সহগ $= \frac{2}{1-x^2}$

13. $\cos(ax+b)$ এর n-তম অন্তরক সহগ কত? [Ctg.B'22]
(a) $(-1)^n a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$
(b) $a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$
(c) $\cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$
(d) $a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$
সমাধান: (d); $y = \cos(ax+b)$
$y_1 = -\sin(ax+b) \times a = -a\sin(ax+b)$
$= a\cos(\frac{\pi}{2} + ax + b)$
$y_2 = -a\cos(ax+b) \times a = -a^2\cos(ax+b)$
$= a^2\cos(\pi + ax + b)$
$y_3 = -a^2\{-\sin(ax+b)\} \times a = a^3\sin(ax+b)$
$= a^3\cos(\frac{3\pi}{2} + ax + b)$ ∴ $y_n = a^n\cos(\frac{n\pi}{2} + ax + b)$

14. $A(-1,0)$ বিন্দুটি $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ বক্ররেখার উপর হলে- [Ctg.B, SB'22]
(i) A বিন্দুতে ঢাল = 8
(ii) A বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $8x - y + 8 = 0$
(iii) A বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $x - 8y - 1 = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$
$\therefore y_1 = 3x^2 - 6x - 1; y_{1(-1,0)} = 3 + 6 - 1 = 8$
$\therefore$ ঢাল $= 8$
$\therefore$ স্পর্শক: $y - 0 = 8(x + 1) \therefore 8x - y + 8 = 0$
$\therefore$ অভিলম্ব: $y - 0 = -\frac{1}{8}(x + 1)$
$\Rightarrow 8y = -x - 1 \Rightarrow x + 8y + 1 = 0$

15. $f(x) = 5$ হলে $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = ?$ **[Ctg.B'22]**
(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) ∞
সমাধান: (b); $f(x) = 5; \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{5-5}{h} = 0$

16. $x^2 + y^2 = 20$ বৃত্তের $(2,4)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? **[Ctg.B, Din.B'22; BB'21]**
(a) $x + 2y + 10 = 0$ (b) $x + 2y = 10$
(c) $2x + y - 10 = 0$ (d) $2x - y - 10 = 0$
সমাধান: (b); $x^2 + y^2 = 20 \therefore 2x + 2yy_1 = 0$
$\Rightarrow 2 \times 2 + 2 \times 4 \times y_1 = 0 \therefore y_1 = -\frac{1}{2}$
$\therefore y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow 2y - 8 = -x + 2$
$\therefore x + 2y - 10 = 0 \therefore x + 2y = 10$

17. দূরত্ব, $S = 5t^3 - 9t^2 + 3t + 2$ হলে $t = 4$ সময় পর বেগ কত একক হবে? **[SB'22; JB'21]**
(a) 71 (b) 171 (c) 243 (d) 343
সমাধান: (b); $s = 5t^3 - 9t^2 + 3t + 2$
$\therefore v = 15t^2 - 18t + 3$
$\therefore v_{t=4} = 15 \times 4^2 - 18 \times 4 + 3 = 171$

18. $f(x) = x^2 - 2x$ ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান হওয়ার শর্ত- **[SB'22] [Ans: c]**
(a) $x > 1$ (b) $x < 2$ (c) $x < 1$ (d) $x < 2$

19. $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$ এর মান কত? **[SB'22] [Ans: d]**
(a) $\frac{1}{2}$ (b) -2 (c) 2 (d) 1

20. $\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{2x} =$ কত? **[BB'22]**
(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) $\frac{1}{2}$
সমাধান: (c); $\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = \lim_{x\to0} \frac{2e^{2x}}{2} = \lim_{x\to0} e^{2x} = 1$

21. $y = \sqrt{\sec 2x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ কোনটি? **[BB'22]**
(a) $y \tan 2x$ (b) $2 \tan 2x$
(c) $\frac{\tan 2x}{2}$ (d) $y \cot 2x$
সমাধান: (a); $y = \sqrt{\sec 2x}$
$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\sec 2x}} \sec 2x . \tan 2x \cdot 2$
$= \sqrt{\sec 2x} \cdot \tan 2x = y \tan 2x$

22. $\frac{d}{dx}\left(\cos\frac{x}{5}\right) =$ কত? **[BB'22] [Ans: c]**
(a) $-\sin\frac{x}{5}$ (b) $\sin\frac{x}{5}$
(c) $-\frac{1}{5}\sin\frac{x}{5}$ (d) $\frac{1}{5}\sin\frac{x}{5}$

23. $y = \frac{2}{3x}$ হলে, $y_3 =$ কত? **[BB'22; SB'19]**
(a) $-\frac{4}{x^4}$ (b) $\frac{4}{x^4}$ (c) $4x^4$ (d) $-4x^4$
সমাধান: (a); $y = \frac{2}{3x} = \frac{2}{3}x^{-1}$
$y_1 = \frac{2}{3}(-1)x^{-2} = -\frac{2}{3}x^{-2}$
$y_2 = \frac{-2}{3}(-2)x^{-3} = \frac{4}{3}x^{-3}$
$y_3 = \frac{4}{3}(-3)x^{-4} = -\frac{4}{x^4}$

24. $y = \sin^2 x^2$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? **[JB'22] [Ans: c]**
(a) $2\sin x^2$ (b) $2x\sin x^2$
(c) $2x\sin 2x^2$ (d) $2x^2\sin 2x^2$

25. $y = (x^2 + 1)\tan^{-1} x - x$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$ **[JB'22] [Ans: b]**
(a) $2\tan^{-1} x$ (b) $2x\tan^{-1} x$
(c) $x\tan^{-1} x$ (d) $\frac{2x}{1+x^2}$

26. $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন ক্রমবর্ধমান হবে যদি- **[JB'22; Din.B'21] [Ans: d]**
(a) $f'(a) = 0$ (b) $f'(a) < 0$
(c) $f'(a) \neq 0$ (d) $f'(a) > 0$

27. $f(x) = x(2a - x)$ এর সর্বোচ্চ মান কোনটি? **[JB'22; MB'21] [Ans: c]**
(a) a (b) 2a (c) a^2 (d) $2a^2$

28. $y^2 = x$ হলে y_1 নিচের কোনটি? **[CB'22]**
(a) 2y (b) 2x (c) $2\sqrt{x}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
সমাধান: (d); $\because y^2 = x \therefore y = \pm\sqrt{x}$
$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) \Rightarrow y_1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{x}}$

29. $y = \sin x$ হলে– **[CB'22]**
(i) $y_1 = \cos x$ (ii) $y_2 = -\sin x$
(iii) $y_3 + y_1 = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); $y = \sin x$
(i) $y = \sin x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x \therefore y_1 = \cos x$
(ii) $y_1 = \cos x \Rightarrow y_2 = -\sin x$
(iii) $y_2 = -\sin x \Rightarrow y_3 = -\cos x$
এবং $y_3 + y_1 = -\cos x + \cos x = 0$



নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x) = \ln(1-x)$ এবং $g(x) = \tan x^2$

30. $g(x)$ এর অন্তরজ কোনটি? **[CB'22]**
(a) $\sec^2 x^2$ (b) $2x \sec x^2$
(c) $2x \sec^2 x^2$ (d) $2 \tan x \sec^2 x$
সমাধান: **(c)**; $g(x) = \tan x^2 \Rightarrow g'(x)$
$= (\sec^2 x^2)\frac{d(x^2)}{dx} \therefore g'(x) = 2x \sec^2 x^2$

31. $f''(2)$ এর মান কত? **[CB'22; RB'21]**
(a) -2 (b) -1 (c) 1 (d) 2
সমাধান: **(b)**; $f(x) = \ln(1-x)$
$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x}(-1) \Rightarrow f'(x) = (-1)(-1)\frac{-1}{(1-x)^2}$
$\therefore f''(2) = \frac{-1}{(1-2)^2} = -1$

32. $\frac{d}{dx}(\log_a 2x) =$ কত? **[CB'22]**
(a) $\frac{1}{x}$ (b) $\frac{1}{x}\log_e a$ (c) $\frac{1}{x}\log_a e$ (d) $\frac{1}{2x}\log a$
সমাধান: **(c)**; $f(x) = \log_a(2x) = \frac{\ln 2x}{\ln a}$
$\therefore f'(x) = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{2x}\times 2 = \frac{1}{x}\log_a e$

33. $f(x) = 2x^2 - x + 3$ হলে– **[Din.B'22]**
(i) $(1,4)$ বিন্দুতে ফাংশনটির স্পর্শকের ঢাল 3
(ii) $x < \frac{1}{4}$ এর জন্য ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান
(iii) $x = \frac{1}{4}$ এর জন্য ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(a)**; এখানে, $y = f(x) = 2x^2 - x + 3$
$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) = 4x - 1$
(i) $(1,4)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $\frac{dy}{dx}|_{(1,4)}$
$= 4.1 - 1 = 3$
(ii) ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান হলে, $\frac{dy}{dx} < 0$
$\Rightarrow 4x - 1 < 0 \therefore x < \frac{1}{4}$
(iii) $\frac{dy}{dx} = 4x - 1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 4$
সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য $\frac{dy}{dx} = 0$
$\Rightarrow 4x - 1 = 0 \therefore x = \frac{1}{4}$
$\because \frac{d^2y}{dx^2} = 4 > 0 \therefore x = \frac{1}{4}$ এর জন্য সর্বনিম্ন মান পাওয়া যাবে।

34. $\frac{d^n}{dx^n}(\sin 2x) =?$ **[Din.B'22]**
(a) $2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 2x\right)$ (b) $\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 2x\right)$
(c) $2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} - 2x\right)$ (d) $\sin\left(\frac{n\pi}{2} - 2x\right)$
সমাধান: **(a)**; $y - \sin 2x \Rightarrow y_1 = 2\cos 2x$
$= 2\sin\left(1\cdot\frac{\pi}{2} + 2x\right)$
$\Rightarrow y_2 = 2^2(-\sin 2x) = 2^2 \sin(2\cdot\frac{\pi}{2} + 2x)$
$\Rightarrow y_3 = 2^3(-\cos 2x) = 2^3 \sin\left(3\cdot\frac{\pi}{2} + 2x\right) \dots\dots\dots y_n = 2^n \sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \frac{d^ny}{dx^n}$

35. $f(x) = x^2 + 1$ হলে **[Din.B'22]**
(i) $(1,2)$ বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল $-\frac{1}{2}$
(ii) $\int_0^1 \frac{2x}{f(x)}dx = \ln 2$
(iii) ফাংশনটির চরম বিন্দুর স্থানাংক $(0,1)$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(c)**; $y = f(x) = x^2 + 1$
$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 2$
(i) $(1,2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল,
$\frac{dy}{dx}|_{(1,2)} = f'(1) = 2.1 = 2$
$\therefore (1,2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $= -\frac{1}{\frac{dy}{dx}|_{(1,2)}} = -\frac{1}{2}$
(ii) $\int_0^1 \frac{2x}{f(x)}dx = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = [\ln|x^2+1|]_0^1$
$\left[\because \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c\right]$
$= \ln|1^2+1| - \ln|0^2+1| = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$
(iii) ফাংশনের চরম বিন্দুর জন্য $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0$
$\therefore x = 2 \therefore y = f(x) = x^2 + 1$
$\therefore f(0) = 0^2 + 1 = 1 \therefore$ চরম বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0,1)$

36. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}2x}{3x}$ এর মান কত? **[Din.B'22; Ctg.B, SB, JB'21]**
(a) 0 (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) 1
সমাধান: **(c)**; $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}2x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}$
$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}2x}{2x} = \frac{2}{3}\times 1 = \frac{2}{3}$ $\left[\because \lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x} = 1\right]$

37. $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x)$ এর মান কোনটি? **[Din.B'22]**
(a) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (b) $\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (c) $\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$
সমাধান: **(b)**; $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

38. $\lim_{x\to 0}\frac{x(\sin 2x+\sin 3x)}{\sin x}$ এর মান – [MB'22]
(a) -2 (b) -1 (c) 0 (d) 1
সমাধান: (c); $\lim_{x\to 0}\frac{x(\sin 2x+\sin 3x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin 2x}{\frac{\sin x}{x}}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin x}{x}}$
$=2\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\times\frac{5x}{2}\times\cos\frac{x}{2}\times\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$
$=2\times 1\times 0\times 1\times 1\ [\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1]=0$

39. $\frac{d}{dx}(2^x)=$ কত?
[MB'22; RB, BB, Din.B'21; DB'19; JB, Ctg.B'17]
(a) $x2^{x-1}$ (b) $x2^{x+1}$ (c) $2\ln x$ (d) $2^x\ln 2$
সমাধান: (d); $\frac{d}{dx}(2^x)=2^x\ln 2\left[\because \frac{d}{dx}(a^x)=a^x\ln a\right]$

40. $\lim_{x\to 0}\{2\ln(1+x)-\ln(1-x)\}$ এর মান – [MB'22] [Ans: a]
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) ∞

41. $\frac{d}{dx}(\ln x)$ এর যোগজ – [MB'22] [Ans: d]
(a) $-\frac{1}{x}+c$ (b) $-\ln x+c$
(c) $\frac{1}{x}+c$ (d) $\ln x+c$

42. $\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+3x+4}}$ এর মান কত? [DB'21]
(a) $-\infty$ (b) -1 (c) 1 (d) 4
সমাধান: (b); $\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+3x+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}}\ [\because x>0]=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}}$
$=\frac{-1}{\sqrt{1+0+0}}=-1$

43. $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos x}=$ কত? [DB'21]
(a) -2 (b) 0 (c) 2 (d) ∞
সমাধান: (a); $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}=2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2$

44. $\frac{d}{dx}(x^{-9})=$ কত? [DB'21]
(a) $-9x^{-8}$ (b) $-\frac{1}{9}x^{-10}$ (c) $-9x^{-10}$ (d) $-\frac{1}{8}x^{-8}$
সমাধান: (c); $\frac{d}{dx}(x^{-9})=-9x^{-9-1}=-9x^{-10}$

45. $\frac{d}{dx}\left(\cot(2\sqrt{x})\right)=$ কত? [DB'21]
(a) $\frac{-\text{cosec}^2(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ (b) $\frac{-\text{cosec}^2(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$
(c) $-\text{cosec}^2(2\sqrt{x})$ (d) $\frac{\text{cosec}^2(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$
সমাধান: (b); $\frac{d}{dx}\{\cot(2\sqrt{x})\}$
$=-\text{cosec}^2(2\sqrt{x})\times\frac{d}{dx}(2\sqrt{x})$
$=-\text{cosec}^2(2\sqrt{x})\times\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{-\text{cosec}^2(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

46. $\frac{d^{10}}{dx^{10}}(x^{10})$ এর মান কত? [RB'21]
(a) $10!$ (b) $10!.x$ (c) $10!.x^2$ (d) 0
সমাধান: (a); $y=x^{10}$; $y_1=10x^9={}^{10}P_1x^9$
$={}^{10}P_1x^{10-1}$; $y_2=10.9x^8={}^{10}P_2x^8={}^{10}P_2x^{10-2}$
এখন, $\Rightarrow y_n={}^{10}P_nx^{10-n}[n\le 10]$
$n=10$ হলে, $y_{10}={}^{10}P_{10}x^{10-10}={}^{10}P_{10}=10!$

47. $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}=?$ [RB'21]
(a) 0 (b) 1 (c) e (d) e^2
সমাধান: (c); $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}=e^{2\times\frac{1}{2}}=e$
$\left[\because \lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}+c}=e^{ab}\right]$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$y=3x(x-2)$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ।

48. বক্ররেখাটির $(2,0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল কত?
[RB, Ctg.B, JB, MB'21]
(a) -12 (b) -6 (c) 6 (d) 12
সমাধান: (c); $\frac{dy}{dx}=6x-6$
$(2,0)$ বিন্দুতে $\therefore$ ঢাল $=6.2-6=12-6=6$

49. মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? [RB'21]
(a) $y+6x=0$ (b) $y-6x=0$
(c) $x+6y=0$ (d) $x-6y=0$
সমাধান: (a); $(0,0)$ বিন্দুতে ঢাল $=6\times 0-6=-6$
$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ $y-0=-6(x-0)\Rightarrow 6x+y=0$

50. x-এর সাপেক্ষে $\ln ax$ এর অন্তরজ- [Ctg.B'21]
(a) $\frac{a}{x}$ (b) $\frac{x}{a}$ (c) $\frac{1}{x}$ (d) $\frac{1}{ax}$
সমাধান: (c); $\frac{d}{dx}(\ln ax)=\frac{1}{ax}\times a=\frac{1}{x}$

51. x-এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}3x$ এর অন্তরজ- [Ctg.B'21]
(a) $\frac{1}{1+3x^2}$ (b) $\frac{3}{1+3x^2}$ (c) $\frac{1}{1+9x^2}$ (d) $\frac{3}{1+9x^2}$
সমাধান: (d); $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}3x)=\frac{1}{1+(3x)^2}\times 3=\frac{3}{1+9x^2}$

52. $y=e^{-\frac{3}{2}x}$ হলে $\frac{dy}{dx}=$ কত? [Ctg.B, RB'21]
(a) $-\frac{3}{2}e^{-\frac{3x}{2}}$ (b) $\frac{3}{2}e^{-\frac{3x}{2}}$
(c) $\frac{2}{3}e^{-\frac{3x}{2}}$ (d) $-\frac{2}{3}e^{-\frac{3x}{2}}$
সমাধান: (a); $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{3}{2}x}\right)=\left(-\frac{3}{2}\right)e^{-\frac{3}{2}x}$

53. $y=x^2-3x+1$ বক্ররেখার $(3,1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল কত? [SB'21]
(a) 3 (b) $\frac{1}{3}$ (c) $-\frac{1}{3}$ (d) -3
সমাধান: (c); $y_1=2x-3$; $(3,1)$ বিন্দুতে,
$Y_1=2.3-3=3$ $\therefore$ স্পর্শকের ঢাল $=3$
$\therefore$ অভিলম্বের ঢাল $=-\frac{1}{3}$

54. $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ হলে- [SB'21]
(i) $x < -1$ এর জন্য $f(x)$ একটি ক্রমহ্রাসমান ফাংশন
(ii) $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান 6
(iii) $f''(0) = -2$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (সঠিক উত্তর নাই); (i) $f'(x) = -2x - 2$
শর্তমতে, ক্রমহ্রাসমান ফাংশনের ক্ষেত্রে $-2x - 2 < 0$
$\Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$ $\therefore$ (i) নং অপশনটি ভুল।
বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের জন্য, $f'(x) = -2x - 2 = 0$
$\therefore x = -1$ এখন, $f''(x) = -2 < 0; f''(-1) = -2$
এবং $f''(0) = -2$; [$\therefore$ (iii) সত্য]
বৃহত্তম মানটি, $= f(-1) = -(-1)^2 - 2(-1) + 5 = 6$
[$\therefore$ (ii) ভুল] $\therefore$ ফাংশনটির কেবল বৃহত্তম মান আছে।
$\therefore$ সঠিক উত্তর হবে (iii)

55. $y = \sin x$ হলে $y_n = ?$ [SB'21]
(a) $\cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$ (b) $\cos\left(\frac{n\pi}{2} - x\right)$
(c) $\sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$ (d) $\sin\left(\frac{n\pi}{2} - x\right)$
সমাধান: **(c)**; $y = \sin x$; $y_1 = \cos x = \sin\left(1.\frac{\pi}{2} + x\right)$
$\therefore y_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(2.\frac{\pi}{2} + x\right)$
$\therefore y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$

56. $\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{1}{x}\right) = ?$ [SB'21]
(a) $-\frac{1}{x}$ (b) $-\frac{1}{x^2}$ (c) $\frac{1}{x}$ (d) $\frac{1}{x^2}$
সমাধান: **(a)**; $\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = x.\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}$

57. $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ হলে, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ কত? [BB'21]
(a) $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$ (b) $\frac{-1}{4\sqrt{2}}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
সমাধান: **(b)**; $f(x) = \sin\frac{x}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$
$\Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}$ $\therefore f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$

58. যদি $x = a(\theta - \sin\theta)$ এবং $y = a(1 + \cos\theta)$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? [BB'21]
(a) $-\cot\frac{\theta}{2}$ (b) $-\sin\theta$
(c) $1 - \cos\theta$ (d) $-\tan\frac{\theta}{2}$
সমাধান: **(a)**; $x = a(\theta - \sin\theta)$
$\Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta)$; $y = a(1 + \cos\theta)$
$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = -a\sin\theta$
$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin\theta}{1 - \cos\theta} = -\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = -\cot\frac{\theta}{2}$

59. $f(x)$ ফাংশন $x = b$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হলে- [BB'21; JB'17] [Ans: b]
(i) $f(b)$ সংজ্ঞায়িত হয়
(ii) $\lim_{x\to b} f(x)$ বিদ্যমান থাকে না
(iii) $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$ হয়
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

60. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$ ফাংশনটি কোন ব্যবধিতে হ্রাস পায়? [BB'21]
(a) $x > 1$ (b) $x < 2$
(c) $x > 3$ (d) $2 < x < 3$
সমাধান: **(d)**; $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$
শর্তমতে, $f'(x) < 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 < 0$
$\Rightarrow (x - 3)(x - 2) < 0 \therefore 2 < x < 3$ [Jump rule]

61. $y = \ln(\ln x)$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ [JB'21; BB'19]
(a) $\frac{1}{x}$ (b) $\frac{1}{\ln(x)}$ (c) $\frac{\ln(x)}{x}$ (d) $\frac{1}{x\ln(x)}$
সমাধান: **(d)**; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln x}$

62. ক্রমবর্ধমান ফাংশনের ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক? [JB'21] [Ans: b]
(a) $\frac{dy}{dx} \geq 0$ (b) $\frac{dy}{dx} > 0$
(c) $\frac{dy}{dx} < 0$ (d) $\frac{dy}{dx} \leq 0$

63. $\frac{d}{dx}(a^{10})$ এর মান কোনটি? [JB'21]
(a) 0 (b) a^{10} (c) $10a^9$ (d) $a^{10}\ln a$
সমাধান: **(a)**; $a^{10} =$ ধ্রুবক $\therefore \frac{d}{dx}(a^{10}) = 0$

64. $\frac{d}{dx}(\cos 7x^\circ) =$ কত? [JB'21]
(a) $\sin 7x^\circ$ (b) $-7\sin 7x^\circ$
(c) $-\frac{7\pi}{180}\sin 7x^\circ$ (d) $\frac{7\pi}{180}\sin 7x^\circ$
সমাধান: **(c)**; $\frac{d}{dx}\{\cos(7x^\circ)\} = \frac{d}{dx}\left\{\cos\left(\frac{7\pi x}{180}\right)\right\}$
$= -\frac{7\pi}{180}\sin\frac{7\pi x}{180} = -\frac{7\pi}{180}\sin(7x^\circ)$

65. x এর মান কত হলে $\frac{x}{\ln x}$ এর মান ক্ষুদ্রতম হবে? [JB'21]
(a) $\frac{1}{e}$ (b) e (c) $-\frac{1}{e}$ (d) $-e$
সমাধান: **(b)**; $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\ln x}\right) = \frac{\ln x.1 - x.\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0$
$\Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow \ln x = \ln e \Rightarrow x = e$

66. $\cos\sqrt{x}$ এর অন্তরক সহগ কোনটি? [CB'21]
(a) $-\sin\sqrt{x}$ (b) $-\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (c) $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (d) $-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
সমাধান: **(d)**; $\frac{d}{dx}(\cos\sqrt{x}) = -\sin\sqrt{x}.\frac{d(\sqrt{x})}{dx}$
$= -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x) = x^2 - x$

67. ফাংশনটির কোন বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল? **[CB'21; BB'19]**
(a) $\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{4}\right)$ (b) $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{4}\right)$ (c) $\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$
সমাধান: **(c)**; শর্তমতে, $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0$
$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \therefore y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$
$\therefore$ বিন্দুটি $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

68. ফাংশনটির চরম মান কত? **[CB'21]**
(a) $-\frac{1}{4}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$
সমাধান: **(a)**; ৩৮ থেকে পাই

69. $y = \sin 2x$ হলে- **[CB'21]**
(i) $y_1 = 2\cos 2x$ (ii) $y_2 + 4y = 0$
(iii) $y_3 - 4y_1 = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(a)**; $y = \sin 2x$; $y_1 = 2\cos 2x$
$y_2 = -4\sin 2x \Rightarrow y_2 = -4y \Rightarrow y_2 + 4y = 0$
আবার, $y_3 + 4y_1 = 0$ [(iii) সত্য নয়]

70. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ এর মান কত? **[CB'21]**
(a) $2\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) 0
সমাধান: **(b)**; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x}$
$= \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{2}.\frac{\sin x}{x} = \sqrt{2}$

71. $y = x\ln x$ বক্ররেখার যে বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল তার ভুজ কত? **[Din.B'21]**
(a) e (b) −e (c) $\frac{1}{e}$ (d) $-\frac{1}{e}$
সমাধান: **(c)**; $y_1 = 1 + \ln x$ শর্তমতে, $0 = 1 + \ln x$
$\Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow \ln x = \ln\frac{1}{e}; x = \frac{1}{e}$

72. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x^\circ}$ এর মান নিচের কোনটি? **[Din.B'21; RB'19]**
(a) 0 (b) $\frac{180}{\pi}$ (c) $\frac{\pi}{180}$ (d) 1
সমাধান: **(b)**; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin\frac{\pi x}{180}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{180}{\pi} \times \frac{\frac{\pi x}{180}}{\sin\frac{\pi x}{180}} = \frac{180}{\pi}$

73. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{5x^2-6}$ = কত? **[Din.B'21]**
(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{2}{5}$ (c) $-\frac{1}{6}$ (d) 0
সমাধান: **(d)**; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(5-\frac{6}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}.\frac{2+\frac{1}{x}}{5-\frac{6}{x^2}} = 0$

74. $\frac{d^7}{dx^7}(5x^6)$ এর মান কত? **[Din.B'21]**
(a) 6! (b) 7! (c) 0 (d) 30
সমাধান: **(c)**; কেননা 6 বার differentiate করলেই ধ্রুবক পদ চলে আসবে। তাই ৭ম অন্তরজ সহগ 0।

75. $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right)$ =? **[MB'21]**
(a) $\frac{2x}{1-x^2}$ (b) $\frac{2}{1+x^2}$ (c) 2 (d) $\frac{1-x^2}{1-x^2}$
সমাধান: **(b)**; ধরি, $x = \tan\theta \therefore \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$
$= \tan 2\theta \therefore \frac{d}{dx}(\tan^{-1}\tan 2\theta) = \frac{d}{dx}(2\theta)$
$= \frac{d}{dx}(2\tan^{-1}x) = \frac{2}{1+x^2}$
Shortcut: $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{d}{dx}(2\tan^{-1}x)$
$= 2.\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$

76. $\frac{d}{dx}\left(x^{x^2}\right)$ =? **[MB'21]**
(a) $x^{x^2}2(1+\ln x)$ (b) $x^{x^2}2x(1+\ln x)$
(c) $x^{x^2}(x+2x\ln x)$ (d) $x^{x^2-1}.2x$
সমাধান: **(c)**; $x^{x^2} = y \Rightarrow \ln y = x^2\ln x$
$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x\ln x + \frac{x^2}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(2x\ln x + x)$
$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{x^2}(2x\ln x + x) = x^{x^2}(x + 2x\ln x)$

77. যদি $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ এবং $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$ হয়- **[MB'21]**
(i) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)] = l - m$
(ii) $\lim\limits_{x\to a} g(x)f(x) = ml$ (iii) $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = l/m$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: **(a)**; (iii) এর ক্ষেত্রে $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} g(x)}{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \frac{m}{l}$

78. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{2}{x}\right)$ =? **[MB'21]**
(a) ∞ (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2
সমাধান: **(d)**; $x\to\infty$ হলে, $\frac{2}{x}\to 0$ তাহলে,
$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{2}{x}\right) = \lim\limits_{\frac{2}{x}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\right).2 = 2.1 = 2$

79. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cos 3x}$ এর মান- **[DB'19]**
(a) 3 (b) 2 (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$
সমাধান: **(b)**; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cos 3x}$
$= \left(\lim\limits_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)2.\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x} = 2$

80. cos3x এর n- তম অন্তরজ সহগ- **[DB'19]**
(a) $3^n\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$ (b) $3^n\cos 3x$
(c) $3^n\sin 3x$ (d) $3^n\cos\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$
সমাধান: **(d)**; $y = \cos(ax + b)$ হলে,
$y_n = a^n\cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$ হয়।
$\therefore \cos 3x = 3^n\cos\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$

81. $y = \tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ =? **[DB'19]**
(a) $\frac{1}{1+x^2}$ (b) $-\frac{1}{1+x^2}$ (c) $\frac{1}{1+x}$ (d) $-\frac{1}{1+x}$

সমাধান: (a); $y = \tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \times \frac{(1-x)(0+1)-(1+x)(0-1)}{(1-x)^2}$

$= \frac{(1-x)^2}{2(1+x^2)} \times \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$

82. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\tan 7x}$ এর মান কত? [Ctg.B'19]

(a) 0 (b) $\frac{4}{7}$ (c) $\frac{7}{4}$ (d) ∞

সমাধান: (b); $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 4x}{4x}\times 4}{\frac{\tan 7x}{7x}\times 7} = \frac{4}{7}$

83. $y = e^{\sqrt{x}}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ = কত? [Ctg.B'19]

(a) $2e^{\sqrt{x}}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{x}}.e^{\sqrt{x}}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (d) $\frac{2\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}}$

সমাধান: (b); $\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

84. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}$ = কত? [SB'19]

(a) 0 (b) ∞ (c) m (d) $\frac{1}{m}$

সমাধান: (c); $\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x} = \lim_{mx\to 0}\frac{m\sin mx}{mx} = m$

85. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}$ এর মান কোনটি? [BB'19]

(a) a (b) 0 (c) 1 (d) $\frac{1}{a}$

সমাধান: (a); $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}.a = .1 = a$

86. $y = \frac{1}{x^2}$ হলে $(-1,\ 0)$ বিন্দুতে y_1 এর মান কত? [BB'19]

(a) 2 (b) 1 (c) −1 (d) −2

সমাধান: (a); $y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow y_1 = -2x^{-3}$

$(-1,0)$ বিন্দুতে, $y_1 = -2.(-1)^{-3} = 2$

87. যদি $f(x) = \sin x$ হয় তবে $f(\cos^{-1}x)$ এর অন্তরজ কোনটি? [BB'19]

(a) $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (c) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

সমাধান: (d); $f(\cos^{-1}x) = \sin(\cos^{-1}x)$

$= \sin(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2}$

$f'(\cos^{-1}x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

88. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$ এর মান কোনটি? [JB'19]

(a) −4 (b) 0 (c) 1 (d) 3

সমাধান: (d); $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2^2+2\times 2+4}{2+2} = 3$

89. $y = \sin\sqrt{x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? [JB'19]

(a) $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ (b) $\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ (c) $\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (d) $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

সমাধান: (a); $y_1 = \cos\sqrt{x} \times \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$= \cos\sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

90. $y = \frac{1}{x}$ হলে, y_2 এর মান- [JB'19]

(a) x^{-3} (b) x^3 (c) $2x^{-3}$ (d) $2x^3$

সমাধান: (c); $y = \frac{1}{x}$; $y_1 = -\frac{1}{x^2}$; $y_2 = 2x^{-3}$

91. নিচের কোনটি অসীম লিমিট? [CB'19; BB'17]

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{2}{5x^3}$ (b) $\lim_{x\to 0}e^{-3x}$

(c) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4^x}$ (d) $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{5x^4}$

সমাধান: (a); $\frac{2}{5\times 0} = \infty$

92. $\frac{d}{dx}\left(\cos\frac{1}{x}\right)$ এর মান কোনটি? [CB'19]

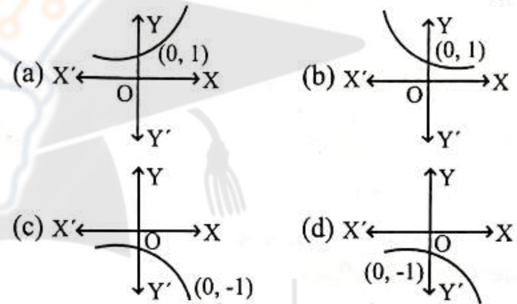
(a) $-\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (b) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(c) $-x^{-2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (d) $x^{-2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

সমাধান: (d); $\frac{d}{dx}\left(\cos\frac{1}{x}\right) = -\sin\frac{1}{x}.\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$

$= -\sin\frac{1}{x}.\left(-\frac{1}{x^2}\right) = x^{-2}\sin\frac{1}{x}$

93. $m = 1$ ও $n = -1$ হলে, $y = me^{nx}$ এর লেখচিত্র কোনটি? [CB'19]



সমাধান: (b); $y = e^{-x}$; ইহা $(0,1)$ দ্বারা সিদ্ধ। $x \to \infty$ $y \to 0$ এবং $x \to -\infty$, $y \to \infty$

94. $y = ne^{-nx}$ হলে y_3 কোনটি? [CB'19]

(a) $-n^4e^{-nx}$ (b) $-n^3e^{-nx}$

(c) n^4e^{-nx} (d) ne^{-nx}

সমাধান: (a); $y = ne^{-nx}$ $\therefore y_1 = -n^2e^{-nx}$

$\therefore y_2 = n^3e^{-nx}$ $\therefore y_3 = -n^4e^{-nx}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$X, Y \subset \mathbb{R}$ এবং $f: X \to Y$ যেখানে $f(x) = \frac{2x-3}{4x+5}$

95. $f(x)$ এর রেঞ্জ কোনটি? [Din.B'19]

(a) $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ (b) $\mathbb{R} - \{2\}$

(c) $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ (d) $\mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{4}\right\}$

সমাধান: (c); $f^{-1}(x) = \frac{5x+3}{-4x+2}$ $\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

96. $\lim_{x\to\infty}f(x)$ এর মান কত? [Din.B'19]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $-\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{3}{5}$

সমাধান: (a); $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{4x+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{4+\frac{5}{x}} = \frac{2-0}{4+0} = \frac{1}{2}$

97. $y = \tan^{-1}\frac{6x}{1-9x^2}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? [Din.B'19]

(a) $\frac{6}{1+36x^2}$ (b) $\frac{6}{1+3x^2}$ (c) $\frac{2}{1+9x^2}$ (d) $\frac{6}{1+9x^2}$

সমাধান: (d); $y = \tan^{-1}\frac{2\times 3x}{1-(3x)^2} = 2\tan^{-1}3x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2\times 3}{1+(3x)^2} = \frac{6}{1+9x^2}$

98. $y = 4e^x + e^{-x}$ এর লঘুমান কত? **[Din.B'19]**
(a) -4 (b) 3 (c) 4 (d) 5
সমাধান: (c); $y_1 = 0 \Rightarrow 4e^x - e^{-x} = 0$
$\Rightarrow 4e^x = e^{-x}$ $\therefore 4e^{2x} = 1$
$\therefore e^{2x} = \frac{1}{4}$ $\therefore e^x = \pm\frac{1}{2}$ কিন্তু $e^x \neq -\frac{1}{2}$
$\therefore e^x = \frac{1}{2}$; $y_2 = 4e^x + e^{-x} = 4 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{1/2} = 4 > 0$
$\therefore$ লঘুমান $= 4 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{1/2} = 4$

99. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5^x - 5^{-x}}{5^x + 5^{-x}}$ এর মান কোনটি? **[All.B'18]**
(a) -5 (b) -2 (c) 1 (d) 5
সমাধান: (c); $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5^x - 5^{-x}}{5^x + 5^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5^x(1-5^{-2x})}{5^x(1+5^{-2x})}$
$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-5^{-2x}}{1+5^{-2x}} = \frac{1}{1} = 1$

100. $y = e^{-x}$ হলে y_5 কোনটি? **[All.B'18]**
(a) $-e^{-x}$ (b) e^{-x} (c) $-5e^{-x}$ (d) $5e^{-x}$
সমাধান: (a); $y = e^{-x}, y_1 = -e^{-x}, y_2 = e^{-x}$
$y_3 = -e^{-x}, y_4 = e^{-x} \therefore y_5 = -e^{-x}$

101. $f(x) = \sin 2x$ হলে- **[DB'17]**
(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{2x} = 1$ (ii) $f'(x) = 2\cos 2x$
(iii) $\int f(x)\,dx = \cos 2x + c$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (a); $\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c$

102. $\frac{d}{dx}(\cos\sqrt{x})$ এর মান কোনটি? **[DB'17]**
(a) $-\sin\sqrt{x}$ (b) $-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ (c) $-\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (d) $\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
সমাধান: (b); $\frac{d}{dx}(\cos\sqrt{x}) = -\sin\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$
$= -\frac{\text{six}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

103. x-এর কোন মানের জন্য $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$ এর চরম মান পাওয়া যাবে? **[RB'17]**
(a) $-2, -3$ (b) $-2, 3$ (c) $2, -3$ (d) $2, 3$
সমাধান: (d); $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$
$f'(x) = x^2 - 5x + 6$ চরম মানের জন্য $f'(x) = 0$
$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$ $\therefore x = 2, 3$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x) = \cos x$

104. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)}{3x} =$ কত? **[Ctg.B'17]**
(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) ∞
সমাধান: (c); $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)}{3x}$
$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$

105. $f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) =$ কত? **[Ctg.B'17]**
(a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
সমাধান: (d); $f(x) = \cos x$; $f'(x) = -\sin x$
$f''(x) = -\cos x$; $f'''(x) = \sin x$
$\therefore f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

106. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3^{x+1} - 3^{-x}}{4.3^x + 3^{-x}}$ এর মান কত? **[SB'17]**
(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) 1 (d) $\propto$
সমাধান: (b); $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3^{x+1} - 3^{-x}}{4.3^x + 3^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3^x\left(3 - \frac{1}{9^x}\right)}{3^x\left(4 + \frac{1}{9^x}\right)} = \frac{3}{4}$

107. $\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\sin x + \cos x} = ?$ **[BB'17]**
(a) 1 (b) 0 (c) $2\sin 2x$ (d) $2\cos 2x$
সমাধান: (b); $\frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\sin x + \cos x} = \frac{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x}}{\sin x + \cos x}$
$= \frac{\sqrt{(\sin x + \cos x)^2}}{\sin x + \cos x} = 1 \therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\sin x + \cos x}\right) = \frac{d}{dx}(1) = 0$

108. $x^2 + x^2y + xy^2 = 0$ একটি- **[BB'17] [Ans: b]**
(a) ব্যক্ত ফাংশন (b) অব্যক্ত ফাংশন
(c) পরামিতিক ফাংশন (d) সংযোজিত ফাংশন

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x) = \ln 2x.$

109. $\int f(x)dx$ এর মান কোনটি? **[JB'17]**
(a) $\frac{1}{2x} + C$ (b) $\frac{1}{x} + C$
(c) $x\ln 2x + x + C$ (d) $x\ln 2x - x + C$
সমাধান: (d); $\int f(x)\,dx = \int \ln 2x dx$
$= \frac{1}{2}(2x\ln 2x - 2x) = x\ln 2x - x + C$

110. $3x + 4y + 1 = 0$ রেখার ঢাল কোনটি? **[JB'17]**
(a) $\frac{-4}{3}$ (b) $\frac{-3}{4}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{4}{3}$
সমাধান: (b); $4y = -3x - 1 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

111. x এর সাপেক্ষে $e^{\sin^2 x}$ এর অন্তরজ কোনটি? **[CB'17]**
(a) $e^{\sin^2 x}.\sin 2x$ (b) $2e^{\sin^2 x}.\sin 2x$
(c) $-e^{\sin^2 x}.\sin 2x$ (d) $e^{\sin^2 x}.$
সমাধান: (a); $\frac{d}{dx}(e^{\sin^2 x}) = e^{\sin^2 x}\frac{d}{dx}(\sin^2 x)$
$= e^{\sin^2 x}.2\sin x\cos x = e^{\sin^2 x}.\sin 2x$

112. (i) $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$ **[Din.B'17]**
(ii) $\int \sec^2\frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}x + C$
(iii) $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (b); (i) $\log_a x = \log_e x\,.\log_a e$
$= \ln x\,.\log_a e$; $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$
(ii) $\int \sec^2\frac{x}{2}dx = 2\tan\frac{x}{2} + c$
(iii) $\int_a^b \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^b = \ln\frac{b}{a}$

113. $\frac{d^n}{dx^n}(x^n)$ এর মান কোনটি? **[Din.B'17] [Ans: a]**
(a) $n!$ (b) x (c) 1 (d) 0

MCQ: বিভিন্ন লেখকের মূল বইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

মোঃ কেতাব উদ্দীন স্যার

01. $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}$ এর মান কোনটি?
(a) -8 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 8
সমাধান: **(b)**; $\lim_{x\to0}\frac{-(1-\cos 2.\frac{x}{2})}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}\times4}$
$=-\frac{2}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2}\times1=-\frac{1}{2}$

02. নিচের কোনটি সত্য? **[Ans: d]**
(a) $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^n$
(b) $y=\frac{|x|}{x}$ ফাংশনটি $x=0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন
(c) $y=f(x)$ বক্ররেখার (x_1,y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y=f'(x)(x-x_1)$
(d) যদি $f(x)$ ফাংশন $[a,b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হয় এবং $]a,b[$ খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য হয়, তবে অন্ততপক্ষে একটি বিন্দু $c\in]a,b[$ এর জন্য $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

03. $f(x)=3x^2-6x+4$ এর সন্ধিবিন্দু কোনটি?
(a) $(-1,1)$ (b) $(1,-1)$
(c) $(-1,-1)$ (d) $(1,1)$
সমাধান: **(d)**; $f(x)=3x^2-6x+4\Rightarrow f'(x)$
$=6x-6\therefore f'(x)=0\Rightarrow6x-6=0\therefore x=1$
$\therefore f(x)=3(1)^2-6(1)+4=7-6=1$
$\therefore(x,y)\equiv(1,1)$

04. $\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)^2}{x}=?$
(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2
সমাধান: **(b)**; $\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)^2}{(4x^2)}\times4x=1\times4\times0=0$

05. $\frac{d}{dx}(x^x)=?$
(a) x^{x-1} (b) $x\times x^{x-1}$
(c) $x\ln x$ (d) $x^x(1+\ln x)$
সমাধান: **(d)**; $y=x^x\Rightarrow\ln y=\ln x^x=x\ln x$
$\Rightarrow\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=x\times\frac{1}{x}+\ln x\times1\Rightarrow\frac{dy}{dx}=y(1+\ln x)$
$=x^x(1+\ln x)$

06. $x+\frac{1}{x}$ এর গুরুমান কোনটি?
(a) -2 (b) -1 (c) 1 (d) 2
সমাধান: **(a)**; $y=x+\frac{1}{x}\Rightarrow y_1=1-\frac{1}{x^2}$
$\therefore1-\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow\frac{1}{x^2}=1\therefore x=\pm1$
$y_2=\frac{2}{x^3}\therefore y_2(-1)=-2\to x=-1$ এর জন্য গুরুমান
$\therefore y_2(1)=2\to x=1$ এর জন্য লঘুমান বিদ্যমান।
$\therefore y(-1)=x+\frac{1}{x}=-1-\frac{1}{1}=-2$

07. $y=x^3-5x$ হলে $\frac{d^3y}{dx^3}$ এর মান কোনটি?
(a) $3x^2$ (b) $6x$ (c) 6 (d) -5
সমাধান: **(c)**; $y=x^3-5x\Rightarrow\frac{dy}{dx}=3x^2-5$
$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=6x\Rightarrow\frac{d^3y}{dx^3}=6$

08. x এর কোন ধনাত্মক মানের জন্য $y=x+x^{-1}$ রেখাটির ঢাল শূন্য হবে?
(a) 2 (b) 1 (c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{1}{2}$
সমাধান: **(b)**; $y=x+\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{x^2}$
$\therefore$ যেহেতু ঢাল $=0\therefore\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow1-\frac{1}{x^2}=0$
$\Rightarrow x^2=1\therefore x=\pm1,\therefore x=1$[$\because$ x এর মান ধনাত্মক]

এস ইউ আহাম্মদ স্যার

09. $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x},(a>1)$ এর মান–
(a) 0 (b) 1 (c) $\ln a$ (d) $-\ln a$
সমাধান: **(c)**; $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{a^x\ln a-0}{1}$
$=\frac{a^{\circ}\ln a-0}{1}=\ln a$ [L' Hospital's Rule]

10. $\lim_{x\to0}\frac{\cos5x-\cos x}{x^2}$ এর মান কত?
(a) 12 (b) -12 (c) 6 (d) -6
সমাধান: **(b)**; $\lim_{x\to0}\frac{\cos5x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin3x-\sin(-2x)}{x^2}$
$=-2\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin3x}{3x}\right)\times3\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin2x}{2x}\right)\times2=-12$

11. x এর প্রেক্ষিতে $\ln(1+e^x)$ এর অন্তরজ কোনটি?
(a) $\frac{1}{1+e^x}$ (b) $\frac{e^x}{1+e^x}$ (c) $\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ (d) $\frac{1}{1+e^{2x}}$
সমাধান: **(b)**; $\frac{d}{dx}\{\ln(1+e^x)\}=\frac{1}{1+e^x}\times e^x=\frac{e^x}{1+e^x}$

12. $y=\cot^{-1}\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ হলে, $\frac{dy}{dx}=$ কত?
(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{2}\sec^2x$
সমাধান: **(a)**; $y=\cot^{-1}\sqrt{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}}=\cot^{-1}\left(\cot\frac{x}{2}\right)$
$=\frac{x}{2}\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$

13. $y=e^{x+3}$ হলে, $x=2$ এর জন্য $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত হবে?
(a) 5 (b) e^5 (c) 4 (d) e^3
সমাধান: **(b)**; $y=e^{x+3}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=e^{x+3}$
$\therefore x=2$ এর জন্য, $\frac{dy}{dx}=e^5$

14. $y = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x}$ হলে, $x = 2$ এর জন্য $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত হবে?

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{10}$ (c) $\frac{2}{5}$ (d) $\frac{3}{5}$

সমাধান: **(b)**; $y = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x} = y = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-(\sqrt{x})^2}$

$= \tan^{-1}\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta$

$= 2\tan^{-1}\sqrt{x} \therefore \frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{1}{1+x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$

$= \frac{1}{\sqrt{4}(1+4)} = \frac{1}{5\times 2} = \frac{1}{10}$

15. $y = \sin x + \cos x$ হলে, $\frac{d^3y}{dx^3} =$ কত?

(a) $\sin x + \cos x$ (b) $-\sin x - \cos x$

(c) $-\cos x + \sin x$ (d) $\cos x - \sin x$

সমাধান: **(c)**; $y = \sin x + \cos x$

$\Rightarrow y_1 = \cos x - \sin x \Rightarrow y_2 = -\sin x - \cos x$

$\Rightarrow y_3 = -\cos x + \sin x$

16. $y = x^x$ হলে, $x = 2$ এর জন্য $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত হবে?

(a) $4(\ln 2 + 1)$ (b) $\ln 2 + 1$

(c) $\ln 2 + 4$ (d) 4

সমাধান: **(a)**; $y = x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \times x + \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^x(1 + \ln x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2^2(1 + \ln 2) = 4(1 + \ln 2)$

17. $f(x) = \frac{a}{x} + b$ হলে-

(i) $f'(x) = \frac{-a}{x^2}$ (ii) $f''(x) = \frac{-2a}{x^3}$

(iii) $f'''(x) = \frac{-6a}{x^4}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: **(c)**; $f(x) = \frac{a}{x} + b \Rightarrow f'(x) = \frac{-a}{x^2}$

$\Rightarrow f''(x) = \frac{2a}{x^3} \Rightarrow f'''(x) = \frac{(2)(-3)a}{x^4} = \frac{-6a}{x^4}$

18. $y = \sin(ax + b)$ হলে, y_n এর মান কত? **[Ans: a]**

(a) $a^n\sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$

(b) $a^n\cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right); h(x) = \frac{1+x}{1-x}$

(c) $(-1)^n a^n\sin(ax + b)$

(d) $(-1)^n a^n\cos(ax + b)$

19. x এর মান কত হলে, $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ এর মান ক্ষুদ্রতম হবে?

(a) $-\frac{1}{e}$ (b) $\frac{1}{e}$ (c) $-e$ (d) e

সমাধান: **(d)**; $f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{\ln x \times 1 - x \times \frac{1}{x}}{\{\ln(x)\}^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \ln(x) - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1$

$\therefore x = e$

20. $f(x) = 2^{-4x}$ হলে, $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ এর মান কত হবে? **[Ans: a]**

(a) $-4 \times 2^{-4x}\log_e 2$ (b) $4 \times 2^{-4x}\log_e 2$

(c) $2^{-4x}\log_e 2$ (d) $-4x.2^{-4x-1}$

21. $y = x^{-\frac{1}{x}}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত?

(a) $x^{-2+\frac{1}{x}}\ln(x - 1)$ (b) $\frac{1}{x^{2+\frac{1}{x}}}(\ln x - 1)$

(c) $\frac{1}{x^{2+\frac{1}{x}}}(1 - \ln x)$ (d) $x^{-2+\frac{1}{x}}(1 - \ln x)$

সমাধান: **(b)**; $\text{in}\, y = -\frac{1}{x}\ln x \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\left\{\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right\}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left\{-\frac{1}{x^2}\right\}(1 - \ln x)$

$= \left(x^{-\frac{1}{x}}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)(1 - \ln x) = \frac{1}{x^{2+\frac{1}{x}}}(\ln x - 1)$

22. $\cos 3x$ এর n তম অন্তরক সহগ হবে– **[Ans: d]**

(a) $3^n\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$ (b) $3^n\cos\left(\frac{n\pi}{2} - 3x\right)$

(c) $3^n\sin\left(\frac{n\pi}{2} - 3x\right)$ (d) $3^n\cos\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$

23. $e^{xy+1} = 5$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান নিচের কোনটি?

(a) $\frac{\ln 5}{xy}$ (b) $\frac{\ln 5}{-x^2}$ (c) $-\frac{y}{x}$ (d) $\frac{\ln 5}{y}$

সমাধান: **(c)**; $xy + 1 = \ln 5 \Rightarrow xy = \ln 5 - 1$

$\Rightarrow x.\frac{dy}{dx} + y.1 = 0 \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

24. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}$ এর মান কোনটি?

(a) 3 (b) $\frac{3}{2}$ (c) 9 (d) $\frac{9}{2}$

সমাধান: **(d)**; $\lim_{x\to 3}\frac{(x^2+3x+9)}{(x+3)} = \frac{3^2+3.3+9}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$

25. $\lim_{x\to 0}(1 + kx)^{\frac{1}{x}}$ এর মান কোনটি?

(a) $\log_k x$ (b) $\ln(kx)$ (c) a^k (d) e^k

সমাধান: **(d)**; $\lim_{x\to 0}(1 + kx)^{\frac{1}{kx}\times k} = e^k$

26. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ এর মান কত?

(a) $-\infty$ (b) ∞ (c) e (d) $\frac{1}{e}$

সমাধান: **(d)**; $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left\{\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\right\}}$

$[\because e^{\ln(x)} = x] = e^{\left\{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right\}} = e^{\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}}\right\}}$

এখন, $= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{x}\frac{1}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$ [L'HÔPITAL RULES]

$= \lim_{x\to\infty} -\frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = -1 \therefore e^{-1} = \frac{1}{e}$

27. $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ এর মান– **[Ans: d]**

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) e

28. $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\tan 7x}$ এর মান–
(a) $\frac{5}{7}$ (b) $\frac{7}{5}$ (c) 0 (d) $\frac{25}{7}$
সমাধান: (a); $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\tan 7x}$
$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\times5\lim_{x\to0}\frac{7x}{\sin 7x}\times\frac{1}{7}\times\lim_{x\to0}\cos 7x=\frac{5}{7}$

29. $y=\sqrt{\sec x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ কোনটি?
(a) $\frac{y\tan x}{2}$ (b) $\frac{\tan x}{2}$ (c) $\cot x$ (d) $\frac{\cot x}{2}$
সমাধান: (a); $y=\sqrt{\sec x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}$
$=\frac{1}{2\sqrt{\sec x}}\times\sec x\tan x=\frac{1}{2}\times\sqrt{\sec x}\tan x=\frac{y\tan x}{2}$

30. $y=10^{\log(\sin x)}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি?
(a) $10^{\log(\sin x)}\log_e 10\cot x$
(b) $10^{\log(\sin x)}\log_e 10\sin x$
(c) $10^{\log(\sin x)}\log_e 10$
(d) None
সমাধান: (d); $y=10^{\log(\sin x)}\Rightarrow y=\sin x$
$\therefore\frac{dy}{dx}=\cos x$

31. $\frac{d}{dx}(\ln\sqrt{x})$ এর মান কোনটি?
(a) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (b) $\frac{1}{2x}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}$ (d) $2\sqrt{x}$
সমাধান: (b); $\frac{d}{dx}(\ln\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2x}$

32. $y=\frac{1}{x}$ হলে, y এর 20 তম অন্তরীকরণ কত?
(a) $\frac{20!}{x^{20}}$ (b) $\frac{20!}{x^{21}}$ (c) $\frac{21!}{x^{21}}$ (d) None
সমাধান: (b); $y=\frac{1}{x}\Rightarrow y_1=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow y_2=\frac{(-1)(-2)}{x^3}$
$\Rightarrow y_3=\frac{(-1)(-2)(-3)}{x^4}\therefore y_{20}=\frac{(-1)^{20}20!}{x^{21}}$

33. $y=x^2(1-x)$ এর সর্বোচ্চ মান কত?
(a) $\frac{1}{27}$ (b) $\frac{2}{27}$ (c) $\frac{4}{27}$ (d) None
সমাধান: (c); $y=x^2(1-x)=x^2-x^3$
$\therefore y_1=2x-3x^2=0\Rightarrow x(2-3x)=0\therefore x=0,\frac{2}{3}$
$y_2=2-6x, x=0$ হলে, $y_2=2, x=\frac{2}{3}$ হলে,
$y_2=2-6\times\frac{2}{3}=-2 x=\frac{2}{3}$ এর জন্য সর্বোচ্চ মান পাওয়া যাবে।
$\therefore y_{max}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}$

34. $f(\theta)=\cos\theta+\sin\theta$ হলে, θ এর কোন মানের জন্য $f'(\theta)=0$ হবে?
(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}$
সমাধান: (d); $f(\theta)=\cos\theta+\sin\theta$
$\Rightarrow f'(\theta)=-\sin\theta+\cos\theta=0\Rightarrow\cos\theta=\sin\theta$
$\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$
$\therefore\theta=\frac{\pi}{2}-\theta\Rightarrow2\theta=\frac{\pi}{2}\therefore\theta=\frac{\pi}{4}$

35. $\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x-\sin x}{\sin 6x}=?$
(a) $\frac{7}{6}$ (b) $-\frac{7}{6}$ (c) 1 (d) −1
সমাধান: (c); $\lim_{x\to0}\frac{2\sin 3x.\cos 4x}{2\sin 3x.\cos 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos(0)}{\cos(0)}=1$

36. যদি $y=\sqrt{\cos 2x}$ হয়, $\frac{dy}{dx}$ কত?
(a) $\frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$ (b) $\frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$ (c) $\frac{2\sin x}{\sqrt{\tan x}}$ (d) $\frac{\tan 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$
সমাধান: (a); $\frac{d}{dx}(\sqrt{\cos 2x})$
$=\frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}\times(-\sin 2x)\times2=\frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

37. $y=\sin^{-1}[\sin(x+1)]$ হলে, $\frac{dy}{dx}=?$ **[Ans: c]**
(a) $\cos^{-1}[\sin(x+1)]$ (b) $\cos(x+1)$
(c) 1 (d) $\cos^{-1}[\cos(x+1)]$

38. x এর কোন মানের জন্য $y=x+\frac{1}{x}$ বক্ররেখাটির ঢাল শূন্য হবে? **[Ans: c]**
(a) ±2 (b) 1 (c) ±1 (d) $\pm\frac{3}{2}$

39. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{x}$ এর মান কত? **[Ans: a]**
(a) 3 (b) 1 (c) $\frac{1}{3}$ (d) 0

অসীম কুমার সাহা স্যার

40. $\lim_{x\to\infty}\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}$ এর মান নিচের কোনটি?
(a) −a (b) −1 (c) 1 (d) a
সমাধান: (c); $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{a^x}{a^x}+\frac{a^{-x}}{a^x}}{\frac{a^x}{a^x}-\frac{a^{-x}}{a^x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{a^{2x}}}{1-\frac{1}{a^{2x}}}=\frac{1+0}{1-0}=1$

41. $\lim_{x\to0}\frac{5^x-1}{x}$ এর মান নিচের কোনটি?
(a) 1 (b) 5 (c) ln 5 (d) e^5
সমাধান: (c); $\lim_{x\to0}\frac{5^x\ln5-0}{1}=5^0\ln5=\ln5$
[L'HÔPITAL RULES]

42. $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n-1)!}{(2n)!+(2n-1)!}$ এর মান নিচের কোনটি?
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) ∞
সমাধান: (d); $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)!+(2n-1)!}{2n(2n-1)!+(2n-1)!}=$
$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!\{(2n+1)(2n)+1\}}{(2n-1)!(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(2n+\frac{1}{2n+1}\right)=\infty$

43. $\frac{d}{dx}(\tan x^{-1})$ এর মান কত?
(a) $x^{-1}\sec^2 x$ (b) $x^{-2}\sec^2 x^{-1}$
(c) $-x^{-2}\sec^2 x^{-1}$ (d) $-x^2\sec^2 x^{-1}$
সমাধান: (c); $\frac{d}{dx}(\tan x^{-1})=(\sec^2 x^{-1})\left(-\frac{1}{x^2}\right)$
$=-x^{-2}\sec^2 x^{-1}$

44. $y = \tan^{-1}(\sin e^x)$ হলে $\frac{dy}{dx} =$ কত?
(a) $\frac{\cos e^x}{1+\sin^2 e^x}$ (b) $-\frac{\cos e^x}{1+\sin^2 e^x}$
(c) $\frac{e^x \cos e^x}{1+\sin^2 e^x}$ (d) $-\frac{e^x \cos e^x}{1+\sin^2 e^x}$
সমাধান: (c); $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\sin^2 e^x} \times \cos e^x \times e^x$

45. $f(x) = x^{n-1}$ হলে $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$ এর মান নিচের কোনটি?
(a) 0 (b) 1 (c) $(n-1)!$ (d) $n!$
সমাধান: (a); $\because \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) = (n-1)! \therefore \frac{d^n}{dx^n} f(x) = 0$

46. $y = x^{100}$ এর 31 তম অন্তরজ নিচের কোনটি?
(a) $(100)!\, x^{31}$ (b) $(100)!\, x^{69}$
(c) $\frac{100!}{31!} x^{31}$ (d) $\frac{100!}{69!} x^{69}$
সমাধান: (d); $y = x^{100}$
$\Rightarrow y_n = {}^{100}P_n \times x^{100-n} [n \le 100]$
$\Rightarrow y_{31} = {}^{100}P_{31} \times x^{100-31} = \frac{100!}{69!} \times x^{69}$

47. $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1-\cos\theta)$ হলে–
(i) $\frac{dy}{dx} = \cot\frac{\theta}{2}$ (ii) $\frac{dx}{dy} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$
(iii) $\theta = \frac{\pi}{2}$ হলে $\frac{dy}{dx} = 1$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); $\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta) \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$
$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{a.2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}{a.2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2}, \frac{dx}{dy} = \frac{a(1-\cos\theta)}{a\sin\theta}$
$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cot\frac{\theta}{2} = \cot\frac{\pi}{4} = 1$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x) = ax^2 + bx + c$ এবং $f_{max} = 9$ যখন $x = 1$.

48. $f(x)$ ফাংশনটির জন্য নিচের কোনটি সঠিক নয়?
(a) মূল দুইটি
(b) শুধুমাত্র সর্বোচ্চ মান আছে
(c) সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন উভয়ই বিদ্যমান
(d) a মান ঋণাত্মক
সমাধান: (c); $f'(x) = 2ax + b = 0$ হলে,
$\therefore x = -\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow 2a = -b, f''(x) = 2a, f(x)$ এর সর্বোচ্চ মান থাকবে যদি $f''(x)$ ঋণাত্মক হয়।
$\therefore$ 2a এর মান ঋণাত্মক।

49. $f(0) = 6$ হলে ফাংশনটি নিচের কোনটি?
(a) $-x^2 + 6x + 6$ (b) $-3x^2 + 6x + 6$
(c) $-6x^2 + 3x + 6$ (d) $-x^2 + 9x + 6$
সমাধান: (b); $\therefore 2a = -b$ এবং a ঋণাত্মক।

50. যদি $y = kx(2x + \sqrt{3})$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে তাহলে k এর মান হবে-
(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) 2
সমাধান: (a); $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}k + 4kx = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
[(0, 0) বিন্দুতে], $\sqrt{3}k + 4k \times 0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \therefore k = \frac{1}{3}$

মো: রফিকুল ইসলাম স্যার

51. $y = f(x) = x^2 \sin x$ হলে-
(i) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
(ii) $\ln y = 2\ln x + \ln(\sin x)$
(iii) $\frac{dy}{dx} = 2x\cos x$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

52. $y = \ln 3x, x > 0$ হলে-
(i) $x = \frac{1}{3}e^y$ (ii) $y_1 = \frac{1}{x}$ (iii) $\lim_{x\to\frac{1}{3}} y = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); (i) $3x = e^y \Rightarrow x = \frac{1}{3}e^y$
(ii) $y_1 = \frac{1}{3x} \times 3 = \frac{1}{x}$
(iii) $\lim_{x\to\frac{1}{3}} \ln 3x = \ln\left(3 \times \frac{1}{3}\right) = |n| = 0$

53. $f(x) = e^{5x}, g(x) = \ln x$ হলে-
(i) $f'(x) = 5e^{5x}$ (ii) $g''(x) = \frac{1}{x^2}$
(iii) $\frac{d}{dx}\{gof(x)\} = 5$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (c); $f'(x) = 5e^{5x}, g'(x) = \frac{1}{x}$
$\Rightarrow g''(x) = -\frac{1}{x^2}, gof(x) = \ln(e^{5x}) = 5x$
$\Rightarrow \frac{d}{dx}(gof(x)) = 5$

54. $\phi(x) = e^x$ হলে, $\lim_{x\to 0} \frac{\phi(3x)-1}{x}$ এর মান কোনটি?
(a) 0 (b) 1 (c) 3 (d) ∞
সমাধান: (c); $\lim_{x\to 0} \frac{\phi(3x)-1}{x} = \lim_{3x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{3.x} \times 3 = 3$

55. $\lim_{x\to 0} (\sec x)^x =$ কোনটি? **[Ans: d]**
(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) অসংজ্ঞায়িত

56. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\}=?$

(a) 1 (b) 3 (c) 2 (d) −1

সমাধান: **(a);** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{1+1}=\frac{2}{2}=1$

57. $\lim\limits_{x\to a}\frac{|x-a|}{x-a}=?$ **[Ans: d]**

(a) 1 (b) −1 (c) অসংজ্ঞায়িত (d) ±1

58. $y=\ln\cos x^\circ$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ কত?

(a) $\tan x^\circ$ (b) $-\tan x^\circ$

(c) $\frac{\pi}{180}\tan x^\circ$ (d) $-\frac{\pi}{180}\tan x^\circ$

সমাধান: **(d);** $y=\ln\cos\frac{\pi x}{180}\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{180}}$

$\times\left(-\sin\frac{\pi x}{180}\right)\times\frac{\pi}{180}=-\frac{\pi}{180}\tan\frac{\pi x}{180}=-\frac{\pi}{180}\tan x^0$

59. $f(x)=\ln(1+3x)$ হলে, $f'(0)=$ কোনটি?

(a) 2 (b) 3 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{3}$

সমাধান: **(b);** $f'(x)=\frac{1}{1+3x}\times 3=\frac{3}{1+0}=3$

60. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{2(x+h)}-e^{2x}}{h}=?$ **[Ans: d]**

(a) e^x (b) e^{2x} (c) $\frac{1}{2}e^{2x}$ (d) $2e^{2x}$

61. $f(x)=x^3$ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(x)}{h}$ এর মান কত হবে? **[Ans: d]**

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 12

62. যদি $y=\sin^{-1}(\sin x)$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ হবে- **[Ans: d]**

(a) $\sin x$ (b) $\cos x$ (c) x (d) 1

63. $y=x^{\ln x}$ হলে $\frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ এর মান কত?

(a) $\frac{2\ln x}{x}$ (b) $\frac{y}{x}(2\ln x)$ (c) $2\ln x$ (d) $2y\ln x$

সমাধান: **(c);** $y=x^{\ln x}\Rightarrow\ln y=\ln(x^{\ln x})\Rightarrow\ln y=\ln x\times\ln x\Rightarrow\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=2\ln x\times\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=2\ln x$

64. যদি $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots\ldots\ldots}}}$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান-

(a) $\frac{1}{1-2y}$ (b) $\frac{1}{2y-1}$ (c) $\frac{1}{1-4y}$ (d) $\frac{1}{4y-1}$

সমাধান: **(b);** $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots\ldots\ldots}}}$

$\Rightarrow y=\sqrt{x+y}\Rightarrow y^2=x+y\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow\frac{dy}{dx}(2y-1)=1\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y-1}$

65. $\frac{dy}{dx}=0$ সমীকরণটির সমাধান- **[Ans: a]**

(a) x- অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা

(b) y- অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা

(c) একটি বৃত্ত নির্দেশ করে

(d) সমাধান নেই

66. বৃত্তের পরিধি বৃদ্ধির হার এর ব্যাসার্ধ বৃদ্ধির হারের কত গুণ?

(a) π (b) 2π (c) π/2 (d) 3π

সমাধান: **(b);** $\frac{d}{dt}(2\pi r)=2\pi\frac{dr}{dt}$

67. একটি গোলাকার বলের আয়তনের বৃদ্ধির হার তার ব্যাসার্ধ r এর বৃদ্ধির হারের কতগুণ?

(a) 4 (b) 2πr (c) $4\pi r^2$ (d) $\frac{4}{3}\pi r^2$

সমাধান: **(c);** $\frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi}{3}r^3\right)=\frac{4\pi}{3}\times 3r^2\frac{dr}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$

68. একটি গোলাকার বুদবুদের ব্যাসার্ধ বৃদ্ধির হার 0.2mm/sec যখন ব্যাসার্ধ 7mm তখন ঐ গোলকের আয়তন বৃদ্ধির হার হলো-

(a) 0.123 cc/sec (b) 0.132 cc/sec

(c) 1.012 cc/sec (d) 1.201 cc/sec

সমাধান: **(a);** $\frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi}{3}r^3\right)=\frac{4\pi}{3}\times 3r^2\frac{dr}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$

$=4\pi\times(0.7)^2\times\frac{0.2}{10}=0.12315$ cc/sec

69. যদি কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ সমহারে বৃদ্ধি পায়, তবে তার ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির হার ব্যাসার্ধের- **[Ans: a]**

(a) সমানুপাতিক (b) ব্যস্তানুপাতিক

(c) সমান (d) কোনোটিই নয়

70. $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ ধারাটির বিস্তৃতি কি?

(a) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\ldots\ldots$

(b) $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\ldots\ldots$

(c) $1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\ldots\ldots$

(d) $-x-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}-\ldots\ldots\ldots$

সমাধান: **(b);** $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\frac{1}{2}\left[\left\{1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots\right\}-\left\{1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots\right\}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\left(2\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\ldots\ldots\right)\right]\right.$

$=\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\ldots\ldots\right)$

71. তাপ প্রয়োগের ফলে ধাতুর তৈরি একটি বৃত্তাকার থালার ব্যাসার্ধ প্রতি সেকেন্ডে 0.25 সে.মি. বাড়ে। যখন থালাটির ব্যাসার্ধ 7 সে.মি. তখন থালার ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির হার কত?

(a) 49 cm^2 (b) 11 cm^2 (c) $\frac{7}{2}cm^2$ (d) 9 cm^2

সমাধান: **(b);** $\frac{d}{dt}(\pi r^2)=2\pi r\frac{dr}{dt}$

$=2\pi\times 7\times 0.25=11\ cm^2$

72. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$ এর মান কত?

(a) 0 (b) 1 (c) e (d) $\frac{1}{e}$

সমাধান: **(a);** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}1/e^x=\frac{1}{\infty}=0$

[L'HÔPITAL RULES]

73. যদি $k > 0$ হয়, তবে $\lim_{x \to 0} x^{x^k}$ এর মান কত?
(a) 0 (b) 1 (c) ∞ (d) কোনোটিই নয়
সমাধান: (b); $y = \lim_{x\to0} e^{\ln x^{x^k}} \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to0} x^k \ln x$
$= \lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^k}} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-kx^{-k-1}}$ [L'HÔPITAL RULES]
$= \lim_{x\to0} -\frac{1}{k}x^k = -\frac{1}{k}\times 0 = 0$
$\therefore \ln y = 0 \therefore y = e^0 = 1$

এ.টি.এস.এম. মাসুদুল হাকিম স্যার

74. $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\tan^{-1}(3x)} = ?$
(a) 0 (b) $\frac{1}{3}$ (c) 1 (d) 3
সমাধান: (b); $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\tan^{-1}3x} = \lim_{x\to0}\frac{\cos x}{\frac{1}{1+9x^2}\times3}$
$= \frac{\cos 0}{\frac{1}{1+9\times0}\times3} = \frac{1}{3}$

75. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}$ এর মান কত?
(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) $-\frac{1}{2}$ (d) 0
সমাধান: (d); $\lim_{x\to0}\frac{0+\sin x}{1}$ [L'HÔPITAL RULES]
$= \lim_{x\to0}\frac{0}{1} = 0$

76. $\lim_{x\to0}\frac{\sec(x+h)-\sec x}{h}$ এর মান কত? **[Ans: d]**
(a) $\sec^2 x$ (b) $\tan x$
(c) $\sec x \operatorname{cosec} x$ (d) $\sec x \tan x$

77. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}$ = কত?
(a) $\frac{1}{e}$ (b) e (c) e^2 (d) 1
সমাধান: (b); $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^3$
$= e \times 1 = e$

78. $\lim_{y\to0}(1+xy)^{\frac{1}{y}}$ = কত?
(a) e (b) e^{-x} (c) e^x (d) $\ln x$
সমাধান: (c); $\lim_{y\to0}(1+xy)^{\frac{1}{xy}\times x} = e^x$

79. $y = a^x + 100a$ যেখানে $a > 0$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ = কত?
(a) $a^x \ln a$ (b) $a^x \ln a + 100^a \ln 100$
(c) a^x (d) None of them
সমাধান: (a); $y = a^x + 100a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a^x \ln a + 0$

80. $\log_{\sin x}\sin^2 x$ এর অন্তরক সহগ কোনটি?
(a) 2 (b) $(\sin x)^{\sin^2 x - 1}$
(c) $2(\sin x)^{\cos^2 x - 1}$ (d) 0
সমাধান: (d); $y = \log_{\sin x}\sin^2 x$
$= 2\log_{\sin x}\sin x = 2\times1 \therefore \frac{dy}{dx} = 0$

81. $x = 0$ বিন্দুতে $y = x + e^x$ এর লেখচিত্রের স্পর্শকের সমীকরণ হবে কোনটি?
(a) $y = x$ (b) $y = x + 1$
(c) $y = 2x + 1$ (d) $y = 2x$
সমাধান: (c); $(0, 1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,
$(y-1) = \frac{dy}{dx}(x-0)$
$\Rightarrow y - 1 = (1+e^0)x \Rightarrow (y-1) = 2x$
$\Rightarrow y = 2x + 1$

MCQ: সম্ভাব্য নমুনা প্রশ্ন ও সমাধান

01. কোন ধ্রুবককে চলক x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করলে কী পাওয়া যায়? **[Ans: a]**
(a) শূন্য (b) অসীম
(c) এক (d) অনির্দিষ্ট ধ্রুবক

02. কোনো ফাংশনের অন্তরীকরণ প্রকৃতপক্ষে কী নির্দেশ করে? **[Ans: a]**
(a) ঢাল (b) ক্ষেত্রফল (c) সরলরেখা (d) আয়তন

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x = 2\sec t, y = 3\cos t$

03. $\frac{dx}{dt} = ?$
(a) $2x\sec t$ (b) $2x\tan t$
(c) $2xy$ (d) $2x\sin t$
সমাধান: (b); $\frac{dx}{dt} = 2\sec t.\tan t = 2x\tan t$

04. $\frac{dy}{dx} = ?$
(a) y^2 (b) $\frac{1}{2}x^2y$ (c) $\frac{-1}{6}y^2$ (d) xy^2
সমাধান: (c); $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3\sin t}{2\sec t.\tan t} = \frac{-3\cos t}{2\sec t}$
$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{2}\cos^2 t = \frac{-1}{6}y^2$

05. $\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{7}{2}}-a^{\frac{7}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}}$ = কত?
(a) $\frac{7}{2}a^2$ (b) $\frac{7}{3}a^2$
(c) $7a^{\frac{5}{2}}$ (d) $\frac{7}{2}a^{5/2}$
সমাধান: (b); $\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{7}{2}}-a^{\frac{7}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\sqrt{x}\to\sqrt{a}}\frac{(\sqrt{x})^7-(\sqrt{a})^7}{(\sqrt{x})^3-(\sqrt{a})^3}$
$= \lim_{y\to b}\frac{y^7-b^7}{y^3-b^3}$; $[\sqrt{x} = y, \sqrt{a} = b]$
$= \frac{\frac{d}{db}(b^7)}{\frac{d}{db}(b^3)} = \frac{7b^6}{3b^2} = \frac{7}{3}b^4 = \frac{7}{3}(\sqrt{a})^4 = \frac{7}{3}a^2$

06. $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = ?$

(a) e (b) $\frac{1}{e}$ (c) $\sqrt{e}$ (d) e^2

সমাধান: (c); $\lim_{x\to 0}\sqrt{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}} = \sqrt{\lim_{\frac{2}{x}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2}{x}}\right)^{\frac{2}{x}}} = \sqrt{e}$

07. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x) = ?$

(a) $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) 0

(c) $-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) 2

সমাধান: (b); $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

08. $y = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x}$ হলে, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=4}$ এর মান-

(a) $\frac{1}{10}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{20}$ (d) $\frac{2}{5}$

সমাধান: (a); $\tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x} = 2\tan^{-1}\sqrt{x}$; $\frac{dy}{dx}$

$= 2\times\frac{1}{1+x}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$

09. $\frac{d}{dx}\{e^{-x}.\sin x\} = ?$

(a) $e^{-x}(\sin x-\cos x)$ (b) $e^{-x}(\cos x-\sin x)$

(c) $-e^{-x}(\sin x+\cos x)$ (d) $e^{-x}(\sin x+\cos x)$

সমাধান: (b); $\frac{d}{dx}(e^{-x}\sin(x)) = e^{-x}(\cos x-\sin x)$

10. $\frac{d}{dx}(\sec\sqrt{x})$ এর মান নিচের কোনটি? [Ans: d]

(a) $\sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}$ (b) $\sec\sqrt{x}+\tan\sqrt{x}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{x}}\sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}$

11. $x^2+xy+y^2=1$ বক্ররেখাটির $\frac{dy}{dx}$ নিচের কোনটি?

(a) $\frac{x+2y}{2x+y}$ (b) $\frac{2x+y}{x+2y}$ (c) $\frac{-2x-y}{x+2y}$ (d) $\frac{-x-2y}{2x+y}$

সমাধান: (c); $\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}} = \frac{-2x-y}{x+2y}$

12. $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = x^2-3x+1$ এর সর্বনিম্ন মান কত?

(a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) 1 (d) $-\frac{5}{4}$

সমাধান: (d); $f(x) = x^2-3x+1$

$f'(x) = 2x-3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ এবং $f''\left(-\frac{5}{4}\right) > 0$

$\therefore f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{4}$ $\therefore -\frac{5}{4}$ হল সর্বনিম্ন মান।

13. $y = x^2$ এবং $z = x^3$ হলে $\frac{dz}{dy}$ নিচের কোনটি?

(a) $\frac{3}{2}x$ (b) $\frac{3}{2x}$ (c) $3x^2$ (d) $6x^3$

সমাধান: (a); $\frac{dZ}{dy} = \frac{\frac{dZ}{dx}}{\frac{dy}{dx}} = \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}x$

14. $y = \log_x a$ হলে y_1 কোনটি?

(a) $\frac{\ln a}{x(\ln x)^2}$ (b) $-\frac{\ln a}{x(\ln x)^2}$ (c) $\frac{1}{x}$ (d) $\frac{1}{x}\log a^e$

সমাধান: (b); $y = \log_x a = \ln a\times\frac{1}{\ln x}$

$Y_1 = \ln a\times\frac{d}{d(\ln(x))}\left(\frac{1}{\ln x}\right)\times\frac{d}{dx}(\ln x)$

$= -\ln a\times\left(\frac{1}{\ln x}\right)^2\times\frac{1}{x}$

15. $y = 10^{\ln(\sin x)}$ এর $\frac{dy}{dx}$—

(a) $y\cot x\ln 10$ (b) $\cot x\ln 10$

(c) $\sin x\ln 10$ (d) $\ln 10$

সমাধান: (a); $y = 10^{\ln(\sin x)} \Rightarrow \ln y = (\ln\sin x)\ln 10$

$\Rightarrow\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln 10\frac{1}{\sin x}.\cos x = \cot x\ln 10$

$\therefore\frac{dy}{dx} = y\cot x\ln 10$

16. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ এর মান—

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{4}$

সমাধান: (a); L'HÔPITAL RULES থেকে পাই,

$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{1} = -\frac{1}{2}$

17. $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}\right) = ?$

(a) $\frac{2}{(1+x^2)^2}$ (b) $\frac{2}{1+x^2}$

(c) $\frac{2x}{1+x^2}$ (d) $\cos^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

সমাধান: (b); $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x$

18. $x^y = e^{x+y}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ = কোনটি?

(a) $\frac{x-y}{x(\ln x-1)}$ (b) $\frac{x-y}{x(1-\ln x)}$ (c) $\frac{y-x}{x(\ln x-1)}$ (d) $\frac{x-y}{(\ln x-1)}$

সমাধান: (a); $x^y = e^{x+y} \Rightarrow y\ln x = x+y$

$\Rightarrow\frac{y}{x}+\frac{dy}{dx}\ln x = 1+\frac{dy}{dx} \Rightarrow\frac{dy}{dx} = \frac{1-\frac{y}{x}}{\ln x-1} = \frac{x-y}{x(\ln x-1)}$

19. $y = ax(1+x)$ হলে –

(i) $\frac{dy}{dx} = a+2ax$

(ii) মূলবিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 3a$

(iii) মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y = ax$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (b); $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ax+ax^2) = a+2ax$

$\therefore$ মূল বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = a$

মূল বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y = ax$

20. $\ln(1-x)$ এর অন্তরজ কত? [Ans: b]

(a) $\frac{1}{1-x}$ (b) $\frac{-1}{1-x}$ (c) $\frac{1}{(1-x)^2}$ (d) $\frac{-1}{(1-x)^2}$

21. $y = \tan x$ হলে y_2 = কত? [Ans: b]

(a) $\sec x\tan x$ (b) $2\sec^2x\tan x$

(c) $2\text{sce}\,x\tan^2x$ (d) $\sec^2x\tan x$

22. নিচের কোন অপেক্ষকটির চরম মান নেই? [Ans: b]
(a) $y = \sin x$ (b) $y = e^x$
(c) $f(x) = \cos x$ (d) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$

23. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$ এর মান নিচের কোনটি? [Ans: c]
(a) 0 (b) 1 (c) −2 (d) ∞

24. $\frac{d}{dy}(y) = ?$ [Ans: b]
(a) 0 (b) 1 (c) y (d) y^2

25. যদি $x^n + y^n = a^n$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর সঠিক মান নিচের কোনটি?
(a) $\left(\frac{x}{y}\right)^n$ (b) $\left(-\frac{x}{y}\right)^n$ (c) $-\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$ (d) $\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$
সমাধান: (c); $\frac{-\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}} = -\left(\frac{nx^{n-1}}{ny^{n-1}}\right) = -\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$

26. x এর সাপেক্ষে $\cos^2(3x)$ এর অন্তরজ নিচের কোনটি? [Ans: d]
(a) $\sin 6x$ (b) $6\cos 3x$
(c) $2\sin 3x$ (d) $-3\sin 6x$

27. $y = 4e^x + 9e^{-x}$ এর লঘুমান কোনটি? [Ans: b]
(a) 5 (b) 12 (c) 13 (d) 16

28. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{x}$ এর সঠিক মান নিচের কোনটি? [Ans: a]
(a) 0 (b) 4 (c) 5 (d) ∞

29. $\frac{d}{dx}\{\sin^{-1}(\sin\sqrt{x})\} = ?$ [Ans: b]
(a) $\frac{1}{1+\sin^2\sqrt{x}}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (d) $\frac{1}{1+\cos^2\sqrt{x}}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$$f(x) = \sin x$$

30. $\lim_{x \to 0} \frac{f(x^2)}{x}$ এর মান কত? [Ans: b]
(a) −1 (b) 0 (c) 1 (d) ∞

31. $\frac{d}{dx}\{\ln(\sqrt{x})\}$ এর অন্তরক কত? [Ans: c]
(a) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (b) $\frac{1}{x}$ (c) $\frac{1}{2x}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}$

32. $y = x^{-\frac{1}{x}}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত?
(a) $x^{-2+\frac{1}{x}}(\ln x - 1)$ (b) $\frac{1}{x^{2+\frac{1}{x}}}(\ln x - 1)$
(c) $\frac{1}{x^{2+\frac{1}{x}}}(1 - \ln x)$ (d) $x^{-2+\frac{1}{x}}(1 - \ln x)$
সমাধান: (b); $y = x^{-\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = -\frac{1}{x}\ln x$
$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{-x \cdot \frac{1}{x} + \ln x}{x^2} = \frac{\ln x - 1}{x^2} = \frac{dy}{dx} = \frac{(\ln x - 1)}{x^{2+\frac{1}{x}}}$

33. ফাংশনের লঘুমান ও গুরুমানের জন্য- [Ans: b]
(i) $f'(x) = 0$ (ii) $f''(x) = 0$ (iii) $\frac{dy}{dx} = 0$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

34. $\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ এর সর্বোচ্চ মান কোনটি?
(a) 1 (b) $\frac{2}{e}$ (c) e (d) $\frac{1}{e}$
সমাধান: (d); $\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{-\ln x+1}{x^2} = 0 \therefore \ln x = 1$
$\therefore x = e \therefore \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{e}$

35. ৫৫। $y = x^{\ln x}$ হলে, $\frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) =$ কত?
(a) $\frac{2\ln(x)}{x}$ (b) $\frac{y}{x}(2\ln x)$ (c) $2\ln x$ (d) $2y\ln x$
সমাধান: (c); $y = x^{\ln x}$; $\ln y = (\ln x)^2$
$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{x}{y}\frac{dx}{dy} = 2\ln x$

36. $y = x^3 + 2$ সমীকরণের ক্ষেত্রে $\frac{d^3y}{dx^3} =$ কত? [Ans: d]
(a) 6x (b) $3x^2$ (c) 2 (d) 6

37. $y = \ln b$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [b-একটি ধ্রুবক]
(a) $\frac{1}{b}$ (b) b (c) 0 (d) 1
সমাধান: (c); $\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln b)}{db} \times \frac{db}{dx} = \frac{1}{b} \times \frac{db}{dx} = 0$

38. $y = \sin x + \cos x$ হলে $\frac{d^3y}{dx^3}$ কত? [Ans: c]
(a) $\sin x + \cos x$ (b) $-\sin x - \cos x$
(c) $-\cos x + \sin x$ (d) $\cos x - \sin x$

39. $y = \sin(ax+b)$ হলে y_n এর মান কত?
(a) $a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$
(b) $a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$
(c) $(-1)^n . a^n \sin(ax+b)$
(d) $(-1)^n . a^n \cos(ax+b)$
সমাধান: (a); $y = \sin(ax+b)$
$y_1 = a\sin\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right)$
$y_2 = a^2\sin\left(ax+b+\frac{2\pi}{2}\right)$
$y_3 = a^3\sin\left(ax+b+\frac{3\pi}{2}\right)$
$y_4 = a^4\sin\left(ax+b+\frac{4\pi}{2}\right)$
$y_n = a^n\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$

40. x এর মান কত হলে $x(12-2x)^2$ এর গুরুমান পাওয়া যাবে?
(a) 6 (b) 2 (c) 12 (d) −2
সমাধান: (b); $(12-2x)^2 - 4x(12-2x) = 0$
$\Rightarrow x = 2, 6$
2nd derivative নিয়ে, $\frac{d^2y}{dx^2}$
$= -4(12-2x) - 48 + 16x = 24x - 84$
$x = 2$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = -36 < 0 \therefore x = 2$ এর জন্য গুরুমান পাওয়া যাবে।

41. $y = \frac{1}{x+a}$ হলে y_n এর মান কত? [Ans: b]

(a) $\frac{(-1)^n n!}{x+a}$ (b) $\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$
(c) $(x+a)^{n+1} n!$ (d) $(-1)^n (x+a)^{n+1} n!$

42. $s = 6 + 4t - t^2$ হলে 2 sec পর ত্বরণ- [Ans: d]

(a) $4ms^{-2}$ (b) $-4ms^{-2}$
(c) $2ms^{-2}$ (d) $-2ms^{-2}$

43. $\cos^2 2x$ এর অন্তরক সহগ— [Ans: c]

(a) $2\cos2x\sin2x$ (b) $2\sin 4x$
(c) $-2\sin 4x$ (d) $-\sin 4x$

44. $y = \sqrt{\sin 3x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ = কত?

(a) $\frac{\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{\sin 3x}}$ (c) $\frac{3\cos 3x}{\sqrt{\sin 3x}}$ (d) $\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$

সমাধান: (d); $y = \sqrt{\sin 3x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\sin 3x}}.3\cos 3x$

45. $\frac{d}{dx}(2^{3x}) = ?$ [Ans: c]

(a) 32^{3x} (b) $2^{3x}\ln 2$
(c) $3.2^{3x}\ln 2$ (d) $3x.2^{3x-1}$

46. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 3x}{2x^2}$ = কত?

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{9}{4}$ (d) $\frac{4}{9}$

সমাধান: (c); L'HÔPITAL LAW

47. $y = \sin(\cos x)$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$ [Ans: c]

(a) $\cos x.\cos(\sin x)$ (b) $\cos x.\sin(\cos x)$
(c) $-\sin x.\cos(\cos x)$ (d) $\cos(\sin x)$

48. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ্য কর: [Ans: b]

(i) $\frac{d}{dx}(\cos x) = \sin x$

(ii) $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ হলে $\frac{f(x)+1}{f(x)-1} = 2x$

(iii) অবিচ্ছিন্নতার শর্ত $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

49. f(x) একটি ফাংশন এবং a একটি নির্দিষ্ট অশূন্য সংখ্যা হলে রূপান্তরিত ফাংশন- [Ans: d]

(i) $f(x) + a$ (ii) $f(x - a)$ (iii) $f(ax)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

50. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = ?$ [Ans: a]

(a) $\log_e a$ (b) $a^x \log_e a$
(c) $\frac{1}{\log_e a}$ (d) $\frac{a}{\log_e a}$

51. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ হলে- [Ans: a]

(i) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ (ii) $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

(iii) $x = 0$ তে $f(x)$ সংজ্ঞায়িত

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

52. $f(x) = \sin x$ ফাংশনটি কোন বিন্দুতে ক্রমবর্ধমান?

(a) $x = \frac{\pi}{4}$ (b) $x = \frac{\pi}{2}$ (c) π (d) $\frac{5\pi}{4}$

সমাধান: (a); $f'(x) = \cos x$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; f'(\pi) = -1 < 0, f'\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} < 0$

53. $\cos 3x$ এর n তম অন্তরক সহগ হবে- [Ans: d]

(a) $3^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$ (b) $3^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} - 3x\right)$
(c) $3^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} - 3x\right)$ (d) $3^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = e^x$

54. $\frac{d}{dx}\{xf(x)\} = ?$ [Ans: c]

(a) e^x (b) xe^x
(c) $xe^x + e^x$ (d) $xe^x + x$

55. $\frac{d}{dx}(x^x)^x = ?$

(a) $x^{x^2}.x\{1 + 2\ln x\}$ (b) $x^2 x^{x^2-1}$
(c) $x^{x^2+1}(1 + \ln x)$ (d) $x(1 + 2\ln x)$

সমাধান: (a); $y = (x^x)^x = x^{x^2} \Rightarrow \ln y = x^2 \ln x$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x + 2x\ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{x^2}.x\{1 + 2\ln x\}$

56. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 7x - \cos 9x}{\cos 3x - \cos 5x}$ এর মান কত?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) 2 (d) 0

সমাধান: (c); L' Hôpital's law →

$\lim_{x\to 0} \frac{-7\sin 7x + 9\sin 9x}{-3\sin 3x + 5\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{-49\cos 7x + 81\cos 9x}{-9\cos 3x + 25\cos 5x} = 2$

সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

◆ **CQ:** বিগত বছরসমূহের বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান:

01. $\mathbf{f(x) = e^x}$. [DB'22]

(ক) $\mathbf{f'(x)\log 2x\, f(2x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 2

(খ) মূল নিয়মে $\mathbf{x}$ এর সাপেক্ষে $\mathbf{f(mx)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 4

(গ) $\mathbf{y = f(\sec^{-1} x)}$ হলে দেখাও যে, $\mathbf{x^2(x^2-1)y_2 + x(2x^2-1)y_1 - y = 0}$. 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $f(x) = e^x \therefore f'(x) = e^x$ এখন, $\frac{d}{dx}\{f'(x)\log(2x)f(2x)\} = \frac{d}{dx}\{e^x.\log(2x).e^{2x}\}$

$= \frac{d}{dx}\{e^{3x}.\log(2x)\} = e^{3x}.\frac{d}{dx}(\log 2x) + \log(2x)\frac{d}{dx}(e^{3x}) = e^{3x}.\frac{1}{2x}.2 + \log(2x).3e^{3x}$

$\frac{d}{dx}\{f'(x)\log(2x)f(2x)\} = e^{3x}\left[\log(2x) + \frac{1}{x}\right]$

[নোট: এখানে log বলতে natuaral logarithm কে বুঝানো হয়েছে]

খ. ধরি, $g(x) = f(mx) = e^{mx}$; $g(x+h) = e^{m(x+h)} = e^{mx+mh}$

মূল নিয়মের সূত্রানুসারে, $\frac{d}{dx}\{g(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\{f(mx)\} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{mx+mh}-e^{mx}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{mx}.e^{mh}-e^{mx}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{mx}(e^{mh}-1)}{h} = e^{mx}\lim_{h\to 0}\frac{e^{mh}-1}{h}$

$= e^{mx}.\lim_{h\to 0}\frac{\left(1+\frac{mh}{1!}+\frac{m^2h^2}{2!}+\frac{m^3h^3}{3!}+\dots\dots\right)-1}{h}$ ……………….

$= e^{mx}.\lim_{h\to 0}[\frac{m}{1!}+\frac{m^2h}{2!}+\frac{m^3h^2}{3!}+$ ……… h এর উচ্চতর ঘাতসমূহ]

$= e^{mx}\left[\frac{m}{1!}+0\right] \therefore \frac{d}{dx}\{f(mx)\} = me^{mx}$ **(Ans.)**

গ. এখানে, $y = f(\sec^{-1}x) \Rightarrow y = e^{\sec^{-1}x}$

$\Rightarrow y_1 = e^{\sec^{-1}x}.\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $[\because \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}]$

$\Rightarrow x\sqrt{x^2-1}.y_1 = y \Rightarrow x^2(x^2-1)y_1^2 = y^2$

$\Rightarrow x^2(x^2-1).2y_1y_2 + \frac{d}{dx}(x^4-x^2).y_1^2 = 2y.y_1$ [উভয়পক্ষকে $\frac{d}{dx}$ করে পাই]

$\Rightarrow x^2(x^2-1).2y_1y_2 + (4x^3-2x)y_1^2 = 2yy_1 \Rightarrow x^2(x^2-1).2y_1y_2 + 2x(2x^2-1).y_1^2 = 2yy_1$

$\Rightarrow x^2(x^2-1)y_2 + x(2x^2-1)y_1 = y$ [উভয়পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore x^2(x^2-1)y_2 + x(2x^2-1)y_1 - y = 0$ (দেখানো হলো)

02. দৃশ্যকল্প-১: $\mathbf{f(x) = \sin x}$ [DB'22]

দৃশ্যকল্প-২: $\mathbf{g(x) = e^x}$.

(ক) $\mathbf{\underset{x\to 0}{Lt}\frac{g(\sin x)-1}{f(x)}}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x \therefore g(x) = e^x = \underset{x\to 0}{Lt}\frac{g(\sin x)-1}{f(x)} = \underset{x\to 0}{Lt}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\left[\frac{0}{0}\right]$

$= \underset{x\to 0}{Lt}\frac{e^{\sin x}.\cos x}{\cos x}$[L'HÔPITAL RULE]$= \underset{x\to 0}{Lt}e^{\sin x} = e^{\circ} = 1$ **(Ans.)**

03. $\mathbf{h(x) = \cos 3x}$ [RB'22]

$\mathbf{u = \tan^{-1} 2x}$

(ক) মান নির্ণয় কর: $\mathbf{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}}$. 2

(খ) মূল নিয়মে $\mathbf{h(x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 4

(গ) $\mathbf{\ln y = u}$ হলে উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\mathbf{\sec^2 u.y_2 + 2y_1(2\tan u - 1) = 0}$. 4

সমাধান

ক. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{3x}{2}}{\frac{9}{4}x^2}\times\frac{9}{4}=2\times\frac{9}{4}\lim_{x0}\frac{\sin^2\frac{3x}{2}}{\left(\frac{3x}{2}\right)^2}=\frac{9}{2}\times\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)^2=\frac{9}{2}\times1^2=\frac{9}{2}$ **(Ans.)**

খ. কোনো ফাংশন $y=f(x)$ হলে, $\frac{d}{dx}\{f(x)\}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

এখানে, $h(x)=\cos 3x$; $h(x+\Delta x)=\cos\{3(x+\Delta x)\}=\cos(3x+3\Delta x)$

$\frac{d}{dx}\{h(x)\}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\cos(3x+3\Delta x)-\cos(3x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{2\sin\frac{3x+3\Delta x+3x}{2}\sin\frac{3x-3x-3\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right)\sin\left(-\frac{3\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}=-\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sin\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right)\sin\left(-\frac{3\Delta x}{2}\right)}{\frac{3\Delta x}{2}}\times3$

$=-3\lim_{\Delta x\to0}\sin\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right).\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{3\Delta x}{2}}{\frac{3\Delta x}{2}}=-3\sin(3x+0).1\therefore\frac{d}{dx}\{h(x)\}=-3\sin 3x$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $u=\tan^{-1}2x\Rightarrow\tan u=2x\therefore x=\frac{\tan u}{2}$; $\ln y=u=\tan^{-1}2x\Rightarrow\frac{d}{dx}(\ln y)=\frac{d}{dx}(\tan^{-1}2x)$

$\Rightarrow\frac{1}{y}.y_1=\frac{1}{1+(2x)^2}.2\Rightarrow y_1(1+4x^2)=2y\Rightarrow y_1.\frac{d}{dx}(1+4x^2)+\frac{dy_1}{dx}.(1+4x^2)=2.\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow y_1.8x+y_2(1+4x^2)=2y_1\Rightarrow y_2(1+4x^2)+8xy_1-2y_1=0$

$\Rightarrow y_2(1+4x^2)+2y_1(4x-1)=0\Rightarrow y_2\{1+(2x)^2\}+2y_1(2.2x-1)=0$

$\Rightarrow y_2(1+\tan^2u)+2y_1(2\tan u-1)=0\Rightarrow\sec^2u.y_2+2y_1(2\tan u-1)=0$ (প্রমাণিত)

04. (ক) **x এর যে মানগুলোর জন্য $f(x)=x+\frac{4}{x}$ ফাংশনের চরমমান বিদ্যমান তা নির্ণয় কর।** **[RB'22]**

সমাধান

ক. $f(x)=x+\frac{4}{x}$; $f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x+\frac{4}{x}\right)=1-\frac{4}{x^2}$

চরম মানের জন্য, $f'(x)=0\Rightarrow1-\frac{4}{x^2}=0\Rightarrow\frac{4}{x^2}=1\Rightarrow x^2=4\therefore x=\pm2$ **(Ans.)**

05. $\mathbf{x=\cos\alpha}$ **[Ctg.B'22]**

$\mathbf{f(x)=2x}$

(ক) **t এর সাপেক্ষে $\frac{1+\sin t}{\sin t}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।** 2

(খ) **$y=\sin(a\alpha)$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+a^2y=0$.** 4

(গ) **দেখাও যে, $f(x)+\frac{1}{f(x)}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।** 4

সমাধান

ক. $\frac{1+\sin t}{\sin t}=\operatorname{cosec}t+1\therefore\frac{d}{dt}\left(\frac{1+\sin t}{\sin t}\right)=\frac{d}{dt}(\operatorname{cosec}t+1)=-\operatorname{cosec}t\cot t$

খ. $y=\sin(a\cos^{-1}x)\Rightarrow y_1=\cos(a\cos^{-1}x)\,a\times\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow y_1^2=\cos^2(a\cos^{-1}x)\frac{a^2}{1-x^2}\Rightarrow y_1^2(1-x^2)=a^2\cos^2(a\cos^{-1}x)$

$\Rightarrow 2y_1y_2(1-x^2)+y_1^2(-2x)=a^2 2\cos(a\cos^{-1}x)\{-\sin(a\cos^{-1}x)\}\frac{-a}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow 2y_1y_2(1-x^2)-2xy_1^2=2a^2y_1(-y)\Rightarrow 2y_1y_2(1-x^2)-2xy_1^2+2a^2y_1y=0$

$\therefore(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+a^2y=0$ [$2y_1$ দ্বারা ভাগ] **(Proved)**

গ. ধরি, $y=f(x)+\frac{1}{f(x)}=2x+\frac{1}{2x}$; $y_1=2+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2-\frac{1}{2x^2}\therefore y_2=-\frac{1}{2}(-2)x^{-2-1}=\frac{1}{x^3}$

For maximum, minimum, $y_1=0\therefore2-\frac{1}{2x^2}=0\Rightarrow\frac{1}{2x^2}=2\Rightarrow\frac{1}{x^2}=4\therefore x=\pm\frac{1}{2}$

for, $x=\frac{1}{2}, y_2=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=8\therefore$ Minimum $=2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times\frac{1}{2}}=2$

For, $x=-\frac{1}{2}, y_2=-8\therefore$ Maximum $=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}=-2$

∴ গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

06. বক্ররেখার সমীকরণ: $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$ এবং $P(x) = 2x + 5$. [Ctg.B'22]

(ক) $y = x^{e^{3x}}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) বক্ররেখাটির $(1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $y = x^{e^{3x}} \Rightarrow \ln y = e^{3x}\ln x \Rightarrow \frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx} = 3e^{3x}\ln x + e^{3x}\frac{1}{x} \therefore \frac{dy}{dx} = x^{e^{3x}}\left(3e^{3x}\ln x + \frac{e^{3x}}{x}\right)$ (Ans.)

খ. $f(x,y) = x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 + x\times 2yy_1 + y^2 - 6x + 4 + 5y_1 = 0$

$\Rightarrow 3\times(1)^2 + 2\times(1)\times(-1)\times y_1 - 6\times 1 + 4 + 5y_1 = 0 \therefore y_1 = -\frac{1}{3}$

$\therefore$ স্পর্শক: $y - (-1) = -\frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow 3y + 3 = -x + 1 \therefore x + 3y + 2 = 0$

$\therefore$ অভিলম্ব: $y + 1 = 3(x-1) \Rightarrow y + 1 = 3x - 3 \therefore 3x - y - 4 = 0$ (Ans.)

07. (i) $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$. [SB'22]

(ii) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 30$.

(ক) $f(x) = \ln x$ হলে $f'(x)$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক (i) থেকে প্রমাণ কর যে, $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$. 4

(গ) $f(x)$ এর চরম মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $f(x) = \ln x \therefore f'(x) = \frac{1}{x}$

খ. $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x) \Rightarrow y_1 = -a\sin(\ln x)\frac{1}{x} + b\cos(\ln x)\frac{1}{x}$

$\Rightarrow xy_1 = -a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x) \Rightarrow xy_2 + y_1 = -a\cos(\ln x)\frac{1}{x} - b\sin(\ln x)\frac{1}{x}$

$\Rightarrow x^2y_2 + xy_1 = -\{a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)\} \therefore x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ (Proved)

গ. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 30 \therefore f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \therefore f''(x) = 12x - 6$

$f'(x) = 0$[for minimum or maximum value] $\therefore 6x^2 - 6x - 12 = 0$ $\boxed{x = 2, -1}$

$f''(2) = 18 > 0; \therefore$ minimum value, $f(2) = 10$; $f''(-1) = -18 < 0 \therefore$ maximum value, $f(-1) = 37$

08. দৃশ্যকল্প-১: $y = a\cot(\ln x)$ [BB'22]

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

(ক) $7\cos^{-1}x$ কে x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে, $x^2y_2 + xy_1 = 2y\text{cosec}^2(\ln x)$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর ফাংশনটির লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\frac{d}{dx}(7\cos^{-1}x) = 7\cos^{-1}x\cdot\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = 7\cos^{-1}x\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{7\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ (Ans.)

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $y = a\cot(\ln x) \Rightarrow y_1 = a\,\text{cosec}^2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$

$\Rightarrow xy_1 = a[1 + \cot^2(\ln x)] \Rightarrow xy_1 = a + a\cot^2(\ln x)$

$\Rightarrow xy_2 + y_1\cdot 1 = 0 + 2a\cot(\ln x)\cdot\text{cosec}^2(\ln x).\frac{1}{x}$ [উভয়পক্ষে x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নিয়ে]

$\Rightarrow x(xy_2 + y_1) = 2a\cot(\ln x)\cdot\text{cosec}^2(\ln x) \therefore x^2y_2 + xy_1 = 2y\,\text{cosec}^2(\ln x)$ (Showed)

গ. 07 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

09. দৃশ্যকল্প-১: $\varphi(x) = \frac{x\cos x}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$; দৃশ্যকল্প-২: $f(x,y) = x^3 - 2xy - y^3 - 3$. [BB'22]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে $\varphi(x)$ কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে $f(x,y) = 0$ বক্ররেখার $(1,1)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $\phi(x) = \frac{x\cos x}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{x\cos x}{1-\sin x}$, এখন, $\frac{d\phi}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x\cos x}{1-\sin x}\right) = \frac{(1-\sin x)\frac{d}{dx}(x\cos x) - x\cos x\cdot\frac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2}$

$\frac{d\phi}{dx} = \frac{(1-\sin x)(-x\sin x+\cos x) - x\cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{(1-\sin x)(\cos x - x\sin x) + x\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$

$= \frac{(1-\sin x)(\cos x - x\sin x) + x(1-\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{(\cos x - x\sin x) + (x + x\sin x)}{1-\sin x} = \frac{\cos x + x}{1-\sin x}$ **(Ans.)**

গ. $f(x,y) = 0$ হলে, দৃশ্যকল্প-২ হতে পাই, $x^3 - 2xy - y^3 - 3 = 0$

এখন, $f(1,1) = 1^3 - 2\cdot1\cdot1 - 1^3 - 3 = 1 - 2 - 1 - 3 = -5$

$\therefore f(1,1) \neq 0$ অর্থাৎ, $(1,1)$ বিন্দুটি বক্ররেখার উপরে অবস্থান করেনা। সুতরাং $(1,1)$ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক নেই।

সমীকরণটিকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $3x^2 - 2\left[x\cdot\frac{dy}{dx} + y\cdot1\right] - 3y^2\cdot\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 2x\frac{dy}{dx} - 2y - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 3y^2\frac{dy}{dx} + 2x\cdot\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2y \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-2y}{2x+3y^2}$

এখন, বক্ররেখাটির $(1,1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)} = \frac{3\cdot1^2 - 2\cdot1}{2\cdot1+3\cdot1^2} = \frac{1}{5}$

$\therefore (1,1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $(y-1) = m(x-1) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{5}(x-1) \therefore x - 5y + 4 = 0$

$(1,1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ, $(y-1) = -\frac{1}{m}(x-1)$ $\left[\because M_T\cdot M_N = -1 \text{ or } M_N = -\frac{1}{M_T}\right]$

10. $g(x) = x^3 - 3xy + y^3 - 15$; $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + 5$. [JB'22]

(ক) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক হতে $g(x) = 0$ বক্ররেখাটির $(2,1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপক হতে $f(x)$ ফাংশনের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে,$= \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}$ $\left[\frac{0}{0}, \text{form}\right]$

L' HÔPITAL ব্যবহার করে পাই, $= \lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{2\sqrt{1+2x}} - \frac{(-3)}{2\sqrt{1-3x}}}{1} = \lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+2x}} + \frac{3}{2\sqrt{1-3x}} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

খ. **06 নং প্রশ্নের (b) এর অনুরূপ।**

গ. **07 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।**

11. দৃশ্যকল্প-২: $g(t) = e^{a\cos^{-1}(2t)}$ [JB'22]

(ক) $y = 3x(1+x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের ঢালের মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-২ এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $(1-4x^2)g''(x) - 4xg'(x) - 4a^2g(x) = 0$. 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $y = 3x(1+x)$; $\frac{dy}{dx} = 3 + 3\times2x = 3 + 6x$

মূলবিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $\frac{dy}{dx} = 3$ $\therefore$ মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $y = 3x \Rightarrow 3x - y = 0$

$\therefore$ মূলবিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ: $-x - 3y = 0 \Rightarrow x + 3y = 0$

$\therefore y = 3x(1+x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের মান, $m = \frac{-1}{3}$

বিকল্প পদ্ধতি: মূলবিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $m_1 = 3$

ধরি, মূল বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল $= m_2$ $\therefore m_1m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{-1}{3}$ $\therefore$ মূলবিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের ঢালের মান $\frac{-1}{3}$

গ. দৃশ্যকল্প-২: $g(t) = e^{a\cos^{-1}(2t)}$; $g(x) = e^{a\cos^{-1}(2x)}$

$\Rightarrow g'(x) = e^{a\cos^{-1}(2x)} \times a \times \frac{-1}{\sqrt{1-4x^2}} \times 2 \Rightarrow \sqrt{1-4x^2}g'(x) = -2ae^{a\cos^{-1}(2x)}$

$\Rightarrow g'(x) \times \frac{(-8x)}{2\sqrt{1-4x^2}} + g''(x)\sqrt{1-4x^2} = -2a \cdot e^{a\cos^{-1}(2x)} \times \frac{-2a}{\sqrt{1-4x^2}}$

$\Rightarrow -4xg'(x) + g''(x)(1-4x^2) = 4a^2e^{a\cos^{-1}(2x)}$ [$\sqrt{1-4x^2}$ দ্বারা গুণ করে পাই]

$\Rightarrow (1-4x^2)g''(x) - 4a^2g(x) - 4xg'(x) = 0$ $[e^{a\cos^{-1}(2x)} = g(x)]$ [প্রমাণিত]

12. $h(x) = \cos x$ এবং $p(x) = (x^2+1)\tan^{-1}x - x$ **[CB'22]**

(ক) x-এর সাপেক্ষে $p(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $\lim_{x\to 0}\frac{h(0)-2h(x)+h(2x)}{x^2} = -1$ 4

(গ) $\sqrt{3}h\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + 3h(x)$ এর চরম মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 05 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $\lim_{x\to 0}\frac{h(0)-2h(x)+h(2x)}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x - 2\cos x}{x^2}$ | $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x(\cos x - 1)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x(-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x\to 0} -4\cos x \times \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} \times \frac{1}{4}$

$= -4 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{4} = -1$ **(Proved)**

গ. 07 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

13. $g(x) = x$ এবং $y = x + \frac{1}{x}$ **[CB'22]**

(ক) $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) প্রমাণ কর যে $\cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-g(x)}{1+g(x)}}\right\} = \frac{1}{2}(x-1)$. 4

(গ) $y = \sqrt{4+3g(\sin x)}$ হলে, দেখাও যে, $2yy_2 + 2y_1^2 + y^2 - 4 = 0$ 4

সমাধান

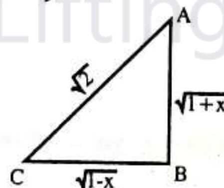
ক. $y = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1} \therefore \frac{dy}{dx} = 1 + (-1)x^{-1-1} = 1 - \frac{1}{x^2} \therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 0 - (-2)x^{-2-1} = \frac{2}{x^3}$

খ. $\cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-g(x)}{1+g(x)}}\right\} = \frac{1}{2}(x-1)$ এখন, $\cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}$

$= \cos^4\left\{\cos^{-1}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}\right\}$

$= \left[\cos\left\{\cos^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right\}\right]^4$

$= \left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{(1-x)^2}{4}$



$$AC = \sqrt{\left(\sqrt{1+x}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2} = \sqrt{1+x+1-x} = \sqrt{2}$$

সুতরাং, $\cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-g(x)}{1+g(x)}}\right\} = \frac{(1-x)^2}{4}$

এখন, $\frac{d}{dx}\left\{\frac{(1-x)^2}{4}\right\} = \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\{(x-1)^2\} = \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\{x^2-2x+1\} = \frac{1}{4}(2x-2) = \frac{1}{4}\times 2(x-1) = \frac{1}{2}(x-1)$

এখানে, প্রশ্ন ত্রুটিপূর্ণ। প্রশ্নে, $\cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}$ এর মান বের করলে $\frac{(1-x)^2}{4}$ পাওয়া যায় যাকে অন্তরীকরণ করার পর $\frac{1}{2}(x-1)$ পাওয়া যায়।

গ. $y=\sqrt{4+3g(\sin x)}=\sqrt{4+3\sin x}\therefore y^2=4+3\sin x\therefore 2yy_1=3\cos x$
$\Rightarrow 2yy_2+2y_1^2=-3\sin x\Rightarrow 2yy_2+2y_1^2-4=-(4+3\sin x)$
$\Rightarrow 2yy_2+2y_1^2-4=-y^2\therefore 2yy_2+2y_1^2+y^2-4=0$ (Showed)

14. $f(x)=\sin x$ এবং $g(x)=4x^3+3x^2-6x+30$ দুটি ফাংশন। [Din.B'22]

(ক) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{-\sin x}-2}{\sin x}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) মূল নিয়মে x- এর সাপেক্ষে $\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{f(2x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 4

(গ) $g(x)$ এর চরম মানসমূহ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{-\sin x}-2}{\sin x}$ L' HÔPITAL RULE ব্যবহার করে পাই, $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{-\sin x}(-\cos x)}{\cos x}=\frac{2.e^{-0}.(-1)}{1}=-2$

খ. দেওয়া আছে, $f(x)=\sin x$; $f(2x)=\sin 2x$
$f\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos 2x$ ধরি, $g(x)=\frac{f(\pi/2-x)}{f(2x)}=\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\cot 2x$

মূল নিয়মে অন্তরজ করে পাই, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cot 2(x+h)-\cot 2x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{\cos 2(x+h)}{\sin 2(x+h)}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{\cos 2(x+h)\sin 2x-\cos 2x\sin 2(x+h)}{\sin 2(x+h)\sin 2x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(2x-(2x+2h))}{h\sin 2(x+h)\sin 2x}$ $[\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B]$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(-2h)}{h\sin 2(x+h)\sin 2x}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-\sin 2h}{2h.\frac{1}{2}}\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\sin 2(x+h)\sin 2x}=-2.\frac{1}{\sin^2 2x}$ $\left[\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin a}{a}=1\right]=-2\text{cosec}^2 2x$

$\therefore$ মূল নিয়মে $\frac{f\left(\frac{\pi}{2}2-x\right)}{f(2x)}$ এর অন্তরজ হলো $-2\text{cosec}^2 2x$

গ. 07 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

15. $f(x)=\sin^{-1}x$ ও $g(x,y)=y(x-3)(x-5)+x-10$ দুটি ফাংশন। [Din.B'22]

(খ) $g(x,y)=0$ বক্ররেখা যে বিন্দুতে x- অক্ষকে ছেদ করে সে বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) $y=e^{3f(x)}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2-xy_1-9y=0$. 4

সমাধান

খ. দেওয়া আছে, $g(x,y)=y(x-3)(x-5)+x-10$; $g(x,y)=0\Rightarrow y(x-3)(x-5)+x-10=0$ ……… (i)
যে বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করে সেখানে, $y=0$; $0(x-3)(x-5)+x-10=0\Rightarrow x=10$
বিন্দুটি হলো (10,0) ; $(1)\Rightarrow y(x-3)(x-5)+x-10=0$
$\Rightarrow y(x^2-3x-5x+15)+x-10=0\Rightarrow y(x^2-8x+15)+x-10=0$
$\Rightarrow y(2x-8)+(x^2-8x+15)\frac{dy}{dx}+1=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}(x^2-8x+15)=-1-y(2x-8)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-1-y(2x-8)}{x^2 8x+15}$
$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(10,0)}=\frac{-1-0(2x-8)}{(10)^2-8\times 10+15}=\frac{-1}{100-80+15}=\frac{-1}{35}\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ, $(y-0)=\frac{-1}{35}(x-10)\Rightarrow 35y=-x+10$
$\Rightarrow 35y+x-10=0\Rightarrow x+35y-10=0$; অভিলম্বের সমীকরণ, $35x-y+k=0$
এটি (10,0) বিন্দুগামী, $35\times 10+k=0\Rightarrow k=-350\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ, $35x-y-350=0$

গ. দেওয়া আছে, $f(x)=\sin^{-1}x$; $y=e^{3\sin^{-1}x}\Rightarrow y_1=e^{3\sin^{-1}x}.\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow\sqrt{1-x^2}\,y_1=3\,e^{3\sin^{-1}x}$
$\Rightarrow\sqrt{1-x^2}\,y_1=3y\Rightarrow\sqrt{1-x^2}\,y_2+y_1\times\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=3y_1$
$\Rightarrow(\sqrt{1-x^2}\times\sqrt{1-x^2})y^2-\frac{y_1x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=3\times\frac{3e^{3\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}\times\sqrt{1-x^2}$ [$\sqrt{1-x^2}$ দ্বারা গুণ করে পাই]
$\Rightarrow(1-x^2)y_2-x\,y_1=9e^{3\sin^{-1}x}\Rightarrow(1-x^2)y_2-x\,y_1-9y=0$ [প্রমাণিত]

16. $z = \sin x$ [MB'22]

(ক) $\frac{d}{dz}(z^x)$ নির্ণয় কর। 2

(খ) মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $\frac{1}{z}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 4

(গ) যদি $y = x^2$ হয়, তবে $(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - z\frac{dy}{dz} - 2$ এর মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $x = \sin^{-1} z \therefore \frac{d}{dz}(z^x) = \frac{d}{dz}\{z^{(\sin^{-1} z)}\} = z^{\sin^{-1} z}\left(\frac{\sin^{-1} z}{z} + \ln z \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right)$ (Ans.)

খ. 14 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. $y = x^2 = (\sin^{-1} z)^2 \therefore y_1 = 2\sin^{-1} z \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \therefore y_1^2(1-z^2) = (2\sin^{-1} z)^2$

$\Rightarrow 2y_1y_2(1-z^2) + y_1^2(0-2z) = 4 \times 2\sin^{-1} z \times \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

$\Rightarrow 2y_1y_2(1-z^2) - 2y_1^2 z = 4y_1 \therefore y_2(1-z^2) - y_1 z = 2$ [$2y_1$ দ্বারা ভাগ]

$\therefore (1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - zy_1 - 2 = 0$ (Ans.)

17. $f(x) = e^x,\ g(x,y) = x^2 - y^2 - 7.$ [MB'22]

(ক) a এর মান কত হলে $y = ax(1-x)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে? 2

(খ) $g(x,y) = 0$ বক্ররেখার $(4,-3)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) $4f(x) + 9f(-x)$ এর লঘুমান কত? 4

সমাধান

ক. $y = ax(1-x) \therefore y_1 = a\{(1-x) + x(0-1)\} \therefore \tan 60° = a\{(1-0)+0\} \therefore a = \sqrt{3}$

খ. 06 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. $y = 4f(x) + 9f(-x) = 4e^x + 9e^{-x} \therefore y_1 = 4e^x - 9e^{-x} \therefore y_2 = 4e^x + 9e^{-x}$

maxmum and minimum, $y_1 = 0 \therefore 4e^x - 9e^{-x} = 0$

$\Rightarrow 4e^x = \frac{9}{e^x} \Rightarrow (e^x)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow e^x = \frac{3}{2} \therefore x = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \therefore y_2 = 4e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + 9e^{-\ln\left(\frac{3}{2}\right)} = 12 > 0$

$\therefore$ লঘুমান $= 4e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + 9e^{-\ln\left(\frac{3}{2}\right)} = 12$ (Ans.)

18. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \sin(2\sin^{-1} x)$. [DB'21]

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 5$

(ক) $\lim_{x\to b} \frac{x^{\frac{9}{2}} - b^{\frac{9}{2}}}{\sqrt{x} - \sqrt{b}}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর $y = f(x)$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 + 4y = 0.$ 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ ফাংশনটির লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. ধরি, $x = b + h \therefore x \to b$ হলে $h \to 0$

$\therefore \lim_{x\to b} \frac{x^{\frac{9}{2}} - b^{\frac{9}{2}}}{\sqrt{x} - \sqrt{b}} = \lim_{x\to b} \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^9 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^9}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)} = 9\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{9-1} = 9b^4 \left[\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}\right]$ (Ans.)

খ. 05 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. 07 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

19. দৃশ্যকল্প: $f(u) = \tan 3u, g(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 7$ **[DB'21]**

(ক) a-এর মান কত হলে, $y = ax(1-x)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। 2

(খ) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ নির্ণয় কর। 4

(গ) যে সকল ব্যবধিতে $g(x)$ ফাংশনটির মান বৃদ্ধি বা হ্রাস পায় তা নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $y = ax(1-x) = ax - ax^2 ; \frac{dy}{dx} = a - 2ax$, মূলবিন্দু (0,0) দিয়ে যায় বলে, $a - 2a \times 0 = \tan 30° \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

খ. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\tan(3x+3h)-\tan 3x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{\sin(3x+3h)\cos 3x - \cos(3x+3h)\sin 3x}{\cos(3x+3h)\cos 3x}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(3x+3h-3x)}{h} \times \frac{1}{\cos(3x+3h)\cos 3x} = \lim\limits_{3h\to 0} 3 \times \frac{\sin 3h}{3h} \times \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{\cos(3x+3h)\cos 3x}$ [$h \to 0$ হলে $3h \to 0$]

$= 3 \times \frac{1}{\cos^2 3x}\left[\lim\limits_{k\to 0}\frac{\sin k}{k} = 1\right] = 3\sec^2 3x$

গ. $g(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 7$ এখানে, $g'(x) = 3x^2 - 18x + 15 ; g''(x) = 6x - 18$

চরমমানে $g'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1, 5$

$g''(1) = 6 - 18 = -12 < 0$

$\therefore x = 1$ হলে গুরুমান বিদ্যমান

আবার $g''(5) = 30 - 18 = 12 > 0$

X=5 X=1

$\therefore x = 5$ হলে লঘুমান বিদ্যমান।

আবার, ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন। $\therefore (-\infty, 1)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি বৃদ্ধি পায়

$(1, 5)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি হ্রাস পায়, $(5, \infty)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি বৃদ্ধি পায় **(Ans.)**

20. $f(x) = \tan x$ **[RB'21]**

(ক) $y = \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}\right\}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $f(3x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 4

(গ) $y = f(x) + \sqrt{f'(x)}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1 - \sin x)y_2 - y = 0$ 4

সমাধান

ক. ধরি, $x = \cos 2\theta \therefore y = \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\} = \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}\right\} = \sin\{2\tan^{-1}\sqrt{\tan^2\theta}\}$

$= \sin 2\theta = \sqrt{1-x^2} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \times (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ **(Ans.)**

খ. 14 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. $f(x) = \tan x ; f'(x) = \sec^2 x ; y = f(x) + \sqrt{f'(x)} ; y = \tan x + \sec x$

differentiate করে পাই, $\therefore y_1 = \sec^2 x + \sec x \tan x$

বা, $y_1 = \sec x(\sec x + \tan x)$ বা, $(\sec x - \tan x)y_1 = \sec x(\sec^2 x - \tan^2 x)$

বা, $(\sec x - \tan x)y_1 = \sec x$ [$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$]

Differentiate করে পাই, $(\sec x - \tan x)y_2 + y_1(\sec x\tan x - \sec^2 x) = \sec x \tan x$

বা, $(\sec x - \tan x)y_2 - \sec x(\sec x + \tan x) \times \sec x(\sec x - \tan x) = \sec x\tan x$ [$y_1 = \sec x(\sec x + \tan x)$]

বা, $\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)y_2 - \sec x(\sec x + \tan x) \times \sec x(\sec x - \tan x) = \sec x \tan x$

বা, $\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)y_2 - \sec^2 x(\sec^2 x - \tan^2 x) = \sec x\tan x$ [$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$]

বা, $(1 - \sin x)y_2 - \sec x = \tan x$ বা, $(1 - \sin x)y_2 - (\sec x + \tan x) = 0$ [$\sec x + \tan x = y$]

বা, $(1 - \sin x)y_2 - y = 0$ **(Proved)**

21. $f(x) = \tan^{-1} x$ এবং $2g(x) = 2\sin x + \sin 2x$ **[RB'21]**

(ক) $y = \text{cosec}^{-1}\frac{1+x^2}{2x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $y = \tan\{mf(x)\}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)y_2 + 2xy_1 = 2myy_1$. 4

(গ) $0 < x < \pi$ ব্যবধিতে $g(x)$ ফাংশনটির চরমমান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. ধরি, $x = \tan\theta \therefore y = \text{cosec}^{-1}\frac{1+x^2}{2x} = \text{cosec}^{-1}\frac{1+\tan^2\theta}{2\tan\theta} = \text{cosec}^{-1}(\text{cosec}2\theta) = 2\theta$

$= 2\tan^{-1} x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$ **(Ans.)**

বিকল্প: $y = \text{cosec}^{-1}\frac{1+x^2}{2x} = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = 2\tan^{-1} x$ $\boxed{\therefore \frac{dy}{dx} = 2\cdot\frac{1}{1+x^2}}$

খ. $y = \tan\{mf(x)\} = \tan\{m\tan^{-1}x\}$ অন্তরীকরণ করে পাই, $y_1 = \sec^2(m\tan^{-1}x) \times \frac{m}{1+x^2}$

বা, $(1+x^2)y_1 = [1 + \tan^2\{m(\tan^{-1}x)\}] \times m$ বা, $(1+x^2)y_1 = m + my^2$ $[y = \tan(m\tan^{-1}x)]$

আবার অন্তরীকরণ করে পাই, $(1+x^2)y_2 + 2xy_1 = 2y\frac{dy}{dx} \times m$ বা, $(1+x^2)y_2 + 2xy_1 = 2myy_1$(প্রমাণিত)

গ. $g(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2}$; $g'(x) = \cos x + \cos 2x$

ফাংশনটির চরমমানে $g'(x) = 0$ বা, $\cos x + \cos 2x = 0$ বা, $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

বা, $2\cos^2 x + 2\cos x - \cos x - 1 = 0$ বা, $(\cos x + 1)(2\cos x - 1) = 0$

$\therefore \cos x = -1$ অথবা, $\cos x = \frac{1}{2}$; $0 < x < \pi$ ব্যবধিতে $\cos x \neq -1$ আবার, $0 < x < \pi$ ব্যবধিতে $\cos x = \frac{1}{2}$ হলে, $x = \frac{\pi}{3}$

$\therefore 0 < x < \pi$ ব্যবধিতে $g(x)$ ফাংশনের চরমমান, $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ **(Ans.)**

22. $f(x) = e^{mx}, u = \frac{1}{x}, v = \frac{1-\cos 7x}{3x}$ **[Ctg.B'21]**

(ক) x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}(\sin e^x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\lim_{x\to 0}(uv)$ নির্ণয় কর। 4

(গ) মূল নিয়মে $f(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 05 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $\lim_{x\to 0}(uv) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{7x}{2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\times\left(\frac{7}{2}\right)^2\frac{\left(\sin\frac{7x}{2}\right)^2}{\left(\frac{7x}{2}\right)^2} = \frac{2\times 49}{3\times 4}\times\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin\frac{7x}{2}\right)^2}{\left(\frac{7x}{2}\right)^2}$

$= \frac{49}{6}\left(\lim_{\frac{7x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}}\right)^2 \left[x \to 0 \text{ হলে } \frac{7x}{2} \to 0\right] = \frac{49}{6}\times 1\left[\lim_{k\to 0}\frac{\sin k}{k} = 1\right] = \frac{49}{6}$ **(Ans.)**

গ. 01 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

23. $t = x^x \ln x, y = \sin(m\sin^{-1}x)$ **[Ctg.B'21]**

$h(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$

(ক) $\frac{dt}{dx}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$ 4

(গ) $h(x)$ এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. ধরি, $y = x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^x(1+\ln x) \cdots\cdots\cdots$ (i)

এখন, $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}^{(x^x\ln x)} = x^x\ln x(1+\ln x) + x^{x-1}$ **(Ans.)**

খ. 05 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. 07 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

24. $f(x) = \ln px$ এবং $g(x) = \ln \sqrt[3]{x}$ দুটি ফাংশন। [SB'21]

(ক) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 8x-1}{4x^2}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $p = 3$ হলে মূল নিয়মে $f(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 4

(গ) অন্তর্ভুক্ত চলরাশির সাপেক্ষে $g\left(\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\right)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 8x-1}{4x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos 8x)}{4x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 4x}{4x^2} = -\lim_{x\to 0} 8\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2 = -8$ (Ans.)

খ. $p = 3$ হলে $f(x) = \ln 3x$; $\ln(3x)$ এর অন্তরজ $= \lim_{h\to 0}\frac{\ln 3(x+h)-\ln 3x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.\left\{\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}-\cdots\cdots\right\} = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{x}-\frac{h}{2x^2}+\frac{h^2}{3x^3}-\cdots\cdots\right\} = \frac{1}{x}$ (Ans.)

গ. $g\left(\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\right) = g\left(\tan^2\frac{\varphi}{2}\right) = \ln\sqrt[3]{\tan^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2}{3}\ln\tan\frac{\varphi}{2}$

φ এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{dg}{d\varphi} = \frac{2}{3}.\frac{1}{\tan\frac{\varphi}{2}}.\frac{1}{2}.\sec^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3}.\frac{\sec^2\frac{\varphi}{2}}{\tan\frac{\varphi}{2}} = \frac{2}{3}\operatorname{cosec}\theta$ (Ans.)

25. দৃশ্যকল্প-১: $\sin^{-1}y = 5\sin^{-1}x$ [SB'21]

দৃশ্যকল্প-২: $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 10$

(ক) b এর মান কত হলে $y = bx(x-1)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শকটি X-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করবে? 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 + 25y = 0$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে y এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. শর্তমতে, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,0)} = 1 \Rightarrow b(x-1)+bx = 1 \Rightarrow b(0-1)+b\times 0 = 1 \Rightarrow -b = 1 \Rightarrow b = -1$ (Ans.)

বিকল্প: $\frac{dy}{dx} = 2bx - b$; $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,0)} = -b = 1 \Rightarrow b = -1$

খ. 05 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. 07 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

26. $f(x) = \sin x$ এবং $g(x) = \sqrt{x}$. [BB'21]

(ক) প্রমাণ কর যে, $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$, যেখানে c একটি সমাকলিত ধ্রুবক। 2

(খ) মূল নিয়মে $\frac{f(2x)}{f\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 4

(গ) দেখাও যে, $\frac{2\ln\{g(x)\}}{\{g(x)\}^2}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান $\frac{1}{e}$. 4

সমাধান

ক.

$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{a\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}} = \int\frac{a\cos\theta\, d\theta}{a\cos\theta}$

$= \int d\theta = \theta + c = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c \therefore \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$ (প্রমাণিত)

ধরি, $x = a\sin\theta \Rightarrow dx = a\cos\theta\, d\theta$

আবার, $\sin\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$

খ. $\frac{f(2x)}{f\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$; $\tan 2x$ এর অন্তরজ করে $= \lim_{h\to 0}\frac{\tan 2(x+h)-\tan 2x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(2x+2h)\cos 2x-\sin 2x\cos(2x+2h)}{h\cos(2x+2h)\cos 2x}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{h\cos(2x+2h)\cos 2x} = \frac{1}{\cos 2x}.\lim_{h\to 0}.\frac{\sin 2h}{2h}.\frac{1}{\cos(2x+2h)}\times 2 = 2\sec^2 2x$ (Ans.)

গ. 07 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

27. $f(x,y) = x^2 + px + y^2, g(x) = \tan^{-1} x.$ [BB'21]

(ক) $x^{\frac{1}{x}}$ এর অন্তরজ বের কর। 2

(খ) দেখাও যে, $f(x,y) = 0$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের উপর লম্ব, সে সকল বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0,0)$ এবং $(-p,0)$. 4

(গ) $\tan^{-1} y = ng(x)$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)y_2 - 2(ny-x)y_1 = 0.$ 4

সমাধান

ক. মনে করি, $y = x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x}\ln x \Rightarrow \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$ (Ans.)

খ. $f(x,y) = 0 \Rightarrow x^2 + px + y^2 = 0 \Rightarrow 2x + p + 2yy_1 = 0 \Rightarrow 2yy_1 = -2x - p \Rightarrow y_1 = \frac{-2x-p}{2y}$

$\therefore$ নির্ণেয় রেখা x অক্ষের উপর লম্ব হলে $y = 0 \therefore x^2 + px = 0 \Rightarrow x(x+p) = 0 \Rightarrow x = 0, -p$

$\therefore$ স্পর্শবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক $(0,0)$ এবং $(-P,0)$ (দেখানো হলো)

গ. দেওয়া আছে, $\tan^{-1} y = n\,g(x) \Rightarrow \tan^{-1} y = n\tan^{-1} x \Rightarrow \frac{1}{1+y^2}.y_1 = n.\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y_1(1+x^2) = n(1+y^2)$

$\Rightarrow 2xy_1 + (1+x^2)y_2 = 2nyy_1 \Rightarrow (1+x^2)y_2 + 2xy_1 - 2nyy_1 = 0 \Rightarrow (1+x^2)y_2 - 2(ny-x)y_1 = 0$ (প্রমাণিত)

28. $f(x) = \log_5 x$ এবং $g(x) = \sec x$ [JB'21]

(ক) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{1-\cos 7x}{15x^2}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $f(x)$ এর ১ম অন্তরজ নির্ণয় কর। 4

(গ) $\frac{1}{g(\sqrt{y})} = 2x$ হলে দেখাও যে, $(1-4x^2)y_2 - 4xy_1 - 8 = 0.$ 4

সমাধান

ক. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{1-\cos 7x}{15x^2} \Rightarrow \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{2\sin^2\frac{7x}{2}}{\frac{49x^2}{4}\times 15\times\frac{4}{49}} = \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{49}{30}\times\left(\frac{\sin\frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}}\right)^2 = \frac{49}{30}\left\{\underset{\frac{7x}{2}\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin\left(\frac{7x}{2}\right)}{\frac{7x}{2}}\right\}^2 \left[x \to 0 \text{ হলে}, \frac{7x}{2} \to 0\right]$

$= \frac{49}{30}\left[\underset{k\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin k}{k} = 1\right]$ (Ans.)

খ. $f(x) = \log_5 x = \frac{\ln x}{\ln 5} \therefore \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\ln(x+h)}{\ln 5} - \frac{\ln x}{\ln 5}}{h} = \frac{1}{\ln 5}\lim_{h\to 0} \frac{\ln\left\{x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right\} - \ln x}{h}$

$= \frac{1}{\ln 5}\lim_{h\to 0} \frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{h}{x}\right) - \ln x}{h} = \frac{1}{\ln 5}\lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{\ln 5}\lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} \cdots\cdots \infty}{h}$

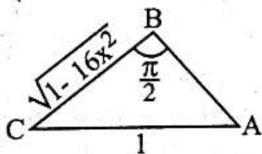
$= \frac{1}{\ln 5}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{x} - h\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{h}{3x^3} + \frac{h^2}{4x^4} + \cdots \infty\right)\right\} = \frac{1}{\ln 5}\times\left(\frac{1}{x} - 0\right) = \frac{1}{x\ln 5}$ (Ans.)

গ. $\frac{1}{g(\sqrt{y})} = 2x \Rightarrow \frac{1}{\sec(\sqrt{y})} = 2x \Rightarrow \cos(\sqrt{y}) = 2x \Rightarrow \sqrt{y} = \cos^{-1} 2x \Rightarrow y = (\cos^{-1} 2x)^2$

অন্তরীকরণ করে পাই, $\therefore y_1 = -\frac{2\cos^{-1} 2x}{\sqrt{1-4x^2}} \times 2 \Rightarrow \sqrt{1-4x^2}\, y_1 = -4\cos^{-1} 2x$

আবার অন্তরীকরণ করে, $\sqrt{1-4x^2}\, y_2 + \frac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}}\, y_1 = \frac{4}{\sqrt{1-4x^2}} \times 2 \Rightarrow (1-4x^2)y_2 - 4xy_1 - 8 = 0$ (Showed)

29. দৃশ্যকল্প-১: [JB'21]



দৃশ্যকল্প-২: $xy + y = \sin^{-1}\frac{y}{x}$

(ক) x এর সাপেক্ষে $x^{\cos^{-1} 3x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-২ হতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। 4

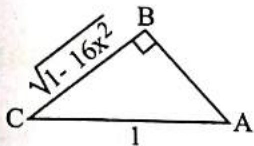
(গ) $h(x) = \frac{AB}{\log(AB)}$ এর চরম মান দৃশ্যকল্প-১ হতে নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. ধরি, $y = x^{\cos^{-1}3x} \therefore \ln y = (\cos^{-1}3x)(\ln x)$ **(Ans.)**
অন্তরীকরণ করে, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln x \times \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}} + \frac{\cos^{-1}3x}{x} \therefore \frac{d}{dx}\left(x^{\cos^{-1}3x}\right) = x^{\cos^{-1}3x}\left(\frac{\cos^{-1}3x}{x} - \frac{3\ln x}{\sqrt{1-9x^2}}\right)$

খ. $xy + y = \sin^{-1}\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(xy+y) = \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\frac{y}{x}\right) \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}} \times \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2}$
$\Rightarrow (x+1)x\sqrt{x^2-y^2}\frac{dy}{dx} + xy\sqrt{x^2-y^2} = x\frac{dy}{dx} - y$
$\Rightarrow \left\{(x^2+x)\sqrt{x^2-y^2} - x\right\}\frac{dy}{dx} = -xy\sqrt{x^2-y^2} - y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{xy\sqrt{x^2-y^2}+y}{x-(x^2+x)\sqrt{x^2-y^2}}$ **(Ans.)**

গ.



এখানে $AB = \sqrt{1^2 - (1-16x^2)} = 4x \therefore h(x) = \frac{(4x)}{\log(4x)} \therefore h'(x) = \frac{(\log 4x)\times 4 - 4x \times \frac{4}{4x}}{(\log 4x)^2} = \frac{4\log 4x - 4}{(\log 4x)^2}$
চরম মানের ক্ষেত্রে, $h'(x) = 0 \Rightarrow 4\log 4x - 4 = 0 \Rightarrow \log 4x = 1 \Rightarrow 4x = e \Rightarrow x = \frac{e}{4}$
$\therefore h(x)$ এর চরম মান $h\left(\frac{e}{4}\right) = \frac{\frac{4e}{4}}{\log\left(\frac{4e}{4}\right)} = e$ **(Ans.)**

30. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যখন } x < 0 \\ x & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \end{cases}$ **[CB'21]**
$g(x) = 3x^3 - 6x^2 - 5x + 1$
(ক) x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 2
(খ) দেখাও যে, $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন। 4
(গ) $g(x)$ এর চরম মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $y = \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1}(x)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ **(Ans.)**

খ. $x < 0$ হলে $f(x) = x^2$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0-h) = \lim_{h\to 0} f(-h) = \lim_{h\to 0} h^2 = 0$
$0 \le x \le 1$ হলে $f(x) = x$ আবার, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(0+h)$ [অবিচ্ছিন্নতার শর্ত L.H.L = R.H.L = f(x)]
$= \lim_{h\to 0} f(h) = \lim_{h\to 0} h = 0 \therefore \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$
তাই, $x = 0$ বিন্দুতে ডানবর্তী ও বামবর্তী লিমিট সমান হওয়ায় $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন। (দেখানো হলো)

গ. 07 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

31. $g(\theta) = \cos\theta$ এবং $y = 2x^2 + 3x + 5$ একটি বক্ররেখা। **[CB'21]**
(ক) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan ax}{\sin bx}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। 2
(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শক x –অক্ষের সমান্তরাল, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4
(গ) $u = g(x)e^x$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{du}{dx} + 2u = 0$ 4

সমাধান

ক. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{ax}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ **(Ans.)**

খ. $y = 2x^2 + 3x + 5 \Rightarrow y_1 = 4x + 3$; $y_1 = 0$ হলে $4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$
$\therefore y = 2.\frac{9}{16} - \frac{9}{4} + 5 = \frac{31}{8} \therefore$ বিন্দুটি $\left(-\frac{3}{4}, \frac{31}{8}\right)$ **(Ans.)**

গ.

$u = g(x)e^x = e^x\cos x \therefore \frac{du}{dx} = e^x\cos x - e^x\sin x$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = u - e^x\sin x \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dx} - e^x\sin x - e^x\cos x$

$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dx} + e^x\cos x - e^x\sin x - 2e^x\cos x$

$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dx} - 2u \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{2du}{dx} + 2u = 0$ (দেখানো হলো)

বিকল্প: $e^x\sin x = u - \frac{du}{dx}$

$\Rightarrow e^x\cos x + e^x\sin x = u.\frac{du}{dx} - \frac{d^2u}{dx^2}$

$\Rightarrow u + u - \frac{du}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{d^2u}{dx^2}$

$\Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{2du}{dx} + 2u = 0$

32. $\mathbf{F(x) = \ln(x)}$. [Din.B'21]

(ক) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) x এর সাপেক্ষে $e^{2F(x)} + (x^x)^x$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 4

(গ) $\frac{e^{F(x)}}{F(x)}$ এর ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}.\frac{bx}{\tan bx}.\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times 1 \times 1 = \frac{a}{b}$ **(Ans.)**

খ. $e^{2\ln x} + (x^x)^x = x^2 + x^{x^2}$

ধরি, $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$; $v = x^{x^2} \Rightarrow \ln v = x^2\ln x \Rightarrow \frac{1}{v}.\frac{dv}{dx} = 2x\ln x + x \Rightarrow \frac{dv}{dx} = x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$

$\therefore$ নির্ণেয় অন্তরজ $2x + x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$ **(Ans.)**

গ. 07 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

33. দৃশ্যকল্প-১: $y = ax^2 + \frac{b}{\sqrt{x}}$. [Din.B'21]

দৃশ্যকল্প-২: দুটি সংখ্যার যোগফল 12। এদের একটি সংখ্যার ঘন এর সাথে অপর সংখ্যার গুণফল গরিষ্ঠ।

(ক) দেখাও যে, $x^3 - 3x^2 + 10x$ একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $2x^2y_2 - xy_1 = 2y$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লিখিত সংখ্যা দুটি নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. ধরি, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 10x \therefore f'(x) = 3x^2 - 6x + 10$

$= 3(x^2 - 2x) + 10 = 3\{(x-1)^2 - 1\} + 10 = 3(x-1)^2 + 7$

অর্থাৎ x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f'(x) > 0$ । $\therefore f(x)$ একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন (দেখানো হল)

খ. $y = ax^2 + \frac{b}{\sqrt{x}} \Rightarrow y_1 = 2ax - \frac{b}{2}x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow y_1 = 2ax - \frac{b}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow y_2 = 2a + \frac{3b}{4}x^{-\frac{5}{2}}$

$\therefore$ L.H.S $= 2x^2y_2 - xy_1 = 2x^2\left(2a + \frac{3b}{4}x^{-\frac{5}{2}}\right) - 2ax^2 + \frac{b}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$= 4ax^2 + \frac{3b}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2ax^2 + \frac{b}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 2ax^2 + 2bx^{-\frac{1}{2}} = 2ax^2 + \frac{2b}{\sqrt{x}} = 2y =$ R.H.S (প্রমাণিত)

গ. মনে করি, সংখ্যা দুটি x ও $12 - x$ ধরি, $y = f(x) = x^3(12 - x)$; $f'(x) = 3x^2(12 - x) - x^3$

$\Rightarrow f''(x) = 6x(12 - x) - 3x^2 - 3x^2 = 6x(12 - x) - 6x^2 = 72x - 12x^2$

$f'(x) = 0$ হলে $36x^2 - 4x^3 = 0 \Rightarrow x^2(9 - x) = 0 \therefore x = (0, 9)$; $f''(0) = 0$; $f''(9) = -324$

$\therefore$ সংখ্যা দুটি $= (9, 3)$ **(Ans.)**

34. দৃশ্যকল্প: $\mathbf{f(x) = \sin x}$. [MB'21]

(ক) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-f(x)}{f'(x)}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) মূল নিয়মে $f(\frac{\pi}{2} - 7x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 4

(গ) $y = \sqrt{8 + 5f(2x)}$ হলে $y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y^2$ এর মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-f(x)}{f'(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x}$ | $f(x) = \sin x \therefore f'(x) = \cos x$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)} = \frac{0}{1+1} = 0$ **(Ans.)**

খ. 14 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. $y = \sqrt{8+5f(2x)} = \sqrt{8+5\sin 2x}$ বা, $y^2 = 8+5\sin 2x$ ……….(i)

বা, $2y\frac{dy}{dx} = 10\cos 2x$ আবার, অন্তরীকরণ করে পাই, $2\left[y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\times\frac{dy}{dx}\right] = -20\sin 2x$

বা, $y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -10\sin 2x$ ……….(ii)

আবার, $\therefore y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y^2 = -10\sin 2x + 2(8+5\sin 2x)$ [(i) ও (ii) হতে] $= 16$ **(Ans.)**

35. দৃশ্যকল্প: $f(z) = \frac{1}{3}z^3 - \frac{13}{2}z^2 + 42z + 1.$ **[MB'21]**

$g(x,y) = x^2 - 2y^2 - 7.$

(ক) x- এর সাপেক্ষে $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{10x}{1+25x^2}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 2

(খ) $g(x,y) = 0$ বক্ররেখার $(3,1)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) $f(x)$ ফাংশনটির গুরুমান এবং লঘুমান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{10x}{1+25x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2.5x}{1+(5x)^2}\right) = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}5x) = \frac{5}{1+25x^2}$

$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{10x}{1+25x^2}\right) = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}5x) = \frac{5}{1+(5x)^2} = \frac{5}{1+25x^2}$ **(Ans.)**

খ. 09 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

গ. 07 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

36. $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x.$ **[DB'19]**

(ক) $f(ax)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{Lt} \frac{2f(x)-g(2x)}{1+f(2x)}$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) যদি $y = g(r\sin^{-1}x)$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 + r^2y = 0.$ 4

সমাধান

ক. $f(ax) = \cos ax$; x এর সাপেক্ষে অন্তরজ করে পাই, $f'(ax) = -\sin ax\frac{d}{dx}(ax) = -a\sin ax$ **(Ans.)**

খ. $\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{Lt}\frac{2f(x)-g(2x)}{1+f(2x)} = \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{Lt}\frac{2\cos x-\sin 2x}{1+\cos 2x} = \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{Lt}\frac{2\cos x-2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} = \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{Lt}\frac{2\cos x(1-\sin x)}{2\cos^2 x}$

$= \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{Lt}\frac{(1-\sin^2 x)}{\cos x(1+\sin x)}$ [$\because (1+\sin x)$ দিয়ে লব ও হর গুণ] $= \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{Lt}\frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{Lt}\frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{0}{1+1} = 0$ **(Ans.)**

গ. 05 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

37. $y = 2^x\ln\frac{1}{1-x}$; $f(x) = (1-x^2)y_2 - xy_2 - a^2y.$ **[RB'19]** 2

(ক) দেখাও যে, $\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1+x}} = -2$ 4

(খ) x এর সাপেক্ষে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। 4

(গ) দেখাও যে, $f(x) = 0$, যখন $\sin^{-1}x = \frac{\ln y}{a}$.

সমাধান

ক. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1+x})}{(1-\sqrt{1+x})(1+\sqrt{1+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1+x})}{1-(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1+x})}{-x}=-(1+1)=-2=$ R.S **[Showed]**

খ. $y=2^x\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=2^x\frac{d}{dx}\left\{\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right\}+\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{d}{dx}(2^x)=2^x\times\left(\frac{1}{1-x}\right)^{-1}\times\frac{-1}{(1-x)^2}+\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)2^x\ln2$

$\therefore\frac{dy}{dx}=2^x\left[\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\ln2-\frac{1}{1-x}\right]$ **(Ans.)**

গ. 11 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

38. $g(x)=2x,\ h(x)=\frac{1}{2x},\ [x\neq 0]$ **[Ctg.B'19]**

(ক) মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos15x}{2x^2}$ 2

(খ) $\phi(x)=g(x)+h(x)$ হলে $\phi(x)$ এর গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। 4

(গ) $y=\left\{\frac{1}{2}g(x)\right\}^{\frac{1}{2h(x)}}$ হলে, y_2 নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos15x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{15x}{2}}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{15x}{2}}{\left(\frac{15x}{2}\right)^2}\times\left(\frac{15}{2}\right)^2=\left(\frac{15}{2}\right)^2\times 1=\frac{225}{4}$ **(Ans.)**

খ. 07 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

গ. $\left\{\frac{1}{2}g(x)\right\}^{\frac{1}{2h(x)}}=\left(\frac{1}{2}\times 2x\right)^{\frac{1\times 2x}{2\times 1}}=x^x$ এখন, $y=x^x\Rightarrow\ln y=x\ln x$

$\Rightarrow\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=x\times\frac{1}{x}+\ln x\times 1\ \Rightarrow\frac{dy}{dx}=y\,(1+\ln x)\therefore y_1=x^x+x^x\ln x$

এখন, $y_1=y+y\ln x$; $\boxed{y_2=y_1+y\times\frac{1}{x}+\ln x\times y_1=x^x+x^x\ln x+x^{x-1}+(x^x+x^x\ln x)\times\ln x}$

অথবা, $\boxed{y_1=y\,(1+\ln x)\,;\ y_2=y_1\,(1+\ln x)+y\left(\frac{1}{x}\right)}$ **(Ans.)**

39. $f(x)=\cos^{-1}2x.$ **[SB'19]**

(ক) $e^{\sin(f(x))}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\ln y=f(x)$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1-4x^2)y_2-4xy_1-4y=0.$ 4

সমাধান

ক. $e^{\sin(f(x))}=e^{\sin\cos^{-1}2x}=e^{\sqrt{1-4x^2}}$

$\therefore\frac{d}{dx}\left\{e^{\sin(f(x))}\right\}=\frac{d}{dx}e^{\sqrt{1-4x^2}}=e^{\sqrt{1-4x^2}}\times\frac{1}{2\sqrt{1-4x^2}}\times -8x=\frac{-4x\,e^{\sqrt{1-4x^2}}}{\sqrt{1-4x^2}}$ **(Ans.)**

খ. 11 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

40. $g(x)=\sin x,\ f(x,y)=x^2+y^2-16$ **[SB'19]**

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{g(x)}-1}{g(x)}$ নির্ণয় কর।

সমাধান

ক. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}=\lim_{\sin x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}$ [$x\to 0$ হলে $\sin x\to 0$] $=1$ $\left[\because\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\right]$ **(Ans.)**

41. দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = e^{m\sin^{-1}2x}$

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 10$ [BB'19]

(ক) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{x}}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $(1-4x^2)g''(x) - 4xg'(x) = 4m^2g(x)$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর ফাংশনটির লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3\times 4}{4x}} = \left\{\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right\}^{12} = e^{12}\left[\because \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\right]$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{x}} = e^{12}$ **(Ans.)**

খ. 11 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. 07 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

42. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5 \ldots\ldots (i)$ [JB'19]

$t = \tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x} + x^{\sin^{-1}x} \ldots\ldots (ii)$

(ক) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+7x}-\sqrt{1-5x}}{x}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $\frac{dt}{dx}$ নির্ণয় কর। 4

(গ) যে সকল ব্যবধিতে (i) এ বর্ণিত ফাংশনটির মান বৃদ্ধি বা হ্রাস পায় তা নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+7x}-\sqrt{1-5x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+7x-1+5x}{x\sqrt{1+7x}+\sqrt{1-5x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{12}{\sqrt{1+7x}+\sqrt{1-5x}} = \frac{12}{2} = 6$ **(Ans.)**

খ. $t = \tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x} + x^{\sin^{-1}x} = \tan^{-1}\frac{2\times 2\sqrt{x}}{1-(2\sqrt{x})^2} + e^{\ln x^{\sin^{-1}x}} = 2\tan^{-1}2\sqrt{x} + e^{\sin^{-1}x\ln x}$

$\therefore \frac{dt}{dx} = 2\times\frac{1}{1+(2\sqrt{x})^2} + e^{\sin^{-1}x\ln x}\left[\frac{\sin^{-1}x}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \frac{2}{\sqrt{x}(1+4x)} + x^{\sin^{-1}x}\left[\frac{\sin^{-1}x}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$ **(Ans.)**

গ. 19 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

43. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = a^2e^{mx} + b^2e^{-mx}, a, b, m > 0$ [CB'19]

দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = 0$

(ক) $y = x^{\frac{1}{x}}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$ 2

(খ) $f(x)$ এর চরম মান নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২এর বক্ররেখাটির (10, 4) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $y = x^{1/x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{1/x} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x}\ln x \Rightarrow \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} + \ln x\left(-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = x^{1/x}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right)$ **(Ans.)**

খ. 07 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

গ. 06 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

44. $f(z) = \cos 2z,\ g(u) = u^4 - \frac{2}{3}u^3 - 2u^2 + 2u.$ [Din.B'19]

(ক) $x^2 - 2y^2 = 10$ বক্ররেখার $(-4, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। 2

(খ) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ নির্ণয় কর। 4

(গ) $(-1,\ 2)$ ব্যবধিতে $g(x)$ এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $2x - 4y\frac{dy}{dx} = 0 \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4y} = \frac{x}{2y} = \frac{-2}{3}$ (Ans.)

খ. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(2x+2h)-\cos 2x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{2x+2h+2x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x+2h-2x}{2}\right)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{-2\sin(2x+h)\sinh}{h} = -2\lim\limits_{h\to 0}\sin(2x+h)\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sinh}{h} = -2\sin 2x \times 1 = -2\sin 2x$ (Ans.)

গ. 23 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

45. (ক) $(-3, 2)$ বিন্দুতে $x^2 - y^2 = 5$ বক্ররেখার স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [All.B'18]

সমাধান

ক. $x^2 - y^2 = 5 \Rightarrow y^2 = x^2 - 5 \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 2x \therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(-3,2)} = \frac{-3}{2}$

$\therefore$ স্পর্শক করে সমীকরণ $y - 2 = -\frac{3}{2}(x+3)$(Ans.)

বিকল্প: $x^2 - y^2 = 5$ বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক $xx_1 - yy_1 = 5$

$\because\ -3x - 2y = 5 \Rightarrow 3x + 2y + 5 = 0$ (Ans.)

46. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \tan px$. [All.B'18]

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = \sec px$.

(ক) $\mathop{Lt}\limits_{x\to\infty} 5^x \sin\left(\frac{m}{5^x}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $p = 4$ হলে মূল নিয়মে $f'(x)$ নির্ণয় কর। 4

(গ) $p = 1$ এবং $y = f(x) + g(x)$ হলে দেখাও যে, $(1-\sin x)^2\frac{d^2y}{dx^2} - \cos x = 0.$ 4

সমাধান

ক. $\mathop{lt}\limits_{x\to\infty} 5^x\sin\left(\frac{m}{5^x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{m}{5^x}}{\frac{1}{5^x}} = \mathop{lt}\limits_{5^x\to\infty}\frac{\sin\frac{m}{5^x}}{\frac{m}{5^x}} \times m = \mathop{lt}\limits_{\frac{m}{5^x}\to 0}\frac{\sin\frac{m}{5^x}}{\frac{m}{5^x}} \times m = 1 \times m = m$ (Ans.)

খ. $p = 4$ হলে $f(x) = \tan 4x$; $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\tan(4x+4h)-\tan 4x}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(4x+4h)}{\cos(4x+4h)} - \frac{\sin 4x}{\cos 4x}}{h}$

$= \lim\limits_{\to 0}\frac{\sin(4x+4h)\cos 4x - \sin 4x\cos(4x+4h)}{h\cos(4x+4h)\cos 4x} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin 4h}{4h\cos(4x+4h)\cos 4x} \times 4 = \lim\limits_{4h\to 0}\frac{\sin 4h}{4h}\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{4}{\cos(4x+4h)\cdot\cos 4x}$

$= \frac{4}{\cos^2 4x} = 4\sec^2 4x$ (Ans.)

গ. $y = \tan x + \sec x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \sec x\tan x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\sin x} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{(1-\sin x)^2}(-\cos x) \therefore (1-\sin x)^2\frac{d^2y}{dx^2} - \cos x = 0$ [Showed]

47. দৃশ্যকল্প-I: $y(x+1)(x+2)-x+4=0$ [DB'17]
দৃশ্যকল্প-II: $h(x)=2x^3-3x^2-3x^2-12x+1.$
(ক) $y=\sec x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $y_2=y(2y^2-1)$ 2
(খ) দৃশ্যকল্প-I এর বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুতে স্পর্শক অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4
(গ) দৃশ্যকল্প-II এর ফাংশনের চরমমান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $y=\sec x \quad \therefore y_1=\sec x\tan x=y\tan x$
$\therefore y_2=y_1\tan x+y\sec^2x=y\tan^2x+y\sec^2x=y(\tan^2x+\sec^2x)$
$=y(2\sec^2x-1) \quad \therefore y_2=y(2y^2-1)$ (প্রমাণিত)

খ. 06 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. 07 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

48. $f(x)=\frac{\ln x}{x^2+1}$ ……… (i) [RB'17]
(খ) (i) বক্ররেখায় x=2 বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. $f(x)=\frac{\ln x}{x^2+1}$ ……. (i)
x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে, $=f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x^2+1}\right)$
$=\frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}(\ln x)-\ln x\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)\cdot\frac{1}{x}-(\ln x\,(2x+0)}{(x^2+1)^2}=\frac{x+\frac{1}{x}-2x\ln x}{(x^2+1)^2}$
এখন, $x=2$ বিন্দুতে ঢালের মান, $=f'(x)=\frac{2+\frac{1}{2}-2.2\ln 2}{(2^2+1)^2}=\frac{\frac{5}{2}-4\ln 2}{25}=\frac{\frac{5-8\ln 2}{2}}{25}\Rightarrow f'(x)=\frac{5-8\ln 2}{50}$
আবার, $x=2$ হলে (i) থেকে পাই, $f(x)=y=\frac{\ln 2}{2^2+1}=\frac{\ln 2}{5} \quad \therefore$ বিন্দুটি হলো $\equiv\left(2,\frac{\ln 2}{5}\right)$
$\therefore\left(2,\frac{\ln 2}{5}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y-\frac{\ln 2}{5}=\frac{5-8\ln 2}{50}(x-2)$
$\Rightarrow 50y-10\ln 2=5x-10-8x\ln 2+16\ln 2\Rightarrow 5x-8x\ln 2-50y+26\ln 2-10=0$ **(Ans.)**

49. (ক) x-এর সাপেক্ষে $x^3\sin(\ln x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [RB'17]

সমাধান

ক. ধরি, $y=x^3\sin(\ln x)$ …….(i)
x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে, $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\{x^3\sin(\ln x)\}=x^3\frac{d}{dx}\{\sin(\ln x)\}+\sin(\ln x)\frac{d}{dx}(x^3)$
$=x^3\cos(\ln x).\frac{1}{x}+\sin(\ln x).3x^2=x^2\cos(\ln x)+3x^2\sin(\ln x)$ **(Ans.)**

50. $f(x)=\frac{1}{\sin x}, g(x)=\frac{1}{\tan x}, h(x)=x.$ [RB'17]
(ক) মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$. 2
(খ) মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $\frac{f(x)}{g(x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 4
(গ) দেখাও যে, $h(x)+\frac{1}{h(x)}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। 4

সমাধান

ক. $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{3^2-(\sqrt{x^2+5})^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{\{9-(x^2+5)\}}=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-5-x^2}$
$=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(4-x^2)}=\lim_{x\to 2}\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)=3+\sqrt{9}=3+3=6$ **(Ans.)**

খ. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\tan x}} = \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x \times \sin x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$, ধরি, $F(x) = \sec x \therefore F(x+h) = \sec(x+h)$

এখন, মূল নিয়মের সংজ্ঞানুসারে, $F'(x) = \lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\sec(x+h)-\sec x}{h}$

$= \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}\right\} = \lim_{h\to0}\left\{\frac{1}{h}\frac{\cos x-\cos(x+h)}{\cos x\cos(x+h)}\right\} = \lim_{h\to0}\left\{\frac{1}{h}\frac{2\sin\frac{x+x+h}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{\cos x\cos(x+h)}\right\} = \lim_{h\to0}\left\{\frac{1}{h}\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\cos x\cos(x+h)}\right\}$

$= \lim_{h\to0}\left\{\frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos x\cos(x+h)}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\} = \lim_{h\to0}\left\{\frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos x\cos(x+h)}\right\} \times \lim_{h\to0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \frac{\sin x}{\cos x.\cos x} \times 1 \therefore \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\tan x$ **(Ans.)**

গ. 05 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

51. দৃশ্যকল্প: $g(x) = x\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$, $y = \cos(m\sin^{-1}p)$ **[Ctg.B'17]**

(ক) x এর সাপেক্ষে $\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্পের আলোকে প্রমাণ কর যে, $(1-p^2)y_2 - py_1 + m^2y = 0$. 4

সমাধান

ক. $\frac{d}{dx}\left\{\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right\} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left\{1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}(2x+0)\right\} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ **(Ans.)**

খ. $y = \cos(m\sin^{-1}p) \Rightarrow y_1 = -\sin(m\sin^{-1}p)\cdot\frac{m}{\sqrt{1-p^2}}$ [$\frac{d}{dx}$ করে]

$\Rightarrow \sqrt{1-p^2}y_1 = -m\sin(m\sin^{-1}p) \Rightarrow \sqrt{1-p^2}y_2 + \frac{1}{2\sqrt{1-p^2}}(-2p)y_1 = -\frac{m^2\cos(m\sin^{-1}p)}{\sqrt{1-p^2}}$ [$\frac{d}{dx}$ করে]

$\Rightarrow \frac{(1-p)^2y_2-py_1}{\sqrt{1-p^2}} = \frac{-m^2y}{\sqrt{1-p^2}} \Rightarrow (1-p^2)y_2 - py_1 = -m^2y \Rightarrow (1-p^2)y_2 - py_1 + m^2y = 0$ (প্রমাণিত)

52. দৃশ্যকল্প: $f(p) = e^{-2p}$. **[Ctg.B'17]**

(ক) $\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{5}{x}}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্পের আলোকে p এর সাপেক্ষে মূল নিয়মে f(p) এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 4

(গ) $4f(p) + \frac{9}{f(p)}$ এর চরম মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{5}{x}}$ ধরি, $p = \lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{5}{x}} \Rightarrow \ln p = \lim_{x\to0}\ln(1+3x)^{5/x} \Rightarrow \ln p = \lim_{x\to0}\frac{5}{x}\ln(1+3x)$

$\Rightarrow \ln p = \lim_{x\to0}\frac{5}{x}\left\{3x - \frac{9x^2}{2} + \frac{27x^3}{3} - \cdots\right\}$

$\Rightarrow \ln p = \lim_{x\to0}\frac{5}{x}\times3x\left(1-\frac{3x}{2}+\frac{9x^2}{3}-\cdots\right) \Rightarrow \ln p = \lim_{x\to0}15\left(1-\frac{3x}{2}+\frac{9x^2}{3}-\cdots\right)$

$\Rightarrow \ln p = 15 \Rightarrow p = e^{15} \therefore \lim_{x\to0}(1+3x)^{5/x} = e^{15}$ **(Ans.)**

খ. 14 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. 07 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

53. $f(u) = \sin^{-1}u$ এবং $g(u) = \ln u$ দুইটি ফাংশন। **[SB'17]**

(ক) $\lim_{\theta\to0}\frac{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\theta^2}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $y = \{f(2x)\}^2$ হলে দেখাও যে, $(1-4x^2)y_2 - 4xy_1 - 8 = 0$. 4

(গ) দেখাও যে, $\frac{g(2x)}{x}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান $\frac{2}{e}$ । 4

সমাধান

ক. $\lim_{\theta\to0}\frac{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta-\sin\theta}{\theta^2} = \lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}{\theta^2\cos\theta}$

$= \lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta\times2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2\cos\theta} = \lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}\times\frac{1}{4}\times2\theta = \lim_{\theta\to0}\frac{\theta}{2}\times\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}\times\left(\lim_{\frac{\theta}{2}\to0}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2 = 0\times1\times1 = 0$ **(Ans.)**

খ. $y = (\sin^{-1} 2x)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = \sin^{-1} 2x \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{y}} y_1 = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \Rightarrow (\sqrt{1-4x^2}) y_1 = 4\sqrt{y} \Rightarrow (1-4x^2)(y_1)^2 = 16y$
$\Rightarrow (1-4x^2) 2y_1 y_2 - 8x(y_1)^2 = 16y_1 \Rightarrow (1-4x^2)y_2 - 4xy_1 = 8$
$\therefore (1-4x^2)y_2 - 4xy_1 - 8 = 0$ [দেখানো হলো]

গ. $y = \frac{\ln 2x}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x \times \frac{1}{2x} \times 2 - \ln 2x}{x^2} = \frac{1-\ln 2x}{x^2} \therefore 1 - \ln 2x = 0$ for maxima, minima
$\Rightarrow 2x = e; x = \frac{e}{2}. ; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2\left(-\frac{1}{2x} \times 2\right) - 2x(1-\ln 2x)}{x^4} = \frac{-x + 2x\ln 2x - 2x}{x^4} \therefore \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\frac{e}{2}} = \frac{-3.\frac{e}{2} + 2.\frac{e}{2}}{\left(\frac{e}{2}\right)^4} < 0$
$\therefore x = \frac{e}{2}$ তে y এর গুরু মান $\therefore y_{max} = \frac{\ln\left(2.\frac{e}{2}\right)}{\frac{e}{2}} = \frac{2}{e}$ (দেখানো হল)

54. দৃশ্যকল্প-২: $\mathbf{\ln y = bz}$. **[BB'17]**

(ক) $\lim_{x \to 0} (\text{cosec}x - \cot x)$ এর মান নির্ণয় কর। **2**

(গ) দৃশ্যকল্প-২: এর আলোকে $\cos z = x$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 = b^2y$. **4**

সমাধান

ক. $\lim_{x \to 0} (\text{cosec}\, x - \cot x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)$
$= \lim_{x \to 0} \left\{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}\right\} = \lim_{x \to 0} \left\{\frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}\right\} = \lim_{x \to 0} \left\{\frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}\right\}$
$= \lim_{x \to 0} \left\{\frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}\right\} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right) = \frac{0}{1+1} = 0$ **(Ans.)**

গ. 05 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

55. $\mathbf{f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12}$ **[BB'17]**

(ক) x এর সাপেক্ষে x^x এর লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। **2**

(খ) উদ্দীপকের আলোকে f(x) এর লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

ক. ধরি, $y = x^x$ ……………… (i)
উভয় পক্ষে ln নিয়ে পাই, $\ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x$, এখন, x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে $\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x \ln x)$
$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + \ln x.1 \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(1+\ln x) \Rightarrow x^x(1+\ln x)$ **(Ans.)**

খ. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$ ……………(i)
(i) নং কে, x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে, $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$ ………………… (ii)
এখন, লঘুমান ও গুরুমানের জন্য, $f''(x) = 6x - 18$ ……………(iii)
এখন, লঘুমান ও গুরুমানের জন্য, $f'(x) = 0$
$3x^2 - 18x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 2x + 8 = 0 \Rightarrow x(x-4) - 2(x-4) = 0$
$\Rightarrow (x-4)(x-2) = 0 \therefore x = 4, 2$ এখন, x = 4, (iii) এ বসিয়ে পাই, $f''(x) = 6 \times 4 - 18 = 6 > 0$
$\therefore x = 4$ বিন্দুতে f(x) এর লঘিষ্ট মান আছে।
এবং উক্ত লঘুমান, $f(4) = 4^3 - 9.4^2 + 24.4 - 12 = 64 - 144 + 96 - 12 = 4$
আবার, x = 2, (iii) এ বসিয়ে পাই, $f'(x) = 6 \times 2 - 18 = -6 < 0$
$\therefore x = 2$ বিন্দুতে f(x)এর গরিষ্ঠ মান আছে। উক্ত গরিষ্ঠ মান,
$f(2) = 2^3 - 9.2^2 + 24.2 - 12 = 8 - 36 + 48 - 12 = 56 - 48 = 8$ **(Ans.)**

56. $f(x) = x^{\tan^{-1}x}, g(x) = \log_x a, h(x) = \sqrt{a + b\cos x}$. [JB'17]

(ক) $\lim\limits_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $f(x)$ এবং $g(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 4

(গ) $y = h(x)$ হলে, দেখাও যে, $2y.\frac{d^2y}{dx^2} + 2.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a.$ 4

সমাধান

ক. $\lim\limits_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{2\sin^2\frac{y}{2}}{y^2}\cdot y = 2\lim\limits_{\frac{y}{2}\to 0} y\left(\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\right)^2 = 2\times\frac{1}{4}\times 1\times\lim\limits_{y\to 0} = 0$ **(Ans.)**

খ. $y = x^{\tan^{-1}x}$; $\ln y = \tan^{-1}x \ln x$; $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{\tan^{-1}x}{x}$; $\frac{dy}{dx} = x^{\tan^{-1}x}\left(\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\right)$

ধরি, $y = \log_x a = \frac{1}{\log_a x} = \frac{1}{\log_a e\times\ln x}$; $y = \frac{\ln a}{\ln x}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\ln a}{x(\ln x)^2}$ **(Ans.)**

গ. $y = h(x) = \sqrt{a + b\cos x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{a+b\cos x}}\times(-b\sin x)$; $\left(2y\frac{dy}{dx}\right)^2 = (-b\sin x)^2$

$4y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = b^2\sin^2 x = b^2 - b^2\cos^2 x = b^2 - (y^2 - a)^2$; $8y^2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + 8y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 - 2y\frac{dy}{dx}\times 2(y^2 - a)$

$4y\frac{d^2y}{dx^2} + 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -2(y^2 - a)$ $\therefore 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a$ [দেখানো হলো]

57. $F(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$, [JB'17]

(ক) $y = (x-2)(x+1)$ বক্ররেখার $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। 2

(খ) দেখাও যে, $F(x)$ এর লঘুমান, গুরুমান অপেক্ষা বৃহত্তর। 4

সমাধান

ক. $y = (x-2)(x+1)$; $\frac{dy}{dx} = x + 1 + x - 2 = 2x - 1$ $\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = 1$ **(Ans.)**

খ. let, $y = F(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x(2x+1)-(x^2+x+1)}{x^2} = \frac{2x^2+x-x^2-x-1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$

লঘুমান বা গুরুমানের সমান, $1 - \frac{1}{x^2} = 0 \therefore x = \pm 1$.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$; For, $x = 1, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{1} > 0, \therefore x = 1$ এর জন্য ফাংশনটির মান লঘুমান।

For, $x = -1$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -2 < 0$ $\therefore x = -1$ এর জন্য ফাংশনটির মান গুরুমান।

$\therefore f(x)|min = \frac{1+1+1}{1} = 3$ $\therefore f(x)|max = \frac{1-1+1}{-1} = -1$ $\therefore f(x)|max < f(x)|min.$ (দেখানো হল)

58. $y = 4x(6-x)^2$ এবং $f(x) = e^{\tan^{-1}x}$ [CB'17]

(ক) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) y এর গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)f''(x) + (2x-1)f'(x) = 0$ 4

সমাধান

ক. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}.\sin x\right) = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 2\times 1\times 0 = 0$ **(Ans.)**

খ. 07 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

গ. দেওয়া আছে, $f(x) = e^{\tan^{-1}x}$ ……….(i)

(i) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \frac{d}{dx}(e^{\tan^{-1}x})$

$\Rightarrow f'(x) = e^{\tan^{-1}x}\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$ $\Rightarrow f'(x) = f(x)\frac{1}{1+x^2}$ [মান বসিয়ে]

$\Rightarrow f'(x)(1+x^2) = f(x)$ আবার, x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে, $\frac{d}{dx}\{f'(x)(1+x^2)\} = \frac{d}{dx}\{f(x)\}$

$\Rightarrow f'(x)\frac{d}{dx}(1+x^2) + (1+x^2)\frac{d}{dx}\{f'(x)\} = f'(x) \Rightarrow f'(x)2x + (1+x^2)f''(x) = f'(x)$

$\Rightarrow (1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) - f'(x) = 0 \Rightarrow (1+x^2)f''(x) + (2x-1)f'(x) = 0$ (প্রমাণিত)

59. (ক) $\sin e^{\sqrt{1-x}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। [Din.B'17]

সমাধান

ক. $\frac{d}{dx}\left(\sin e^{\sqrt{1-x}}\right) = \cos e^{\sqrt{1-x}} \times e^{\sqrt{1-x}} \times \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{e^{\sqrt{1-x}}\cos e^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$ (Ans.)

60. $f(x) = \ln x$ এবং $g(x) = e^x$. [Din.B'17]

(ক) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{ax}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $\frac{f(2x)}{x}$ এর গুরুমান এবং লঘুমান বিদ্যমান থাকলে তা নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{ax} = \frac{2}{a}\lim_{2x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x} = \frac{2}{a}\times 1 = \frac{2}{a}$ (Ans.)

খ. $y = \frac{f(2x)}{x} = \frac{\ln 2x}{x}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x\times\frac{1}{2x}\times 2 - \ln 2x}{x^2} = \frac{1-\ln 2x}{x^2}$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $\frac{1-\ln 2x}{x^2} = 0 \therefore \ln 2x = 1 \Rightarrow 2x = e \quad \therefore x = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2\left(0-\frac{1}{2x}\times 2\right)-2x\times(1-\ln 2x)}{x^4} = \frac{-x-2x+2x\ln 2x}{x^4} = \frac{2x\ln 2x-3x}{x^4}$

$\therefore \left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{e}{2}} = \frac{2.\frac{e}{2}-3.\frac{e}{2}}{\left(\frac{e}{2}\right)^4} = -\frac{1}{\left(\frac{e}{2}\right)^3} < 0 \quad \therefore k = \frac{e}{2}$ তে, y এর মান গুরুমান। $\therefore y_{max} = \frac{\ln 2.\frac{e}{2}}{\frac{e}{2}} = \frac{2}{e}$ (Ans.)

◆ CQ: সম্ভাব্য প্রশ্ন ও সমাধান:

01. $y = \cos(\sin x), f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$

(ক) মূল নিয়মে $\cos 2x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক থেকে প্রমাণ কর, $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\tan x + y\cos^2 x = 0$ 4

(গ) উদ্দীপকের $f(x)$ ফাংশনটির বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. ধরি, $f(x) = \cos 2x \therefore f(x+h) = \cos\{2(x+h)\}$; $f(x+h) - f(x) = \cos(2x+2h) - \cos 2x$

$= 2\sin\left(\frac{2x+2h+2x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-2x-2h}{2}\right) = 2\sin(2x+h)\sin(-h) = -2\sin(2x+h)\sin h$

মূল নিয়মের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $\therefore \frac{d}{dx}(\cos 2x) = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin(2x+h)\sin h}{h}$

$= -2\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}.\lim_{h\to 0}\sin(2x+h) = -2.1\sin 2x = -2\sin 2x$

খ. দেওয়া আছে, $y = \cos(\sin x) \cdots\cdots\cdots$ (i)

(i) নং এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{dy}{dx} = -\sin(\sin x).\cos x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x\cos(\sin x)\cos x + \sin(\sin x)\sin x = -\cos^2 x\cos(\sin x) + \sin(\sin x)\sin x$

$L.H.S = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\tan x + y\cos^2 x = -\cos^2 x\cos(\sin x) + \sin(\sin x)\sin x - \sin(\sin x)\sin x + \cos(\sin x)\cos^2 x$

$= \sin(\sin x)\sin x - \sin(\sin x)\sin x = 0 = R.H.S$ **(proved)**

গ. বোর্ড প্রশ্ন 10 (গ) এর অনুরূপ।

02. $P = e^x$ এবং $y = \sin(m\sin^{-1}x)$

(ক) $\frac{d}{dx}(e^{\tan^{-1}x})$ কত? 2

(খ) মূল নিয়ম P এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$ 4

সমাধান

ক. $\frac{d}{dx}\left(e^{\tan^{-1}x}\right) = e^{\tan^{-1}x}\frac{1}{1+x^2} = \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$ (Ans.)

খ. ধরি, $f(x) = e^x \therefore f(x+h) = e^{x+h}$ এখন, $f(x+h) - f(x) = e^xe^h - e^x = e^x(e^h - 1)$

মূল নিয়মের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\frac{d}{dx}\{e^x\} = \lim_{h\to0}\frac{e^x\left\{\left(1+h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\cdots\right)-1\right\}}{h} = \lim_{h\to0}\frac{e^x.h\{1+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\cdots\}}{h} = e^x.1 = e^x$

গ. বোর্ড প্রশ্ন 05 (খ) এর অনুরূপ।

03. দৃশ্যকল্প-১: $\ln(x\,y) = x + y$

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \cos x,\ g(x) = \frac{x\sin x}{1+\cos x}$

(ক) $x^{\sqrt{x}}$ এর অন্তরীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। 4

(গ) $f(x) + g(x)$ এর অন্তরীকরণ কর। 4

সমাধান

ক. মনেকরি, $y = x^{\sqrt{x}}$; $\ln y = \sqrt{x}\ln x \cdots\cdots$ (i)

(i) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\frac{1}{x} + \ln x\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{\sqrt{x}}\left\{\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right\}$ (Ans.)

খ. দেওয়া আছে, $\ln(xy) = x + y \ldots\ldots$ (i)

(i) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{1}{xy}\left\{x\frac{dy}{dx} + y\right\} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow y^{-1}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(y^{-1} - 1) = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x-1}{x}}{y^{-1}-1} = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{1-y}{y}} = \frac{-y(x-1)}{x(y-1)} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y(x-1)}{x(y-1)}$ (Ans.)

Shortcut for M.গ.Q $\frac{d}{dx}u^v = u^v\left[\frac{v}{u}\frac{d}{dx}u + mu\frac{d}{dx}v\right]$

গ. দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x, g(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

$f(x) + g(x) = \cos x + \frac{x\sin x}{1+\cos x} = \cos x + \frac{x.2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \cos x + \frac{x\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \cos x + x\tan\frac{x}{2}$

$\therefore \frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} = \frac{d}{dx}\left\{\cos x + x\tan\frac{x}{2}\right\} = -\sin x + x\sec^2\frac{x}{2}.\frac{1}{2} + \tan\frac{x}{2} = -\sin x + \frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}$ (Ans.)

04. $\ln y = \tan^{-1}x$ একটি ফাংশন এবং একটি বক্ররেখার সমীকরণ $x^2 + 2ax + y^2 = 0$

(ক) $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x}\right)$ এর মান বের কর। 2

(খ) উদ্দীপকের ফাংশনটির ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$ 4

(গ) বক্ররেখাটির যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক X অক্ষের উপর লম্ব সে সকল বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x}\right)$ ধরি, $\sqrt{x}=\tan\theta \Rightarrow x=\tan^2\theta \therefore \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)\right\}=\frac{d}{dx}(\tan^{-1}\tan 2\theta)$
$=\frac{d}{dx}(2\theta)=\frac{d}{dx}(2\tan^{-1}\sqrt{x})=2\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ **(Ans.)**

খ. এখানে, $\ln y=\tan^{-1}x \Rightarrow y=e^{\tan^{-1}x}$ .... (i)
(i) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $y_1=e^{\tan^{-1}x}\frac{1}{1+x^2}$
$\therefore (1+x^2)y_1=e^{\tan^{-1}x} \Rightarrow (1+x^2)y_1=y$ .... (ii)
(ii) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $(1+x^2)y_2+2xy_1=y_1$
$\Rightarrow (1+x^2)y_2+(2x-1)y_1=0$ (proved)

গ. দেওয়া আছে, $x^2+2ax+y^2=0$ .... (i)
(i) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $2x+2a+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x+a}{y}$
যেহেতু, স্পর্শক X অক্ষের উপর লম্ব সেহেতু, $\frac{dy}{dx}=\tan 90° \Rightarrow -\frac{(x+a)}{y}=\frac{1}{0} \Rightarrow y=0$
(i) হতে পাই, $x^2+2ax=0 \Rightarrow x=0,-2a$ সুতরাং, নির্ণেয় বিন্দুদ্বয় $(0,0)$ ও $(-2a,0)$
$(-2a,0)$ ও $(0,0)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{y-0}{0-0}=\frac{x-0}{0+2a} \Rightarrow y=0$ **(Ans.)**

05. $\mathbf{f(x)=(x-3)(x-5)}$ এবং $\mathbf{g(x)=x-1}$
(ক) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right]$ এর মান নির্ণয় কর। 2
(খ) $\mathbf{y=f(x)}$ বক্ররেখার $\mathbf{(0,15)}$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4
(গ) $\mathbf{yf(x)-g(x)=0}$ বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{\sin x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\tan\frac{x}{2}=0$

খ. বোর্ড প্রশ্ন 06 (খ) এর অনুরূপ।

গ. বোর্ড প্রশ্ন 06 (খ) এর অনুরূপ।

06. $\mathbf{f(x)=x^n}$ এবং $\mathbf{g(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$
(ক) $\mathbf{f(x)}$ ও $\mathbf{g(x)}$ এর অন্তরীকরণ নির্ণয় কর। 2
(খ) $\lim_{x\to 0}\mathbf{f(x)g(x)}$ এর মান নির্ণয় কর। [যেখানে $\mathbf{n=2}$] 4
(গ) দেখাও যে, $\mathbf{x=0}$ বিন্দুতে $\mathbf{f(x)=x^n}$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন। [যেখানে $\mathbf{n=2}$] 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$; $g(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow g'(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)$

খ. $\lim_{x\to 0}x^n\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ [n = 2 বসিয়ে], আমরা পাই, $-1\le\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 1,\ x\ne 0$ এবং $x^2\ge 0$
$\therefore -x^2\le x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le x^2$ **[According to sand witch Theorem]**
$\lim_{x\to 0}(-x^2)\le\lim_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le\lim_{x\to 0}x^2 \Rightarrow 0\le\lim_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 0 \therefore \lim_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

গ. দেওয়া আছে, $f(x)=x^2$; $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^2=0$; $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}x^2=0$
$f(0)=0^2=0 \quad \therefore x=0$ বিন্দুতে $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$
$\therefore x=0$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন। $\therefore$ L. H. L = R. H. L = f(0) **[Showed]**

07. $g(x) = 9e^x + 16e^{-x}$ এবং $y = \sqrt{2 + 5\sin x}$

(ক) x এর সাপেক্ষে $(1 + x)^x$ এর অন্তরক নির্ণয় কর। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 2$ 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $g(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান 24। 4

সমাধান

ক. ধরি, $y = (1 + x)^x$; $\ln y = x\ln(1 + x)$ ……… (i)

(i) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\frac{1}{1+x} + \ln(1 + x)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1 + x)^x\left\{\frac{x}{1+x} + \ln(1 + x)\right\}$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $y = \sqrt{2 + 5\sin x} \Rightarrow y^2 = 2 + 5\sin x$ …… (i)

(i) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 5\cos x$ …… (ii)

(ii) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -5\sin x$

$\Rightarrow 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2 - y^2 \Rightarrow 2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 2$ **(proved)**

গ. বোর্ড প্রশ্ন 07 (খ) এর অনুরূপ।

08. $f(x) = \sin x$ এবং $g(x) = x$

(ক) x এর সাপেক্ষে $\log_x a$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 2

(খ) $y = \frac{1}{f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ হলে দেখাও যে, $yy_2 = y_1^2 + y^4$ 4

(গ) দেখাও যে, $g(x) + \{g(x)\}^{-1}$ এর গুরুমান, লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। 4

সমাধান

ক. ধরি, $y = \log_x a = \log_e a \times \log_x e = \log_e a \times \frac{1}{\log_e x} = \frac{\ln a}{\ln x} \therefore \frac{dy}{dx} = \ln a.\frac{-1}{(\ln x)^2}.\frac{1}{x} = \frac{-\ln a}{x(\ln x)^2}$ **(Ans.)**

খ. এখানে, $y = \frac{1}{f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \Rightarrow y = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \Rightarrow y = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ……… (i)

(i) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $y_1 = -\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right).(-1)$

$\Rightarrow y_1 = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow y_1 = y\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ……… (ii)

(ii) কে x সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $y_2 = -y\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)y_1$

$\Rightarrow y_2 = y.y^2 + \frac{y_1^2}{y}$ [মান বসিয়ে] $\Rightarrow y_2 = y^3 + \frac{y_1^2}{y} \Rightarrow y_2 = \frac{y^4 + y_1^2}{y} \therefore yy_2 = y_1^2 + y^4$ **(showed)**

গ. বোর্ড প্রশ্ন 05 (গ) এর অনুরূপ।

09. $f(x) = \ln x$

(ক) $2x^\circ \cos 3x^\circ$ কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ কর। 2

(খ) মূল নিয়মে দেখাও যে, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \frac{1}{x}$ 4

(গ) $y = a\cos\{f(x)\} + b\sin\{f(x)\}$ হলে, দেখাও যে, $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ 4

সমাধান

ক. ধরি, $y = 2x^\circ\cos 3x^\circ \left[180^\circ = \pi^c \therefore x^\circ = \left(\frac{\pi x}{180}\right)^c\right] = 2\frac{\pi x}{180}.\cos\left(3.\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi x}{90}\cos\left(\frac{\pi x}{60}\right)$ …… (i)

(i) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\pi x}{90}\sin\left(\frac{\pi x}{60}\right)\frac{\pi}{60} + \cos\left(\frac{\pi x}{60}\right)\frac{\pi}{90}$

$= \frac{\pi}{90}\cos\left(\frac{\pi x}{60}\right) - \frac{\pi}{60}\frac{\pi x}{90}\sin\left(\frac{\pi x}{60}\right)$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = \ln x \therefore f(x+h) = \ln(x+h)$ এখন, $f(x+h) - f(x) = \ln(x+h) - \ln x = \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$

মূল নিয়মের সংজ্ঞা হতে পাই, $\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \therefore \frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{x}\right)^3-\cdots}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{x}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{x}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{x}\right)^2-\cdots\right\}}{h} = \frac{1}{x}$ **(Showed)**

গ. $y = a\cos\{f(x)\} + b\sin\{f(x)\}$; $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x) \cdots\cdots\cdots (i)$

(i) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $y_1 = -a\sin(\ln x)\frac{1}{x} + b\cos(\ln x)\frac{1}{x}$

$\Rightarrow xy_1 = -a\sin(\ln x) + b\cos(\ln x) \cdots\cdots\cdots (ii)$

(ii) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $xy_2 + y_1 = -a\cos(\ln x)\frac{1}{x} - b\sin(\ln x)\frac{1}{x}$

$\Rightarrow x^2y_2 + xy_1 = -\{a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)\} \Rightarrow x^2y_2 + xy_1 = -y \Rightarrow x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ **(Showed)**

10. $\mathbf{f(x) = x^3 - 6x^2 + 27x + 5}$ এবং $\mathbf{g(x) = 17 - 15x + 9x^2 - x^3}$

(ক) $\mathbf{x^3\ln 3x}$ এর দ্বিতীয় অন্তরজ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\mathbf{f(x)}$ এর চরম মান নির্ণয় কর। 4

(গ) কোন ব্যবধিতে $\mathbf{g(x)}$ ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান ও ক্রমবর্ধমান হবে তা নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. ধরি, $y = x^3\ln 3x \cdots\cdots\cdots (i)$

(i) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $y_1 = x^3\frac{1}{3x}.3 + \ln(3x).3x^2 = x^2 + 3x^2\ln(3x) \ldots (ii)$

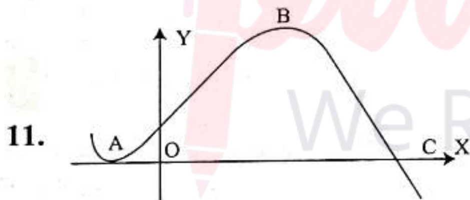
(ii) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $y_2 = 2x + 3x^2\frac{1}{3x}.3 + 3\ln(3x).2x$

$= 2x + 3x + 6x.\ln(3x) \therefore y_2 = 5x + 6x\ln(3x)$ **(Ans.)**

খ. বোর্ড প্রশ্ন 07 (খ) এর অনুরূপ।

গ. বোর্ড প্রশ্ন 19 (গ) এর অনুরূপ।

11.



চিত্রের বক্র রেখাটি $\mathbf{y = (1+x)^2(3-x)}$ এর লেখচিত্র।

(ক) $\mathbf{x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta)}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) **B** বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

(গ) বক্ররেখাটির যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলি অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে তাদের ভুজ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta) \cdots\cdots\cdots (i)$; $\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta \cdots\cdots\cdots (ii)$

(ii) ÷ (i) $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \therefore \frac{dy}{dx} = \cot\frac{\theta}{2}$

খ. এখানে, $y = (1+x)^2(3-x) = (1+2x+x^2)(3-x)$

$= 3+6x+3x^2-x-2x^2-x^3 = -x^3+x^2+5x+3 \ldots\ldots (i)$

(i) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{dy}{dx} = -3x^2+2x+5$

যেহেতু B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল সেহেতু স্পর্শকের ঢাল শূন্য।

$\therefore \frac{dy}{dx} = -3x^2+2x+5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ অথবা, $x = -1$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -6x+2$; $x = \frac{5}{3}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = -8 < 0$ গুরুমান বিদ্যমান

$x = -1$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6+2 = 8 > 0$ লঘুমান বিদ্যমান। B বিন্দুর কোটি $\frac{5}{3}$

$\because y = \left(1+\frac{5}{3}\right)^2\left(3-\frac{5}{3}\right) = \frac{256}{27} \because$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{5}{3}, \frac{256}{27}\right)$

গ. 'খ' হতে পাই, $\frac{dy}{dx} = -3x^2+2x+5$

স্পর্শক অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করলে আমার পাই, $\frac{dy}{dx} = \pm 1 \Rightarrow -3x^2+2x+5 = \pm 1$

$\therefore -3x^2+2x+5 = 1$ অথবা, $-3x^2+2x+5 = -1$

$\Rightarrow -3x^2+2x+4 = 0$ অথবা, $-3x^2+2x+6 = 0$

অতএব, $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = 0 \therefore x = \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}+4.\frac{4}{3}}}{2} = \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4+48}{9}}}{2} = \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{52}{9}}}{2} = \frac{\frac{2\pm\sqrt{52}}{3}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{52}}{6}$

এবং $x^2 - \frac{2}{3}x - 2 = 0 \therefore x = \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}+4.2}}{2} = \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4+72}{9}}}{2} = \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{76}{3}}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{76}}{6}$

12. দৃশ্যকল্প-১: a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকের মধ্যে একটি খাড়া বৃত্তাকার কোণক স্থাপন করা আছে।

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

(ক) যদি কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ সমহারে বৃদ্ধি পায়, তবে দেখাও যে এর ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি হার এর ব্যাসার্ধের সাথে সমানুপাতিক? 2

(খ) $f(x)$ লঘুমান নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-১ এর কোণকের আয়তন যদি বৃহত্তম হয় তবে এর উচ্চতা নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. মনে করি, t সময়ে বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= r$; ব্যাসার্ধ বৃদ্ধির হার, $\frac{dr}{dt} =$ ধ্রুবক

t সময়ে বৃত্তের ক্ষেত্রফল, $A = \pi r^2 \therefore \frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$; 2π ও $\frac{dr}{dt}$ ধ্রুবক বলে, $\frac{dA}{dt} =$ ধ্রুবক $\times r \therefore \frac{dA}{dt} \propto r$

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \cdots\cdots\cdots (i)$

(i) কে x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে পাই,

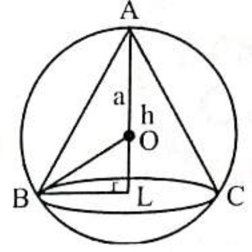
$f'(x) = \frac{\ln(x) - x\frac{1}{x}}{\{\ln(x)\}^2} = \frac{\ln(x)-1}{\{\ln(x)\}^2}$ এবং $f''(x) = \frac{\{\ln(x)\}^2\frac{1}{x} - \{\ln(x)-1\}2\ln(x)\frac{1}{x}}{\{\ln(x)\}^4} = \frac{\ln(x)\{\ln(x)-2\ln(x)+2\}}{x\{\ln(x)\}^4} = \frac{-\ln(x)+2}{x\{\ln(x)\}^3}$

চরম মানের জন্য, $f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{\{\ln(x)\}^2} = 0 \Rightarrow \ln(x) = 1 \therefore x = e$

এখন, $f''(e) = \frac{-1+2}{e} = \frac{1}{e} > 0 \therefore x = e$ বিন্দুতে $f(x)$ এর লঘুমান আছে। $\therefore$ লঘুমান $= \frac{e}{1} = e$ (**Ans.**)

গ. মনেকরি, a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকের মধ্যে ABC কোণক স্থাপন করা হয়েছে। কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ r উচ্চতা $AL = h$ এবং

$OL = AL - OA = h - a$; ΔOBL হতে পাই, $BL^2 = OB^2 - OL^2$



$\Rightarrow r^2 = a^2 - (h-a)^2 = 2ah - h^2 \ldots\ldots (i)$

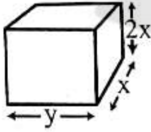
কোণকের আয়তন, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(2ah - h^2)h = \frac{\pi}{3}(2ah^2 - h^3)$

$\therefore \frac{dv}{dh} = \frac{\pi}{3}(4ah - 3h^2)$ এবং $\frac{d^2v}{dh^2} = \frac{\pi}{3}(4a - 6h)$

এখন, $\frac{dv}{dh} = \frac{\pi}{3}(4ah - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = \frac{4a}{3}$

$h = \frac{4a}{3}$ এর জন্য $\frac{d^2v}{dh^2} = \frac{\pi}{3}(4a - 8a) = -\frac{\pi}{3} \times 4a < 0$ ∴ কোণকের আয়তন বৃহত্তম হবে যখন উচ্চতা, $h = \frac{4a}{3}$

13. চিত্রে ঘনক আকৃতির একটি ইট যার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে y cm, xcm এবং 2x cm ইটের সম্পূর্ণ তলের ক্ষেত্রফল 600 cm^2।



(ক) ইটের আয়তন V হলে দেখাও যে, $V = 200x - \frac{4x^3}{3}$। 2

(খ) V এর সর্বোচ্চ মান বের কর। 4

(গ) V এর মানের প্রকৃতি নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, ঘনক আকৃতির একটি ইটের দৈর্ঘ্য প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে y cm, x cm এবং 2x cm

∴ ইটের আয়তন, $V = y \times x \times 2x \text{ cm}^3 = 2x^2y \text{ cm}^3$ ∴ ঘনকের পৃষ্টতলের ক্ষেত্রফল $= 2(xy + 2x^2 + 2xy)\text{cm}^3$

প্রশ্নমতে, $2(xy + 2x^2 + 2xy) = 600 \Rightarrow xy + 2x^2 + 2xy = 300 \Rightarrow 3xy = 300 - 2x^2 \therefore y = \frac{300-2x^2}{3x}$

এখন ইটের আয়তন, $V = 2x^2 \left(\frac{300-2x^2}{3x}\right) \therefore V = 200x - \frac{4x^3}{3}$ **(Showed)**

খ. 'ক' হতে পাই, $V(x) = 200x - \frac{4x^3}{3}$; $\frac{dV}{dx} = 200 - 4x^2 \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = -3x$

আমরা জানি, সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের ক্ষেত্রে $\frac{dV}{dx} = 0$

$\therefore 200 - 4x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 200 \Rightarrow x = \pm\sqrt{50}$ [দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না]

যেহেতু $\frac{d^2v}{dx^2} = -8\sqrt{50} < 0 \therefore x = \sqrt{50}$ এ V এর সর্বোচ্চ মান থাকবে।

$\therefore V = 200.\sqrt{50} - \frac{4(\sqrt{50})^3}{3} = 200\sqrt{50} - \frac{4.50\sqrt{50}}{3} = \frac{600\sqrt{50} - 200\sqrt{50}}{3} = \frac{400\sqrt{50}}{3} = 942.808 \cong 943 \text{ cm}^3$ **(Ans.)**

গ. 'খ' হতে পাই, $\frac{d^2V}{dx^2} = -8x$; $x = \sqrt{50}$ হলে, $\frac{d^2V}{dx^2} = -8\sqrt{50}$

ইহা ঋণাত্মক, সুতরাং $x = \sqrt{50}$ এর জন্য V এর সর্বোচ্চ মান পাওয়া যাবে। আবার, $x = 0$ হলে $V = 0$

সুতরাং ঋণাত্মক দিকে x বাড়াতে থাকলে অর্থাৎ প্রস্থ বাড়াতে থাকলে V এর মান বাড়তে থাকে।

আবার, $\sqrt{50}$ এর পর প্রস্থ x আরও বাড়ালে আয়াতাকার ঘনবস্তুটির অন্যান্য মাত্রা এমনভাবে পরিবর্তন হয় যেন V আবার কমতে থাকে।

অধ্যায় ১০ যোগজীকরণ

এই অধ্যায়ের বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্নের বিশ্লেষণ:

বোর্ড	২০২২				২০২১				২০১৯				২০১৮				২০১৭			
	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ	CQ			MCQ
	ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ		ক	খ	গ	
ঢাকা		1	1	4	2	2	2	6	1	1	1	2	1		1	2	1	1	1	2
রাজশাহী		1	1	5	2	2	2	6	1	1	1	2						1	1	1
চট্টগ্রাম	1	1	2	4	2	2	2	8	1	1	1	4						1		1
সিলেট	1	1	1	4	2	2	2	6		1	2	3								2
বরিশাল	2	1	1	4	1	2	2	6	1	1	1	1	সকল বোর্ড				1	1	2	3
যশোর	1	2	1	4	2	2	2	3	1	1	1	2							1	3
কুমিল্লা	2	1	1	3	2	2	2	6	1	1	1	3					1	1	1	2
দিনাজপুর	2	1	1	2	2	2	2	7	1	1	1	3					1	1	1	1
ময়মনসিংহ	1	1	1	3	2	2	2	6												

বি.দ্র.- ২০২০ সালে বোর্ড পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয় নাই এবং ২০১৮ সালে সকল বোর্ডে অভিন্ন প্রশ্ন পদ্ধতিতে পরীক্ষা অনুষ্ঠিত হয়।

গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞা ও তথ্যাবলি

◈ **নির্দিষ্ট যোগজ (The Definite Integral):**

যদি $[a, b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশন সীমাবদ্ধ (Bounded) হয় এবং $[a, b]$ ব্যবধিকে n সংখ্যক উপব্যবধি $\delta_r = [x_{r-1}, x_r], r = 1,2,3 \dots \dots \dots \dots \dots n$, এরূপে বিভক্ত করা হয় যে, সর্বাপেক্ষা দীর্ঘ উপব্যবধি $\delta \to 0$ হয় এবং $\xi_r, \in \delta_r$ এর জন্য $\lim_{\delta\to 0} \sum f(\xi_r)\delta_r$ এর নির্দিষ্ট একটি মাত্র সসীম মান থাকে, তবে সেই মানকে নিম্নপ্রান্ত a হতে উর্ধ্বপ্রান্ত b পর্যন্ত $f(x)$ এর নির্দিষ্ট যোগজ বলা হয় এবং উহাকে $\int_a^b f(x)dx$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

সুতরাং $\lim_{\delta\to 0} \sum f(\xi_r)\delta_r = \int_a^b f(x)dx$

◈ নির্দিষ্ট যোগজের মান: যদি x কে চলরাশি ধরে $[a, b]$ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনের যোগজ $F(x)$ হয় অর্থাৎ $\int_a^b f(x)dx = F(x)$ হয় তবে $F(b) - F(a)$ কে $f(x)$ ফাংশনের নির্দিষ্ট যোগজের মান বলা হয় এবং একে $\int_a^b f(x)dx$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়। নির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় করতে নিচের পদক্ষেপগুলো প্রয়োজন।

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, যেখানে $\int f(x)dx = F(x) + c$

◈ নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত মূল উপপাদ্য:

অনির্দিষ্ট যোগজ মূলত নির্দিষ্ট যোগজ $\int_a^b f(x)dx$ যার উর্ধ্বপ্রান্ত চলরাশি। $F(x)$ অবিচ্ছিন্ন ফাংশন হলে $F(x) = \int_a^b f(x)dx$ অন্তরীকরণযোগ্য এবং $F'(x) = f(x)$. $G(x)$ যদি $f(x)$ এর যেকোন প্রতিঅন্তরজ হয়, তবে $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$; এই ফল নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত মূল উপপাদ্য নামে পরিচিত। এর যেকোনো দুইটি প্রতিঅন্তরজের পার্থক্য ধ্রুব ফাংশন বিধায়, একদিকে $G(b) - G(a)$ এর মান প্রতিঅন্তরজের চয়নের উপর নির্ভর করে না; অন্যদিকে $G(x)$ যদি $f(x)$ এর যেকোন প্রতিঅন্তরজ হয় তবে $G(x) = f(x) + c$, যেখানে c ধ্রুবকসংখ্যা। এর ফলে নির্দিষ্ট যোগজ প্রসঙ্গে প্রতিঅন্তরজ এবং নির্দিষ্ট যোগজ সমার্থক বলে বিবেচনা করা যায়। তাই ক্যালকুলাসে অনির্দিষ্ট যোগজ বলতে প্রতিঅন্তরজকেই বুঝানো হয়।

দ্রষ্টব্য: নির্দিষ্ট যোগজে যোগজীকরণের ধ্রুবক থাকে না।

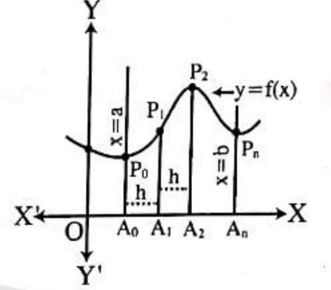
$\int_a^b f(x)dx = [F(x)+c]_a^b = \{F(b)+c\} - \{F(a)+c\} = F(b)+c-F(a)-c = F(b)-F(a)$

(i) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz$

(ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(iii) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

◈ ক্ষেত্রফল হতে নির্দিষ্ট যোগজের ধারণা:



ধরি, পাশের চিত্রের বক্ররেখাটির সমীকরণ $y = f(x)$। $x = a$ সরলরেখা, $y = f(x)$ বক্ররেখাকে এবং x – অক্ষকে যথাক্রমে P_0 ও A_0 বিন্দুতে ছেদ করে, এবং $x = b$ সরলরেখা, $y = f(x)$ ও x - অক্ষকে যথাক্রমে P_n ও A_n বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং বক্ররেখা $y = f(x)$ এবং তিনটি সরলরেখা $x = a, x = b$ ও $y = 0$ (x – অক্ষ) একটি ক্ষেত্র $A_0\,A_n\,P_n\,P_0$ গঠন করে। ধরি, $A_0\,A_n\,P_n\,P_0$ এর ক্ষেত্রফল $= S$। A_0A_n রেখাংশকে A_1, A_2, A_3 ...... বিন্দুগুলো সমান n ভাগে ভাগ করে যেন $A_0A_n = nh$, অর্থাৎ $b - a = nh, x = a$ এর সমান্তরাল করে A_1, A_2 এর মধ্য দিয়ে অংকিত রেখাগুলো $y = f(x)$ কে যথাক্রমে $P_1\,P_2$ ..... বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, P_0 এর ভুজ $= a$, $\therefore y = f(x)$ হতে, এর কোটি $= f(a)$. $\therefore P_0A_0 = f(a)$ P_1 এর ভুজ $= a + h$

$\therefore y = f(x)$ হতে, এর কোটি $f(a+h). P_1A_1 = f(a+h)$.

অনুরূপে $P_2A_2 = f(a+2h), \ldots\ldots$

ধরি, $S_n = P_0A_0.A_0A_1 + P_1A_1.A_1A_2 + \cdots\cdots + P_{n-1}\,A_{n-1}.A_{n-1}A_n$

$= f(a).h + f(a+h).h + \cdots\cdots + f\{a+\overline{(n-1)}h\}h$

$= h[\,f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots\cdots + f\{a+\overline{(n-1)}.h\}]$

h খুব ছোট হলে, $P_0A_0A_1P_1, P_1A_1A_2P_2 \cdots\cdots$ ক্ষেত্রগুলো আয়তক্ষেত্রের আকার ধারণ করে।

$\therefore n \to \infty$ হলে, $h \to 0$ এবং এক্ষেত্রে $A_0A_nP_nP_0$ এর ক্ষেত্রফল $= \lim_{n\to\infty} S_n$

এ সীমাকে নির্দিষ্ট যোগজ বলে এবং এটাকে $\int_a^b f(x)dx$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

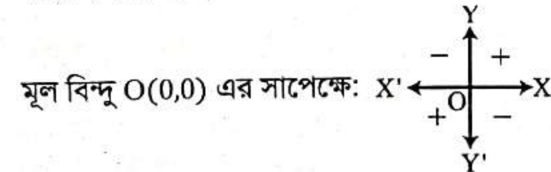
$\therefore \int_a^b f(x) = \lim_{n\to\infty} h[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots\cdots + f(a+\overline{(n-1)}h)]$

◈ নির্দিষ্ট যোগজ (**Definite Integral**):

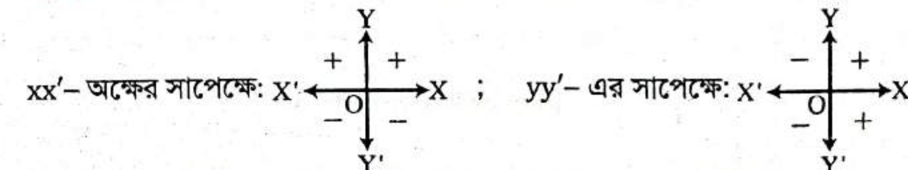
সংজ্ঞা: $nh = b - a$ হলে, $\lim_{n\to\infty} h[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots\cdots + f\{a+\overline{n-1}h\}]$ কে নির্দিষ্ট যোগজ বলে এবং এটাকে $\int_a^b f(x)dx$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} h[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots\cdots + f(a+\overline{n-1}.h\}]$

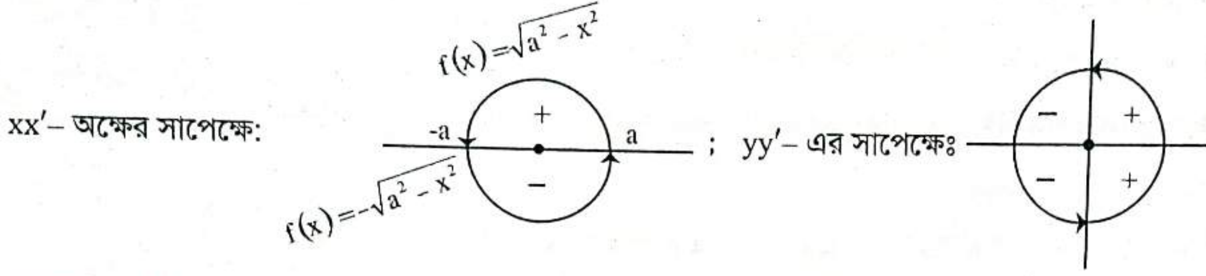
◈ ফাংশন দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফলের চিহ্ন:



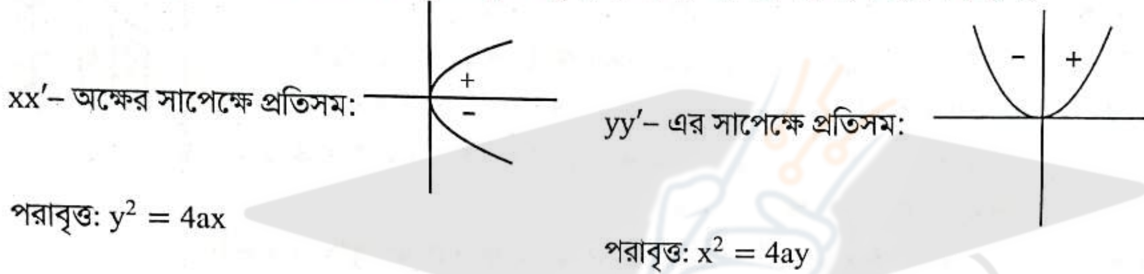
◈ অক্ষের সাপেক্ষে:



◈ বৃত্ত ও উপবৃত্তের ক্ষেত্রে: (মূলবিন্দু ও যেকোন অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম ফাংশন)
বৃত্তের ক্ষেত্রে –



◈ পরাবৃত্ত ও অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে: (**Funcion** টি মূলবিন্দু বা যে কোন অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম হলে:



পরাবৃত্ত: $y^2 = 4ax$

পরাবৃত্ত: $x^2 = 4ay$

এক্ষেত্রে অক্ষের সাপেক্ষে $-a \rightarrow +a$ ব্যবধিতে ক্ষেত্রফল শূন্য হয় যেখানে $a \in \mathbb{R}$। সেজন্য প্রথম চতুর্ভাগে ক্ষেত্রফল বের করে 4 দ্বারা গুণ করে মোট ক্ষেত্রফল নির্ণয় করাই শ্রেয়।

◈ **Concept:**

(i) যদি কোন ফাংশনের ক্ষেত্রে $f(-x) = f(x)$ হয় তবে তাকে যুগ্ম ফাংশন বলে। আবার যদি কোন ফাংশনের ক্ষেত্রে $f(-x) = -f(x)$ হয় তবে তাকে অযুগ্ম ফাংশন বলে। যেমন, $x^2, \cos x, x\sin x$ যুগ্ম ফাংশন এবং $x^3, \sin x, x\cos x$ অযুগ্ম ফাংশন।

(ii) $f(x)$ যুগ্ম ফাংশন হলে, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$,
$f(x)$ অযুগ্ম ফাংশন হলে, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$
যেমন, $\int_{-a}^{a} x.\cos x dx = 0$
এই **Type MCQ** এর জন্য খুবই গুরুত্বপূর্ণ।

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি

01. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
02. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz$
03. $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$
04. $\int_b^a f(x)dx = \int_b^a f(a+b-x)dx$
05. $\int_b^a f(x)dx = \int_{b-c}^{a-c} f(x+c)dx$
06. $\int_b^a f(x)dx = \int_{b+c}^{a+c} f(x-c)dx$

Special Tips:

Walli's theorem: [MCQ এর জন্য খুবই গুরুত্বপূর্ণ]

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}\dots\dots\frac{3.1}{4.2}.\frac{\pi}{2}$ [**n** = জোড় পূর্ণসংখ্যা হলে]

যেমন: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{3.1}{4.2}.\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}\dots\dots.\frac{2}{3}$ [**n** = বিজোড় পূর্ণসংখ্যা হলে]

যেমন: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \frac{5-1}{5}.\frac{5-3}{5-2} = \frac{8}{15}$

সহজে মনে রাখার কৌশল

- Definite Integral এর প্রায় সকল সমস্যাই calculator ব্যবহার করে সমাধান করা যায়। প্রথমে প্রদত্ত যোগজটির মান calculator এর সাহায্যে নির্ণয় করতে হবে। এরপর প্রাপ্ত মান অপশনগুলোর মানের সাথে মিলিয়ে দেখতে হবে, প্রাপ্ত মানটি যে অপশনের সমান বা কাছাকাছি সেই মানটিই হবে উত্তর। কয়েকটি উদাহরণ আলোচনা করা যাক

Example: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$

সমাধান: ES series ক্যালকুলেটরে এধরনের নির্দিষ্ট যোগজের সরাসরি উত্তর পাওয়া যায়।

$\int_{\square}^{\square} \square$ dx press করার পর ফাংশনটি লিখতে হবে (এক্ষেত্রে $\sin^2 x$)। এরপর upper limit এ $\frac{\pi}{2}$ এবং lower limit এ 0 দিয়ে press করলে $\frac{\pi}{4}$ উত্তর পাওয়া যাবে। MS series এ একই উত্তর পাওয়া যাবে।

For MS series: ∫dx (sin ALPHA))
x², 0 , π ab/c 2)

উত্তর আসবে $0.785398163 \approx \frac{\pi}{4}$

[বি.দ্র: ক্যালকুলেটর আগে রেডিয়ান মোডে নিতে হবে।]

- যাকে u ধরব তাকে differentiation এবং যাকে v ধরব তাকে integration করতে থাকবো যতক্ষণ পর্যন্ত না 0 আসে।

Example: $\int x^3\ e^x\, dx$

u	v
x^3	e^x
$3x^2$	e^x → +
$6x$	e^x → −
6	e^x → +
0	e^x → −

* উপর থেকে +, −, +, − এভাবে দিতে হবে। * arrow বরাবর গুণ করে যোগ করলেই answer পাওয়া যায়।

$\therefore \int x^3\ e^x dx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + c$

- **Special Tips:** Trigonometric exponent একসাথে থাকলে,

$\int e^{ax}\sin(bx+c)dx = \frac{TD(E)-ED(T)}{a^2+b^2}$

T → Trigonometric function

D(E) → Differentiation of exponent

D(T) → Differentiation of trigonometric

E → Exponent function

Example: $\int e^{3x}\sin(7x-3)\,dx = \frac{\sin(7x-3).3e^{3x} - 7e^{3x}\cos(7x-3)}{3^2+7^2}$

- $\int uv\,dx = u\int v dx - \int\left\{\frac{du}{dx}\int v dx\right\}dx$

কাকে u, কাকে v ধরতে হবে এটা LIATE শব্দ থেকে decide করা হয়।

L → Logarithmic Function (ln, log)

I → Inverse Function ($\tan^{-1}, \sin^{-1}$, ...)

A → Algebraic Function (x^2, x^3, ...)

T → Trigonometric Function ($\sin x, \cos x$ ... ...)

E → Exponential Function (e^x, a^x ... ...)

LIATE শব্দ অনুসারে যেটি আগে থাকবে সেটা u ধরব।

Example: $\int xe^x dx$

এক্ষেত্রে, x → Algebraic = u

e^x → exponential = v $\therefore \int xe^x = x\int e^x dx - \int 1.\left(\int e^x dx\right)dx = xe^x - e^x + c$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও সমাধান

MCQ: বিগত বছরসমূহের বোর্ড প্রশ্ন ও সমাধান

01. $I = \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ হলে I এর মান কত? **[DB, Ctg.B'22; All.B'18]**

(a) e (b) $e + 1$ (c) $\ln e - 1$ (d) $\ln 2$

সমাধান: **(d);**

$I = \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

$= \int_1^2 \frac{dz}{z} = [\ln|z|]_1^2$

$= \ln|2| - \ln|1|$

$= \ln 2 - 0 = \ln 2$

ধরি, $1 + \ln x = z$

$\Rightarrow \frac{1}{x}dx = dz$

x	1	e
z	1	2

02. $f(x) = 4x$ হলে- **[DB'22, 17; RB'21]**

(i) $\int \frac{dx}{f(x)} = \frac{1}{4}\ln x + c$ (ii) $\int e^{f(x)}dx = \frac{1}{4}e^{4x} + c$

(iii) $\int_0^2 f(x)dx = 8$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: **(d);** এখানে, $f(x) = 4x$

(i) $\int \frac{dx}{f(x)} = \int \frac{dx}{4x} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{4}\ln|x| + c$

(ii) $\int e^{f(x)}dx = \int e^{4x}dx = \frac{e^{4x}}{4} + c = \frac{1}{4}e^{4x} + c$

(iii) $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 4x\,dx = 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2[x^2]_0^2$

$= 2[2^2 - 0^2] = 8$

03. $-\int_2^1 \ln x\,dx$ এর মান কোনটি? **[DB, RB'22; JB, BB'21]**

(a) $2\ln 2 - 1$ (b) $2\ln 2 + 1$

(c) $2\ln 2$ (d) $\ln 2$

সমাধান: **(a);** $-\int_2^1 \ln x\,dx = \int_1^2 \ln x\,dx$

$= [x\ln x - x]_1^2 = (2\ln 2 - 2) - (1.\ln 1 - 1)$

$= 2\ln 2 - 2 - (0 - 1) = 2\ln 2 - 2 + 1$

$= 2\ln 2 - 1$

04. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\,d\theta = ?$ **[DB'22]**

(a) $\frac{1}{2}\ln 2$ (b) $\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2} + 1)$

(c) $\ln(\sqrt{2} + 1)$ (d) $\ln\ (\sqrt{2} - 1)$

সমাধান: **(c);** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\,d\theta = [\ln|\sec\theta + \tan\theta|]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \ln|\sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}| - \ln|\sec 0 + \tan 0|$

$= \ln|\sqrt{2} + 1| - \ln|1 + 0| = \ln(\sqrt{2} + 1) - 0$

$= \ln(\sqrt{2} + 1)$

05. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ এর মান কোনটি? **[RB'22]**

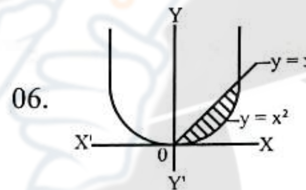
(a) $2e^{-1}$ (b) $2(e - 1)$ (c) $\frac{2}{e} - 1$ (d) $1 - \frac{1}{e}$

সমাধান: **(b);** $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$

ধরি, $\sqrt{x} = z \therefore \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dz$

x	0	1
z	0	1

$= 2\int_0^1 e^z dz = 2[e^z]_0^1 = 2(e - e^0) = 2(e - 1)$

06. 

[RB'22]

চিত্রে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল কত বর্গএকক?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{6}{5}$

সমাধান: **(c);** $y = mx$ ও $y = 4ax^2$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের

ক্ষেত্রফল $= \frac{8a^2}{3m^3}$

$m = 1, a = \frac{1}{4} \therefore$ Area $= \frac{8a^2}{3m^3} = \frac{8\times\left(\frac{1}{4}\right)^2}{3\times 1^3} = \frac{1}{6}$ বর্গএকক।

07. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos 2x}$ এর মান কোনটি? **[RB'22; MB'21]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) 1 (d) 2

সমাধান: **(a);** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2\cos^2 x}$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\,(\tan x)$

$= \frac{1}{2}[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}$

08. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x}}$ এর মান কোনটি? **[RB'22] [Ans: a]**

(a) $\frac{2}{3}(1 - x)^{\frac{3}{2}} - 2(1 - x)^{\frac{1}{2}} + c$

(b) $-\frac{2}{3}(\sqrt{1 - x})(x + 2) + c$

(c) $\frac{1}{3}(1 - x)^{\frac{3}{2}} - (1 - x)^{\frac{1}{2}} + c$

(d) $\frac{2}{3}(\sqrt{1 - x})(x + 2) + c$

সমাধান: (a); $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x}}$

[ধরি, $1 - x = z^2 \therefore -dx = 2zdz$]

$= \int \frac{1-z^2}{z} - 2zdz = -2\int (1-z^2)\,dz$

$= -2\left[z - \frac{z^3}{3}\right] + c = -2z + \frac{2z^3}{3} + C$

$= -2(1-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + c$ (**Ans.**)

z	0	3
x	2	5

09. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$ কত? **[Ctg.B'22]**

(a) $\frac{x^2}{2} + c$ (b) $-\sqrt{1-x^2} + c$

(c) $\sqrt{1-x^2} + c$ (d) $\sqrt{1+x} + c$

সমাধান: (b); $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{-1}{2}\int \frac{-2xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{-1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + c$

10. $\int e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)dx =$ কত? **[Ctg.B, BB'22; RB'21]**

(a) $e^x \ln x + c$ (b) $e^x + \ln x + c$

(c) $e^x \cdot \frac{1}{x} + c$ (d) $e^x + \frac{1}{x} + c$

সমাধান: (a); $\int e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)dx = e^x \cdot \ln x + c$

[**Formula:** $\int e^x\{f(x) + f'(x)\}dx = e^x f(x) + c$]

এখানে, $f(x) = \ln x \therefore f'(x) = \frac{1}{x}$

11. $\int \frac{\cot x}{\sqrt{\sin x}}dx =$ কত? **[SB'22]**

(a) $\frac{-2}{\sqrt{\sin x}} + c$ (b) $\frac{-1}{2\sqrt{\sin x}} + c$

(c) $\frac{1}{2\sqrt{\sin x}} + c$ (d) $2\sqrt{\sin x} + c$

সমাধান: (a); মনে করি, $\sin x = z \Rightarrow \cos x\,dx = dz$

$\int \frac{\cot x}{\sqrt{\sin x}}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x \cdot \sqrt{\sin x}}dx$

$= \int \frac{dz}{(z)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c = \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c$

$= -\frac{1}{\sqrt{z}} + c = \frac{-2}{\sqrt{\sin x}} + c$

12. $\int e^x \cos x(1 + \tan x)dx$ এর মান কত? **[SB'22]**

(a) $e^x \cos x + c$ (b) $e^x \tan x + c$

(c) $e^x \sec x + c$ (d) $e^x \sin x + c$

সমাধান: (d); [এখানে, $f(x) = \sin x \therefore f'(x) = \cos x$]

$\int e^x \cos x(1 + \tan x)\,dx$

$= \int e^x \cos x\left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$

$= \int e^x(\cos x + \sin x)dx = e^x \cdot \sin x + c$

13. $\int_0^3 f(x) = 4$ হলে, $\int_2^5 f(x-2) =$ কত? **[SB'22]**

(a) 0 (b) 4 (c) 3 (d) 2

সমাধান: (b); $\int_0^3 f(z)\,dz = 4 \therefore \int_2^5 f(x-2)dx$

ধরি, $x - 2 = z \therefore x = z + 2 \therefore dx = dz$

$\therefore \int_0^3 f(z)dz = 4$

14. y-অক্ষ এবং $x = 4 - y^2$ পরাবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? **[SB'22]**

(a) $\frac{3}{32}$ বর্গ একক (b) $\frac{2}{33}$ বর্গ একক

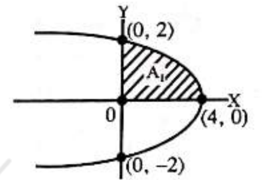
(c) $\frac{32}{3}$ বর্গ একক (d) $\frac{33}{2}$ বর্গ একক

সমাধান: (c); $y^2 = 4 - x \Rightarrow y^2 = -(x-4)$

y অক্ষের ছেদবিন্দু, $x = 0$

$\therefore 4 - y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm 2$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল



$= 2\int_0^2 xdy$

$= 2\int_0^2 (4 - y^2)dy$

$= 2\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2$

$= 2\left[8 - \frac{8}{3} - 0\right]$ বর্গএকক।

$= \frac{32}{3}$ বর্গএকক।

15. $\int 10^{5x}dx =$ কত? **[BB'22; Ctg'21]**

(a) $\frac{10^{5x}}{\ln 10} + c$ (b) $\frac{10^{5x}}{5\ln 10} + c$

(c) $5 \cdot 10^{5x}\ln 10 + c$ (d) $10^{5x}\ln 10 + c$

সমাধান: (b); $\int 10^{5x}\,dx$;let, $5x = z \Rightarrow 5 = \frac{dz}{dx}$

$\therefore dx = \frac{dz}{5} = \frac{1}{5}\int 10^z\,dz = \frac{1}{5} \cdot \frac{10^z}{\ln 10} = \frac{10^{5x}}{5\ln 10} + c$

16. $\int x^{-9}dx =$ কত? **[BB'22]**

(a) $-9x^{-8} + c$ (b) $-9x^{-10} + c$

(c) $-\frac{1}{10}x^{-10} + c$ (d) $-\frac{x^{-8}}{8} + c$

সমাধান: (d); $\int x^{-9}dx = \frac{x^{-9+1}}{-9+1} + c = \frac{x^{-8}}{-8} + c$

17. $\int \frac{1}{\sqrt{18-2x^2}}dx =$ কত? **[BB, JB'22; DB, Ctg.B, CB'21]**

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{x}{3} + c$ (b) $\frac{1}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{3} + c$

(c) $\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + c$ (d) $\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + c$

সমাধান: (a); $\int \frac{1}{\sqrt{18-2x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{x}{3} + c$

18. $\int_0^1 \frac{e^{5x}+e^{3x}}{e^x+e^{-x}}dx$ এর মান কোনটি? [JB'22]

(a) $4(e^4-1)$ (b) $\frac{1}{5}(e^5-1)$

(c) $5(e^5-1)$ (d) $\frac{1}{4}(e^4-1)$

সমাধান: (d); $\int_0^1 \frac{e^{4x}(e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})}dx = \int_0^1 e^{4x}dx$

$= \left(\frac{e^{4x}}{4}\right)_0^1 = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^4-1)$

19. $f(x) = \sqrt{x}$ হলে- [JB'22]

(i) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (ii) $\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{3}$

(iii) $\int \frac{\sec^2 x}{f(\tan x)}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\tan x} + c$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8\theta\cos\theta\, d\theta$

ধরি, $\sin\theta = z, \cos d\theta = dz$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
z	0	1

$= \int_0^1 z^8dz = \left[\frac{z^9}{9}\right]_0^1 = \frac{1}{9}$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8\theta\cos\theta\, d\,\theta$ এর মান- [JB'22] [Ans: a]

(a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{1}{7}$ (d) 0

21. $\int \frac{1}{3\sqrt{x}}dx =$ কত? [CB'22; Ctg.B'21]

(a) $-\frac{2}{3}\sqrt{x}+c$ (b) $\frac{3}{2}\sqrt{x}+c$

(c) $\frac{2}{3}\sqrt{x}+c$ (d) $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x}+c$

সমাধান: (c); $\int \frac{1}{3\sqrt{x}}dx = \frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$= \frac{1}{3}\times 2\sqrt{x} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x}+c$

22. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} =$ কত? [CB, MB'22; RB, CB'21; BB'17]

(a) $\frac{\pi}{24}$ (b) $\frac{\pi}{12}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

সমাধান: (b); $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = [\tan^{-1}x]_1^{\sqrt{3}}$

$= \tan^{-1}(\sqrt{3}) - \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi-3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$

23. $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx =$ কত? [CB'22]

(a) $2\ln 2$ (b) $\frac{1}{2}\ln 2$

(c) $2(\ln 2)^2$ (d) $\frac{1}{2}(\ln 2)^2$

সমাধান: (d); ধরি, $\ln(x+1) = z \Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{dz}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dx}{x+1} = dz$

x	0	1
z	0	ln 2

এখন, $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx = \int_0^{\ln 2} zdz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\ln 2}$

$= \frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

অথবা, এখানে, $\frac{d}{dx}\{\ln(x+1)\} = \frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow d\{\ln(x+1)\} = \frac{dx}{x+1} \left[\because \int xdx = \frac{x^2}{2}+c\right]$

আবার, $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx = \int_0^1 \ln(x+1)\, d\{\ln(x+1)\}$

$= \left[\frac{\{\ln(x+1)\}^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\{(\ln 2)^2 - (\ln 1)^2\} = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

24. $f(x) = \frac{x}{3}$ এবং $g(x) = x^2$ হলে– [Din.B'22]

(i) $\int f(x)dx = \frac{x^2}{6} + c$

(ii) $\int \frac{-1}{1+g(x)}dx = -\cot x + c$

(iii) $g''(0) = 2$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (c);

(i) $\int f(x)\, dx = \int \frac{x}{3}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{6} + c$

(ii) $\int \frac{-1}{1+g(x)}dx = \int\frac{-1}{1+x^2}dx = \cot^{-1}x + c$

(iii) $g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x \Rightarrow g''(x) = 2$

$\therefore g''(0) = 2$

25. $\int \frac{5}{1-5x}dx$ এর মান কোনটি? [Din.B'22; SB'21]

(a) $\ln(1-5x)+c$ (b) $-\ln(1-5x)+c$

(c) $\frac{\ln(1-5x)}{5}$ (d) $\frac{-\ln(1-5x)}{5}$

সমাধান: (b);

$\int \frac{5}{1-5x}dx = \frac{5\ln|1-5x|}{-5} + c = -\ln|1-5x| + c$

26. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx =$ কত? [MB'22; RB'19]

(a) $2\sqrt{\cos x}+c$ (b) $2\sqrt{\sin x}+c$

(c) $\frac{1}{2}\sqrt{\cos x}+c$ (d) $\frac{1}{2}\sqrt{\sin x}+c$

সমাধান: (b); $\int\frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\sin x}}$

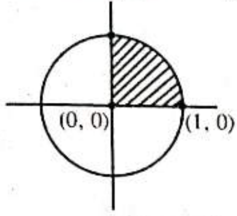
[ধরি, $z = \sin x \Rightarrow dz = \cos x\, dx$]

$= \int\frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + c = 2\sqrt{\sin x} + c$

27. $x^2 + y^2 = 1$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল– **[MB'22]**

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) π (d) 2π

সমাধান: (c); $x^2 + y^2 = 1 \therefore r = 1 \therefore \text{Area} = \pi$



or, $y = \sqrt{1 - x^2}$

$\therefore \text{Area} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$

$= \left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x}{1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ Total Area $= 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$ বর্গএকক।

28. $\int \sin\left(10 - \frac{x}{5}\right) dx =$ কত? **[DB'21]**

(a) $5\cos\left(10 - \frac{x}{5}\right) + c$

(b) $-5\cos\left(10 - \frac{x}{5}\right) + c$

(c) $-\frac{1}{5}\cos\left(10 - \frac{x}{5}\right) + c$

(d) $\frac{1}{5}\cos\left(10 - \frac{x}{5}\right) + c$

সমাধান: (a); $10 - \frac{x}{5} = y \Rightarrow -\frac{dx}{5} = dy \Rightarrow dx = -5dy$

$\therefore \int \sin\left(10 - \frac{x}{5}\right) dx = \int \sin y\,(-5\, dy)$

$= 5\cos y + c = 5\cos\left(10 - \frac{x}{5}\right) + c$

29. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx$ এর মান কত? **[DB, Ctg.B'21]**

(a) -1 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

সমাধান: (c); $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{2} \times \left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right] = \frac{1}{2} \times (1 - 0) = \frac{1}{2}$

30. $\int_0^1 e^{-2x}\, dx$ এর মান কোনটি? **[DB'21; RB'19; Ctg.B'17]**

(a) $2(1 - e^{-2})$ (b) $2(e^{-2} - 1)$

(c) $\frac{1}{2}(e^{-2} - 1)$ (d) $\frac{1}{2}(1 - e^{-2})$

সমাধান: (d); $\int_0^1 e^{-2x}\, dx = \frac{1}{-2}[e^{-2x}]_0^1$

$= -\frac{1}{2}[e^{-2} - e^0] = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$

31. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ উপবৃত্তটির ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? **[DB, SB'21; SB, Din.B'17]**

(a) 16π (b) 20π (c) 25π (d) 400π

সমাধান: (b); $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

$\therefore a = 4, b = 5 \therefore$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= \pi ab = 4 \times 5\pi = 20\pi$ বর্গ একক

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$f(x) = \cot x, g(x) = \text{cosec}^2 x$$

32. $\int f(x)\, dx =$ কত? **[DB'21]**

(a) $\text{cosec}^2 x + c$ (b) $-\text{cosec}^2 x + c$

(c) $\ln|\text{cosec}\, x| + c$ (d) $\ln(\sin x) + c$

সমাধান: (d); $\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c$

$\left[\because \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c\right]$

33. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর: **[DB'21]**

(i) $\int g\left(\frac{x}{2}\right) dx = -2\cot\frac{x}{2} + c$

(ii) $\frac{d}{dx}\left\{f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right\} = 2\sec^2 2x$

(iii) $\int f(x)\, g(x) dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x + c$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (d);

(i) $\int \text{cosec}^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = -\frac{\cot\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}} + c = -2\cot\left(\frac{x}{2}\right) + c$

(ii) $\frac{d}{dx}\left\{\cot\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right\} = \frac{d}{dx}(\tan 2x) = 2\sec^2 2x$

(iii) $\int \text{cosec}^2 x \cot x\, dx$

$= -\int \cot x\,(-\text{cosec}^2 x) dx$

$= -\int z dz = -\frac{z^2}{2} + c$

$= -\frac{1}{2}\cot^2 x + c$

ধরি, $\cot x = z$

$\Rightarrow -\text{cosec}^2 x\, dx = dz$

34. $\int \frac{1}{\cos^2 p\sqrt{\tan p}} dp = ?$ **[RB'21]**

(a) $\sqrt{\tan p} + c$ (b) $\sqrt{\cot p} + c$

(c) $2\sqrt{\tan p} + c$ (d) $2\sqrt{\cot p} + c$

সমাধান: (c); $\int \frac{\sec^2 p\, dp}{\sqrt{\tan p}}$

$= \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$

$= 2\sqrt{\tan p} + c$

$\tan p = u$

$\sec^2 p\, dp = du$

35. $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} p}{\sqrt{1-p^2}} dp$ এর মান কত? **[RB, CB'21]**

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi^2}{2}$ (c) $\frac{\pi^2}{4}$ (d) $\frac{\pi^2}{8}$

সমাধান: (d); $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} p dp}{\sqrt{1-p^2}}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{4} - 0\right] = \frac{\pi^2}{8}$

$u = \sin^{-1} p$

$\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} dp = du$

p	0	1
u	0	$\frac{\pi}{2}$

36. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{5-\cos x} dx$ এর মান- [Ctg.B'21]
(a) $\ln 20$ (b) $-\ln 20$
(c) $\ln 5 - \ln 4$ (d) $\ln 4 - \ln 5$
সমাধান: (c);
$5 - \cos x = u$
$\Rightarrow \sin x\, dx = du$

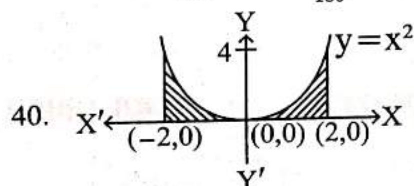
x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	4	5

$\therefore \int_4^5 \frac{du}{u} = [\ln u]_4^5 = \ln 5 - \ln 4$

37. $y = x^2$, x-অক্ষ, $x = 0$ এবং $x = 3$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল- [Ctg.B, JB'21]
(a) 3 (b) 6 (c) 8 (d) 9
সমাধান: (d); $x = 3$ $A = \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3$
$= \left[\frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = 9$ বর্গ একক।

38. $f(x) = \ln(x)$ হলে- [Ctg.B'21]
(i) $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{x}$
(ii) $\int f(x)\, dx = x\ln(x) - x + c$
(iii) $\int_1^2 f(x)\, dx = \ln 2$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (a); (i) সত্য (ii) এর ক্ষেত্রে $\int 1.\ln x\ dx$
$= \ln x \int 1.dx - \left\{\frac{d}{dx}(\ln x) \int 1.dx\right\} dx$
$= x\ln x - \int \frac{x}{x} dx$
$= x\ln x - x + c$
(iii) $\int_1^2 \ln x\ dx = [x\ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 2 + 1$
$= 2\ln 2 - 1$

39. $\int \sin x°\ dx =$ কত? [Ctg.B'21; DB'17]
(a) $-\cos x° + c$ (b) $\cos x° + c$
(c) $-\frac{180°}{\pi} \cos \frac{\pi x}{180} + c$ (d) $\frac{180°}{\pi} \cos \frac{\pi x}{180} + c$
সমাধান: (c); $x° = \left(\frac{\pi x}{180}\right)^c \therefore \int \sin x°\, dx$
$= \int \sin \frac{\pi x}{180} dx = \frac{-\cos\frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi}{180}} = -\frac{180}{\pi} \cos \frac{\pi x}{180} + c$

40. 

চিত্রে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [SB'21; Din.B'19]
(a) $\frac{32}{3}$ (b) $\frac{16}{3}$ (c) $\frac{8}{3}$ (d) $\frac{4}{3}$
সমাধান: (b); নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^2 x^2\, dx$
$= \frac{2}{3}[x^3]_0^2 = \frac{2}{3}[2^3 - 0] = \frac{16}{3}$ বর্গএকক

41. $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \sin^2 x$ হলে- [SB'21]
(i) $g'(x) = f(x)$ (ii) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx = 1$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (c); $g(x) = \sin^2 x$
$\Rightarrow g'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x = f(x)$
আবার, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\ dx = -\left[\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$= -\frac{1}{2}[\cos \pi - \cos 0] = \frac{1}{2}[-1 - 1] = 1$
আবার, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{\sin^2 x}$
$= \lim_{x\to 0} 2\cot x =$ অসংজ্ঞায়িত

42. $\int \frac{dx}{1-\cos x} = f(x) + c$ হলে $f(x)$ এর মান কোনটি? [SB'21; RB'19; All.B'18]
(a) $-\cot\frac{x}{2}$ (b) $-2\cot\frac{x}{2}$
(c) $2\cot\frac{x}{2}$ (d) $\cot\frac{x}{2}$
সমাধান: (a); $\int \frac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}\ dx$
$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cot\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}\right] + c = -\cot\frac{x}{2} + c$

43. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\frac{x}{2} dx$ এর মান কত? [SB'21]
(a) -2 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2
সমাধান: (d); $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\frac{x}{2} dx = \left[\frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$= 2[1 - 0] = 2$

44. $f(\theta) = \cos 2\theta$ হলে- [SB'21]
(i) $\int f(\theta)\, d\theta = \frac{\sin 2\theta}{2} + c$
(ii) $\int \sqrt{1 - f(\theta)}\, d\theta = -\sqrt{2}\cos\theta + c$
(iii) $\int \sqrt{1 + f(\theta)}\ d\theta = \sqrt{2}\sin\theta + c$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (d); $\int \cos 2\theta\ d\theta = \frac{\sin 2\theta}{2} + c$
আবার, $\int \sqrt{1 - \cos 2\theta}\, d\theta = \int \sqrt{2\sin^2\theta}\ d\theta$
$= \int \sqrt{2}\sin\theta\, d\theta = -\sqrt{2}\cos\theta + c$
আবার, $\int \sqrt{1 + \cos 2\theta}\ d\theta = \int \sqrt{2\cos^2\theta}\ d\theta$
$= \int \sqrt{2}\cos\theta\ d\theta = \sqrt{2}\sin\theta + c$

45. x এর একটি ফাংশন f(x) হলে, $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx =$ কত? [BB'21; JB'17] [Ans: d]
(a) $f'(x) + c$ (b) $f(x) + c$
(c) $\ln|f'(x)| + c$ (d) $\ln|f(x)| + c$

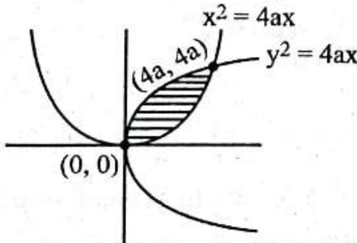
46. যোগজীকরণের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য- [BB'21] [Ans: d]
(i) $\int f(x)\, dx = F(x) + c$, যেখানে c হল যোগজীকরণ ধ্রুবক
(ii) f(x) কে যোজ্য ফাংশন (Integrand) বলে
(iii) $\frac{d}{dx}$ ও $\int dx$ পরস্পর বিপরীত প্রক্রিয়া
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

47. $\int \sqrt{2-3x}\, dx =$ কত? [BB'21]
(a) $-\frac{2}{9}(2-3x)^{\frac{3}{2}} + c$ (b) $-\frac{1}{6}(2-3x)^{-\frac{1}{2}} + c$
(c) $-(2-3x)^{\frac{3}{2}} + c$ (d) $-3(2-3x)^{-\frac{1}{2}} + c$
সমাধান: (a); $\int (2-3x)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}(2-3x)^{\frac{3}{2}} + c$
$= -\frac{2}{9}(2-3x)^{\frac{3}{2}} + c$

48. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = K \cot^{-1}\frac{a}{x} + c$ হলে, K = ? [BB'21]
(a) $-a$ (b) $-\frac{1}{a}$ (c) $\frac{1}{a}$ (d) a
সমাধান: (c); $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$
$= \frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{a}{x} + c \therefore K = \frac{1}{a}$

49. $y^2 = 4ax$ ও $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত দুটি দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের জন্য কোন যোগজটি সঠিক? [BB'21]
(a) $\int_0^{4a}\left(2\sqrt{ax} - \frac{x^2}{4a}\right) dx$ (b) $\int_0^{4a}\left(2\sqrt{ax} - \frac{4a}{x^2}\right) dx$
(c) $\int_0^{4a}\left(\frac{4a}{x^2} - 2\sqrt{ax}\right) dx$ (d) $\int_0^{4a}\left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{2a}\right) dx$

সমাধান: (a);

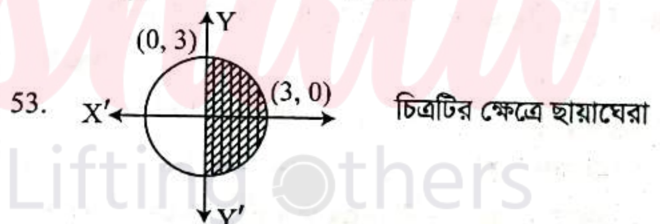


$x^2 = 4ay$ এবং $y^2 = 4ax$ সমাধান করে পাই ছেদবিন্দুগুলো (0,0), (4a, 4a)
$y^2 = 4ax \Rightarrow y = 2\sqrt{ax}$; আবার, $x^2 = 4ay \Rightarrow y = \frac{x^2}{4a}$
$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^{4a}\left(2\sqrt{ax} - \frac{x^2}{4a}\right) dx$ বর্গ একক।

50. F(x) = cosec x হলে- [JB'21]
(i) $\int F(x)\, dx = \ln|\text{cosec}\, x + \cot x| + c$
(ii) $\int F(x)\, dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$
(iii) $\int F(x)\, dx = -\ln|\text{cosec}\, x + \cot x| + c$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (c); $\int \text{cosec}\, x\, dx = \ln|\text{cosec}\, x - \cot x| + c$
আবার, $\int \text{cosec}\, x\, dx = -\ln|\text{cosec}\, x + \cot x| + c$
এবং $\int \text{cosec}\, x\, dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

51. $\int \frac{\tan(\ln x)}{x} dx =$ কত? [CB'21]
(a) $\ln(\sec^2 x) + c$ (b) $\ln\sec(\ln x) + c$
(c) $\ln(\sec x) + c$ (d) $\ln(\tan^2 x) + c$
সমাধান: (b); $\int \frac{\tan(\ln x)}{x} dx = \int \tan z\, dz$
$= \ln|\sec z| + c = \ln|\sec(\ln x)| + c$
$\left[z = \ln x \Rightarrow dz = \frac{1}{x}dx\right]$

52. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx =$ কত? [Din.B, CB'21]
(a) $\frac{1}{2}f(x) + c$ (b) $\sqrt{f(x)} + 0$
(c) $2f(x) + c$ (d) $2\sqrt{f(x)} + c$
সমাধান: (d); ধরি, $f(x) = z \therefore f'(x)dx = dz$
$\therefore \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + c = 2\sqrt{f(x)} + c$

53. 

চিত্রটির ক্ষেত্রে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [CB'21]
(a) $\frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{9\pi}{4}$ (c) $\frac{9\pi}{2}$ (d) 9π
সমাধান: (c); $\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \times 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2}$ বর্গ একক
[চিত্র হতে r = 3]

54. যদি $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln P$ হয় তবে P এর মান কত? [Din.B'21]
(a) 3 (b) 9 (c) 10 (d) 81
সমাধান: (a); $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}[\ln|2x-1|]_1^5$
$= \frac{1}{2}[\ln 9 - \ln 1] = \ln 3 = \ln P \therefore P = 3$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = \tan x$ এবং $g(x) = \sec^2 x$.

55. $\int f(x)\,dx =$ কত? [Din.B'21]

(a) $-\ln\cos x + c$ (b) $-\ln\sec x + c$
(c) $\ln\cos x + c$ (d) $\ln\sin x + c$

সমাধান: (a); $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + c$
$= \ln|\cos x|^{-1} + c = -\ln|\cos x| + c$

56. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x\{f(x) + g(x)\}\,dx =$ কত? [Din.B'21]

(a) 0 (b) $e^{\frac{\pi}{4}}$ (c) 1 (d) $e^{\frac{\pi}{4}} - 1$

সমাধান: (b); $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x\{\tan x + \sec^2 x\}dx$
$= [e^x \tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[e^{\frac{\pi}{4}}\tan\frac{\pi}{4} - e^0\tan 0\right] = e^{\frac{\pi}{4}}$

57. $f(x) = \cos x$ হলে- [Din.B'21]

(i) $f'(2t) = -\sin 2t$
(ii) $\int f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = -\cos x + c$
(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)\,dx = \frac{1}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (d); $f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(2t) = -\sin 2t$
$\int f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \int \sin x\;dx = -\cos x + c$
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int f(2x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$
$= \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}$

58. $\int \frac{4x^3}{1+x^8}dx = f(x) + c$ হলে $f(x)$ এর মান কত? [Din.B'21]

(a) $\frac{1}{1+x^2}$ (b) $\sin^{-1}x^3$
(c) $\tan^{-1}x^4$ (d) $\tan^{-1}x^3$

সমাধান: (c); $\int \frac{4x^3}{1+(x^4)^2}dx = \int \frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1}(z) + c$
$= \tan^{-1}(x^4) + c$ [ধরি, $x^4 = z \Rightarrow 4x^3dx = dz$]

59. $\int \frac{\ln x^2}{x}dx =?$ [MB'21]

(a) $2(\ln x)^2 + c$ (b) $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$
(c) $\ln x + c$ (d) $(\ln x)^2 + c$

সমাধান: (d); $\ln x^2 = y \therefore \frac{2xdx}{x^2} = dy \Rightarrow \frac{2}{x}dx = dy$
$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{2} \therefore \int \frac{\ln x^2}{x}dx = \int \frac{y}{2}dy = \frac{y^2}{4} + c$
$= \frac{(\ln x^2)^2}{4} + c = \frac{(2\ln x)^2}{4} + c = (\ln x)^2 + c$

বিকল্প: $\int \frac{\ln x^2}{x}dx = \int \frac{2\ln x}{x}dx$ | ধরি, $\ln x = z$
$= 2\int z dz = 2.\frac{z^2}{2} + c = (\ln x)^2 + c$ | $\Rightarrow \frac{1}{x}dx = dz$

60. $\int_0^1 xe^{x^2}dx$ এর মান- [MB'21]

(a) $1 - \frac{2}{e}$ (b) 1 (c) $\frac{1}{2}(e-1)$ (d) $\frac{1}{4}e$

সমাধান: (c); $\int_0^1 xe^{x^2}dx$ | $x^2 = u$, $2xdx = du \Rightarrow x\,dx = \frac{du}{2}$

x	0	1
u	0	1

$= \int_0^1 \frac{e^u}{2}du$
$= \frac{1}{2}[e^u]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = \sec x$ এবং $g(x) = \tan x$

61. $\int f(x)dx =?$ [MB'21]

(a) $\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + c$ (b) $\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c$
(c) $\ln|\sec x - \tan x| + c$ (d) $\ln|\tan x - \sec x| + c$

সমাধান: (b); $\int \sec x\,dx = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c$

62. $\int e^x f(x)\{1 + g(x)\}dx =?$ [MB'21]

(a) $e^x f(x) + c$ (b) $e^x g(x) + c$
(c) $-e^x f(x) + c$ (d) $-e^x g(x) + c$

সমাধান: (a); $\int e^x \sec x\,(1 + \tan x)dx$
$= \int e^x(\sec x + \sec x\tan x)dx$
$= \int e^x\left\{\sec x + \frac{d}{dx}(\sec x)\right\}dx$
$= e^x\sec x + c = e^x f(x) + c$

63. $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx =?$ [MB'21]

(a) $\ln 2 - 2$ (b) $1 - 2\ln 2$
(c) $2\ln 2 - 1$ (d) $2\ln 2 + 2$

সমাধান: (c); $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{2-(1+x)}{1+x}dx$
$= \int_0^1\left(\frac{2}{1+x} - 1\right)dx = [2\ln|1+x| - x]_0^1$
$= 2\ln 2 - 1$

64. $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx$ এর মান- [DB'19; RB'17]

(a) 0 (b) 1 (c) $\ln 3$ (d) $\ln 2$

সমাধান: (d); $\int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = [\ln|1+x^2|]_0^1$
$= \ln|1+1| - \ln|1+0| = \ln 2$

65. $\int e^x(\cos x - \sin x)dx =?$ [DB'19]

(a) $e^x\sin x + c$ (b) $e^x\cos x + c$
(c) $-e^x\cos x + c$ (d) $-e^x\sin x + c$

সমাধান: (b); $\int e^x(\cos x - \sin x)\,dx$
$= \int e^x\left[\cos x + \frac{d}{dx}(\cos x)\right]dx = e^x\cos x + c$

66. $\int \sin^4 x \cos x dx = f(x) + c$, যেখানে c একটি ধ্রুবক হলে $f(x) = ?$ [Ctg.B'19]
(a) $\frac{1}{5}\cos^5 x$ (b) $\frac{1}{5}\sin^5 x$
(c) $\frac{-\sin^5 x \cos^2 x}{10}$ (d) $-\frac{1}{5}\cos^5 x$
সমাধান: **(b)**; ধরি, $\sin x = z \Rightarrow \cos x\, dx = dz$
$\int z^4 dz = \frac{z^5}{5} + c = \frac{\sin^5 x}{5} + c$

67. $\int xe^{x^2} dx = ? + c$ [Ctg.B'19]
(a) $2e^{x^2}$ (b) e^{x^2} (c) xe^{x^2} (d) $\frac{1}{2}e^{x^2}$
সমাধান: **(d)**; ধরি, $x^2 = z \Rightarrow 2xdx = dz \Rightarrow xdx = \frac{dz}{2}$
$\frac{1}{2}\int e^z dz = \frac{1}{2}e^z + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

68. $\int_0^1 \frac{\cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ এর মান কত? [Ctg.B'19]
(a) $\frac{\pi^2}{8}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{8}$ (d) $\frac{\pi}{4}$
সমাধান: **(a)**; $z = \cos^{-1} x \Rightarrow -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dz$

x	0	1
z	π/2	0

$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} z dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} - 0 = \frac{\pi^2}{8}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x$

69. $\int g(x)dx =$ কত? [SB'19]
(a) $x + c$ (b) $2x^2 + c$ (c) $2x + c$ (d) $x^2 + c$
সমাধান: **(d)**; $\int 2x\, dx = 2\frac{x^2}{2} + c = x^2 + c$

70. $\int_0^1 e^x\{f(x) + g(x)\}dx =$ কত? [SB'19]
(a) e (b) −e (c) 2e (d) −2e
সমাধান: **(a)**; $\int_0^1 e^x\{x^2 + 2x\}dx$
$= \int_0^1 e^x\left\{x^2 + \frac{d}{dx}(x^2)\right\}dx = [e^x x^2]_0^1 = e$

71. $\int \sqrt{9 - x^2}\, dx =$ কত? [SB'19]
(a) $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} + c$
(b) $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} - \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} + c$
(c) $\frac{x}{2}\sqrt{9-x} + \frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} + c$
(d) $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} - \frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} + c$
সমাধান: **(a)**;
$\int \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

72. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} dx =$ কত? [BB'19]
(a) $\frac{1}{2}\sec 2x + c$ (b) $2\sec 2x + c$
(c) $\frac{1}{2}\ \mathrm{cosec}\, 2x + c$ (d) $2\ \mathrm{cosec}\, 2x + c$
সমাধান: **(a)**; $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} dx = \int \tan 2x\,.\sec 2x\, dx$
$= \frac{1}{2}\sec 2x + c$

73. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = f(x) + c$ হলে $f(x)$ এর মান- [JB'19]
(a) $\cos^{-1} x$ (b) $\sec^{-1} x$
(c) $\sin^{-1} x$ (d) $\mathrm{cosec}^{-1} x$
সমাধান: **(b)**; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + c$

74. $\int_0^{\pi/2} 2\sin^2 x dx = ?$ [JB'19]
(a) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 1 (d) 2
সমাধান: **(b)**; $\int_0^{\pi/2} 2\sin^2 x dx$
$= \int_0^{\pi/2}(1 - \cos 2x)dx = \left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$

75. $\int \sin\left(5 - \frac{x}{10}\right)dx = f(x) + c$ হলে $f(x)$ এর মান কত? [CB'19]
(a) $-10\cos\left(5 - \frac{x}{10}\right)$ (b) $10\cos\left(5 - \frac{x}{10}\right)$
(c) $-\frac{1}{10}\cos\left(5 - \frac{x}{10}\right)$ (d) $\frac{1}{10}\cos\left(5 - \frac{x}{10}\right)$
সমাধান: **(b)**; ধরি, $5 - \frac{x}{10} = z \therefore -\frac{1}{10}dx = dz$
$\therefore dx = -10dz; \int \sin\left(5 - \frac{x}{10}\right)dx$
$= -10\int \sin z\, dz = -10.(-\cos z) + c$
$= 10\cos\left(5 - \frac{x}{10}\right) + c$

76. $\int_0^1 e^{5x+3}dx$ এর মান কত? [CB'19]
(a) $e^8 - e^3$ (b) $(e^3 - e^8)$
(c) $\frac{1}{5}(e^8 - e^3)$ (d) $5(e^8 - e^3)$
সমাধান: **(c)**; $\int_0^1 e^{5x+3}dx = \frac{1}{5}[e^{5x+3}]_0^1$
$= (e^8 - e^3).\frac{1}{5}$

77. $\int \frac{\ln x}{x} dx$ এর মান কোনটি? [Din.B'19]
(a) $2(\ln x)^2 + c$ (b) $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$
(c) $\ln x + c$ (d) $2\ln x + c$
সমাধান: **(b)**; $\int \ln x\, d(\ln x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$

78. $\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x dx =$ কত? [Din.B'19]
(a) $-\frac{1}{4}$ (b) $\frac{e}{2} - \frac{1}{4}$ (c) $\frac{e}{2} + \frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{4}$
সমাধান: **(d)**; $\int x\ln x dx$
$= \ln x\int x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\ln x)\int x dx\right\}dx$
$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$
$\therefore \int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^{\sqrt{e}}$
$= \frac{e}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{e}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}} =$ কত? [Ctg.B'17]

(a) $\sin^{-1}x + C$ (b) $\sin^{-1}\frac{x}{6} + C$

(c) $\frac{1}{6}\sin^{-1}x + C$ (d) $\frac{1}{6}\sin^{-1}\frac{x}{6} + C$

সমাধান: (b); $\int \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{6^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{6} + C$

80. $\int \operatorname{cosec}x\, dx$ -এর মান কোনটি? [SB'17] [Ans: c]

(a) $\ln|\sin x| + c$ (b) $\ln|\sec x| + c$

(c) $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$ (d) $\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + c$

81. $\int \ln x\, dx =$? [BB'17]

(a) $\frac{1}{x}$ (b) $x\ln x - x$

(c) $x\ln x + x$ (d) $\frac{1}{x^2}$

সমাধান: (b); $I = \int \ln x\, dx$

$= \ln x \int dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\ln x).\int dx\right\}dx$

$= \ln x\int dx - \int \frac{1}{x}.\ x\, dx$

$\ln x\int dx - \int dx = x\ln x - x + c$

82. $\int \frac{e^{\theta}d\theta}{1+e^{\theta}} =$? [BB'17]

(a) $\ln(1+e^{\theta}) + c$ (b) $1 + e^{\theta} + c$

(c) $\ln e^{\theta} + c$ (d) $\theta + c$

সমাধান: (a); $\int \frac{e^{\theta}\, d\theta}{1+e^{\theta}}\left[\frac{d}{dx}(1+e^{\theta}) = e^{\theta}\right]$

$\therefore \int \frac{e^{\theta}\, d\theta}{1+e^{\theta}} = \ln|1+e^{\theta}| + c$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = \ln 2x.$

83. f(x) বক্ররেখার $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল কোনটি? [JB'17]

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) 4

সমাধান: (b); $\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x}$ $\therefore \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=2} = \frac{1}{2}$

84. $\int f(x)dx$ এর মান কোনটি? [JB'17]

(a) $\frac{1}{2x} + C$ (b) $\frac{1}{x} + C$

(c) $x\ln 2x + x + C$ (d) $x\ln 2x - x + C$

সমাধান: (d); $\int f(x)\, dx$

$= \int \ln 2x\, dx = \frac{1}{2}(2x\ln 2x - 2x)$

$= x\ln 2x - x + C\ [\because \int \ln x\, dx = x\ln x - x + c]$

85. $f(x) = \sin 2x, g(x) = \sin^2 x.$; x এর প্রেক্ষিতে $\frac{f(x)}{g(x)}$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ কোনটি? [CB'17]

(a) $2\ln|1+\cos 2x| + c$ (b) $-\ln|1-\cos 2x| + c$

(c) $\ln|1+\cos 2x| + c$ (d) $\ln|1-\cos 2x| + c$

সমাধান: (d); $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{2\sin x.\cos x}{\sin^2 x}dx\ [\int \frac{f'(x)}{f(x)}$ আকৃতি]

$= \ln|\sin^2 x| + c = \ln\left|\frac{1-\cos 2x}{2}\right| + c'$

$= \ln|1-\cos 2x| - \ln 2 + c' = \ln|1-\cos 2x| + c$

86. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ এর মান নিচের কোনটি? [CB'17]

(a) −1 (b) 0 (c) 1 (d) 2

সমাধান: (c); $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1$

◆ **MCQ:** বিভিন্ন লেখকের মূল বইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

মোঃ কেতাব উদ্দীন স্যার

01. $\int \sin ax\, dx =$?

(a) $\frac{1}{a}\cos ax + c$ (b) $-\frac{1}{a}\cos ax + c$

(c) $a\cos ax + c$ (d) $-a\cos ax + c$

সমাধান: (b); $\int \sin ax\ dx = -\frac{\cos ax}{a} + c$

$= -\frac{1}{a}\cos ax + c$

02. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$?

(a) $\frac{7}{16}$ (b) $\frac{28}{3}$ (c) 1 (d) 2

সমাধান: (d); $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2[\sqrt{x}]_1^4$

$= 2(2-1) = 2$

03. $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ পরাবৃত্ত ও তার উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$

সমাধান: (c); $y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 2y - 1$

$= 2(y-1)$ $\therefore x^2 = 4.\frac{1}{2}(2y-1)$ $\therefore a = \frac{1}{2}$

∴ উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা অবাদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{8}{3}a^2 = \frac{8}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{3}$ বর্গ একক

04. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$ এর মান কত?

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{7}{3}$ (c) $\frac{28}{15}$ (d) $\frac{8}{15}$

সমাধান: (d); $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$

$= \frac{4.2}{5.3.1} = \frac{8}{15}$ [wallis' theorem]

05. $\int \frac{dx}{ay-bx} = f(x) + c$ হলে, $f(x)$ নিচের কোনটি?

(a) $-\frac{1}{b}\ln(ay-bx)$ (b) $\frac{1}{b}\ln(ay-bx)$
(c) $\ln(ay-bx)$ (d) $-\frac{1}{a}\ln(ay-bx)$

সমাধান: (a); $\int \frac{1}{ay-bx}dx = -\frac{1}{b}\int \frac{-b}{ay-bx}dx$
$= -\frac{1}{b}\ln(ay-bx) + c \left[\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c\right]$

06. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}} = ?$

(a) $\frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{3} + c$ (b) $\frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{3} + c$
(c) $\frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{4x}{3} + c$ (d) $\frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{4x}{3} + c$

সমাধান: (b); $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - x^2}}$
$= \frac{1}{4}\times \sin^{-1}\left(\frac{x}{\frac{3}{4}}\right) + c = \frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{x} + c$

07. $pv = 5$ হলে, $\int_1^2 pdv$ এর মান কত?

(a) $5(\ln 2 - 1)$ (b) $5\ln 2$
(c) $-5\ln 2$ (d) $\frac{3}{10}$

সমাধান: (b); $\int_1^2 p\,dv = \int_1^2 \frac{5}{v}dv = 5.$
$\int_1^2 \frac{1}{v}dv = 5[\ln v]_1^2 = 5(\ln 2 - \ln 1) = 5\ln 2$

08. $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ ও $y = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কোনটি? **[Ans: b]**

(a) $\frac{1}{4}\pi a^2$ (b) $\frac{1}{2}\pi a^2$ (c) πa^2 (d) $\frac{1}{2}a^2$

এস ইউ আহাম্মদ স্যার

09. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = f(x) + c$ হলে, $f(x) =$ কত?

(a) $2/\sqrt{1+\ln x}$ (b) $2\sqrt{1+\ln x}$
(c) $\sqrt{1+\ln x}$ (d) কোনোটি নয়

সমাধান: (b); $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\ln x}}dx$
$= 2\sqrt{1+\ln x} + c \left[\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c\right]$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}} = f(x) + c$ হলে, $f(x) =$ কত?

(a) $\sqrt{\tan x}$ (b) $2\sqrt{\tan x}$
(c) $\frac{1}{2\sqrt{\tan x}}$ (d) কোনোটি নয়

সমাধান: (b); $\int \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}dx = \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}dx$
$= 2\sqrt{\tan x} + c \left[\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c\right]$

11. $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}dx = f(x) + c$ হলে, $f(x) =$ কত?

(a) $e^x \tan x$ (b) $\sec(x e^x)$
(c) $\tan(x e^x)$ (d) কোনোটি নয়

সমাধান: (c); $\int \sec^2(xe^x)(e^x + xe^x)\,dx$
ধরি, $xe^x = z \Rightarrow dz = (e^x + xe^x)dx$
$\therefore \int \sec^2 z\,dz = \tan z + c = \tan(xe^x) + c$

12. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x\cos x} = f(x) + c$ হলে, $f(x) =$ কত?

(a) $\tan x$ (b) $\cot x$
(c) $2\sqrt{\tan x}$ (d) $\frac{\sqrt{\tan x}}{2}$

সমাধান: (c); $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x.\cos x}dx = \int \frac{\sqrt{\sin x}}{\sin x.\sqrt{\cos x}.\cos x}dx$
$= \int \frac{1}{\sqrt{\sin x}.\sqrt{\cos x}.\cos x}dx = \int \frac{1}{\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}}\cos x.\cos x}dx$
$= 2\int \frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}dx = 2\sqrt{\tan x} + c$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{4-\sin x}$ এর মান-

(a) $\frac{1}{2}\ln 2$ (b) $\frac{1}{4}\ln 3$ (c) $\ln\frac{2}{3}$ (d) $\ln\frac{4}{3}$

সমাধান: (d); $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4-\sin x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{4-\sin x}dx$
$= -[\ln|4-\sin x|]_0^{\pi/2} = -(\ln 3 - \ln 4) = \ln\frac{4}{3}$

14. $\int \frac{dx}{1+\cos x} = f(x) + c$ হলে, $f(x) = ?$

(a) $2\sec\frac{x}{2}$ (b) $\tan\frac{x}{2}$ (c) $\sec\frac{x}{2}$ (d) $2\tan\frac{x}{2}$

সমাধান: (b); $\int \frac{1}{1+\cos x}dx = \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$
$= \frac{1}{2}.\int \sec^2\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}.\frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + c = \tan\frac{x}{2} + c$

15. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = f(x) + c$ হলে, $f(x) = ?$

(a) $\frac{1}{2}\tan^{-1}e^x$ (b) $\tan^{-1}e^x$
(c) $\tan^{-1}e^{2x}$ (d) কোনোটিই নয়

সমাধান: (b); $\int \frac{e^x dx}{1+(e^x)^2}dx = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2}$
$= \tan^{-1}e^x + c$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^2 \sin x\,dx = ?$

(a) $\frac{8}{7}$ (b) $\frac{5}{8}$ (c) $\frac{2}{7}$ (d) $\frac{7}{3}$

সমাধান: (d); $z = 1 + \cos x \Rightarrow dz = -\sin x$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^2 \sin x\,dx$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^2(-\sin x)dx$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
z	2	1

$= -\int_2^1 z^2\,dz = -\left[\frac{z^3}{3}\right]_2^1 = -\left[\frac{1}{3} - \frac{8}{3}\right] = \frac{7}{3}$

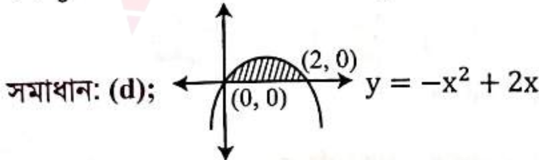
17. $\int_0^{\pi/2}(\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta$ এর মান–
(a) 1 (b) 2 (c) $\sqrt{2}$ (d) -2
সমাধান: **(b)**; $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta$
$=[-\cos\theta+\sin\theta]_0^{\pi/2}=1-(-1)=2$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\sec^2 x\,dx$ এর মান–
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) 1
সমাধান: **(b)**; $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x.\sec^2 x\,dx$
$=\left[\frac{\tan^3 x}{3}\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{3}$

19. $\int_0^{\pi/4}\frac{e^x\,dx}{2+e^x}$ এর মান–
(a) $\ln 3/2$ (b) $\ln 5/3$ (c) $\ln 4/3$ (d) $\ln 3/4$
সমাধান: **(b)**; $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^x}{2+e^x}dx=[\ln|2+e^x|]_0^{\ln 3}$
$=\ln(2+3)-\ln(2+1)=\ln\frac{5}{3}$

20. $\int_0^{\pi/6}\sin 3x\cos 3x\,dx$ এর মান–
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{2}{5}$ (d) $\frac{1}{6}$
সমাধান: **(d)**; $\int_0^{\pi/6}\sin 3x.\cos 3x\,dx$
$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}2\sin 3x.\cos 3x\,dx$
$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}\sin 6x\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 6x}{6}\right]_0^{\pi/6}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}$

21. $\int x^{-1}\,dx$ এর মান কোনটি?
(a) $\ln|x|+c$ (b) ∞
(c) 0 (d) $\frac{1}{x^2}+c$
সমাধান: **(a)**; $\int x^{-1}dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$

22. $y=2x-x^2$ বক্ররেখা এবং x- অক্ষদ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?
(a) $\frac{16}{3}$ বর্গ একক (b) $\frac{8}{3}$ বর্গ একক
(c) $\frac{32}{3}$ বর্গ একক (d) $\frac{4}{3}$ বর্গ একক
সমাধান: **(d)**;


$y=0$ হলে, $x=0,2$
$\therefore$ ক্ষেত্রফল $=\int_0^2(2x-x^2)\,dx=\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2$
$=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$ বর্গএকক

23. $\int e^x\left[f(x)+\frac{d}{dx}\{f(x)\}\right]dx=$ কত?
(a) e^x+c (b) $e^x f(x)+c$
(c) $\frac{e^x}{f(x)}+c$ (d) $f(x)+c$

24. $\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\cos^2\theta\,d(\tan\theta)$ এর মান-
(a) $\tan^{-1}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ (b) $\frac{1}{3}\cos^3\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
(c) $n\pi$ (d) $\frac{n\pi}{2}$
সমাধান: **(a)**; $\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\cos^2\theta\,d(\tan\theta)$
$=\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\cos^2\theta\sec^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{n\pi}{2}}1.d\theta=[\theta]_0^{\frac{n\pi}{2}}$
$=[\tan^{-1}(\tan\theta)]_0^{\frac{n\pi}{2}}$ [∵ খেয়াল কর, Limit টা কিন্তু $\tan\theta$ এর] $=\tan^{-1}\frac{n\pi}{2}$

25. $\int e^x\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$ এর মান কোনটি?
(a) $e^x\cos\left(\frac{x}{2}\right)+c$ (b) $e^x\sin\left(\frac{x}{2}\right)+c$
(c) $e^x\tan\left(\frac{x}{2}\right)+c$ (d) $e^x\cot\left(\frac{x}{2}\right)+c$
সমাধান: **(c)**; $\int e^x\left(\frac{1+2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx$
$=\int e^x\left(\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}\right)dx$
$=\int e^x\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\right)dx$
$=e^x\tan\frac{x}{2}+c\left[\because\frac{d}{dx}\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\right]$

অসীম কুমার সাহা স্যার

26. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}$ হলে y এর মান নিচের কোনটি?
(a) $-\ln|x|+c$ (b) $-\ln|x|+c_1x+c$
(c) $-\ln|x|+c_1x$ (d) $\frac{6}{x^4}$
সমাধান: **(b)**; $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\Rightarrow\int\frac{d^2y}{dx^2}dx=\int\frac{1}{x^2}dx$
$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x}+c_1\Rightarrow\int\frac{dy}{dx}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+c_1\right)dx$
$\Rightarrow y=-\ln|x|+c_1x+c$

27. $\int 3^{3^x}3^x dx=$ কত?
(a) $\frac{3^x}{\ln 3}+c$ (b) $\frac{3^{3^x}}{\ln 3}+c$
(c) $\frac{3^x}{(\ln 3)^2}+c$ (d) $\frac{3^{3^x}}{(\ln 3)^2}+c$
সমাধান: **(d)**; $\int 3^{3^x}.3^x\,dx$
$\therefore\int 3^{3^x}.3^x\,dx$
$=\int\frac{dz}{(\ln 3)^2}dz$
$=\frac{z}{(\ln 3)^2}+c$
$=\frac{3^{3^x}}{(\ln 3)^2}+c$

$3^{3^x}=z$
$\Rightarrow 3^{3^x}.3^x(\ln a)^2dx$
$=dz$
$3^{3^x}3^xdx=\frac{dz}{(\ln 3)^2}$

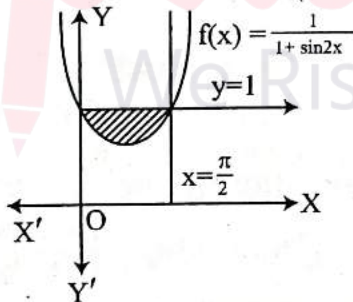
28. $\int e^{10x}\sin 6x\,dx =$ কত?
(a) $\frac{10e^{10x}\sin 6x+6e^{10x}\cos 6x}{136}+c$
(b) $\frac{10e^{10x}\sin 6x-6e^{10x}\cos 6x}{136}+c$
(c) $\frac{10e^{10x}\sin 6x+6e^{10x}\sin 6x}{136}+c$
(d) $\frac{10e^{10x}\sin 6x-6e^{10x}\sin 6x}{136}+c$
সমাধান: (b); $\int e^{ax}\sin bx\,dx$
$=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx-b\cos bx]+c$
$\therefore \int e^{10x}\sin 6x\,dx$
$=\frac{e^{10x}}{10^2+6^2}[10\sin 6x-6\cos 6x]+c$
$=\frac{10e^{10x}\sin 6x-6e^{10x}\cos 6x}{136}+C$

29. $\int e^x(x^2+2x)dx =$ কত?
(a) xe^x+c (b) $2e^x.x+c$
(c) $2x.e^{x^2}+c$ (d) $e^x.x^2+c$
সমাধান: (d); $\int e^x(x^2+2x)dx = e^x.x^2+c$
$[\because \int e^x\{f(x)+f'(x)\}dx = e^xf(x)+c]$

30. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\,dx =$ কত?
(a) $\frac{35}{16}$ (b) $\frac{16}{35}$ (c) $\frac{1}{35}$ (d) $\frac{1}{16}$
সমাধান: (b); $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\,dx = \frac{2.4.6}{1.3.5.7}=\frac{16}{35}$
[wallis' Theorem]

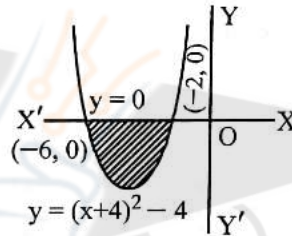
31. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{11}x\,dx =$ কত?
(a) $\frac{256}{693}$ (b) $\frac{128}{2079}$ (c) $\frac{1}{256}$ (d) $\frac{1}{693}$
সমাধান: (a); $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{11}x\,dx = \frac{2.4.6.8.10}{1.3.5.7.9.11}=\frac{256}{693}$
[Wallis' Theorem]

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



32. $\int f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx =$ কত?
(a) $\frac{1}{2}(\tan 2x-\sec 2x)+c$ (b) $\tan 2x+c$
(c) $\frac{\sec x}{2}+c$ (d) $\frac{1}{2}\tan x+c$
সমাধান: (d); $\int f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \int\frac{1}{1+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}dx$
$=\int\frac{1}{1+\cos 2x}dx = \int\frac{1}{2\cos^2 x}dx$
$=\int\frac{1}{2}.\sec^2 x\,dx = \frac{1}{2}\tan x+c$

33. ছায়াবৃত্ত অংশের ক্ষেত্রফল নিচের কোনটি?
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) 1 (c) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{\pi}{2}-1$
সমাধান: (d); ছায়াবৃত্ত অংশের ক্ষেত্রফল
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{1-f(x)\}dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin 2x}dx$
$=\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}dx$
$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$
$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left[-\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(1+1)=\frac{\pi}{2}-1$

34.


ছায়াকৃত অংশের ক্ষেত্রফল নিচের কোনটি?
(a) $\frac{-48}{3}$ বর্গএকক (b) $\frac{32}{3}$ বর্গএকক
(c) $\frac{72}{3}$ বর্গএকক (d) $\frac{112}{3}$ বর্গএকক
সমাধান: (b); $y=0$ হলে, $x=-2,-6$
ক্ষেত্রফল $=\int_{-2}^{-6}[(x+4)^2-4]dx = \left[\frac{(x+4)^3}{3}-4x\right]_{-2}^{-6}$
$=\int_{-6}^{-2}[0-\{(x+4)^2-4\}]dx$
$=\left(\frac{-8}{3}+24\right)-\left(\frac{8}{3}+8\right)$
$=\frac{64}{3}-\frac{32}{3}=\frac{32}{3}$ বর্গ একক

35. $\int\frac{\tan x}{\ln(\cos x)}dx$ এর সমাধান-
(a) $-\ln|\ln(\cos x)|+c$
(b) $-\ln|\cos x|+c$
(c) $-\ln|\cot x|+c$ (d) $-\ln|\ln(\cot x)|+c$
সমাধান: (a); ধরি, $\ln(\cos x)=z \Rightarrow \frac{1}{\cos x}(-\sin x)$
$\Rightarrow \tan x\,dx=-dz$
$\int\frac{\tan x}{\ln(\cos x)}=-\int\frac{dz}{z}=-\ln|z|+c$
$=-\ln|\ln(\cos x)|+c$

36. $\int\cos^{-1}x\,dx$ এর মান কোনটি?
(a) $x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+c$
(b) $x\cos^{-1}x-x\sqrt{1-x^2}+c$
(c) $x[\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}]+c$
(d) $x[\cos^{-1}x+\sqrt{1-x^2}]+c$
সমাধান: (a); $\int 1.\cos^{-1}x\,dx = x\cos^{-1}x-\int\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.x\,dx$
$=x\cos^{-1}x+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\cos^{-1}x-\int\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx$
$=x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+c$

মো: রফিকুল ইসলাম স্যার

37. $\int f(x)\phi(x)\,dx = ?$
(a) $xe^x + e^x + c$ (b) $xe^x - e^x + c$
(c) $\frac{x^2e^x}{2} + c$ (d) $x^2e^x + c$
সমাধান: (b); $\int xe^x\,dx = xe^x - \int 1.e^x dx$
$= xe^x - e^x + e$

38. $\int \sqrt{e^x}\,dx = ?$
(a) $\frac{2}{3}(e^x)^{3/2} + c$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{e^x} + c$
(c) $2e^{x/2} + c$ (d) $e^{x/2} + c$
সমাধান: (c); $\int \sqrt{e^x}\,dx = \int e^{\frac{x}{2}}\,dx + c = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$
$= 2e^{\frac{x}{2}} + c$

39. $\int a^{a^{a^x}}.a^{a^x}.a^x\,dx = ?$
(a) a^{a^x} (b) $\frac{a^x}{\ln a}$ (c) $\frac{a^{a^x}}{3}$ (d) $\frac{a^{a^{a^x}}}{(\ln a)^3}$
সমাধান: (d); ধরি, $a^{a^{a^x}} = z \Rightarrow a^{a^{a^x}}a^{a^x}a^x\,dx = \frac{dz}{(\ln a)^3}$
$\therefore \int a^{a^{a^x}}a^{a^x}a^x\,dx = \int \frac{dz}{(\ln a)^3} = \frac{z}{(\ln a)^3} + c$
$= \frac{a^{a^{a^x}}}{(\ln a)^3} + c$

40. $\int x\ln x\,dx$ এর মান নিচের কোনটি?
(a) $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$ (b) $x^2\ln x - \frac{x^2}{4} + c$
(c) $\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + c$ (d) None
সমাধান: (a); $\int x\ln x\,dx = \ln x.\frac{x^2}{2} - \int\frac{1}{x}.\frac{x^2}{2}dx$
$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$

41. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = f(x) + c$ হলে, $f(x) = ?$
(a) xe^x (b) $\frac{xe^x}{x+1}$
(c) $\frac{e^x}{x+1}$ (d) $e^x\ln(x+1)$
সমাধান: (c); $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int e^x\frac{1+x-1}{(1+x)^2}dx$
$= \int e^x.\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \frac{e^x}{x+1} + c$
$\left[\because \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{1}{(x+1)^2}\right]$

42. $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ বক্ররেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল-
(a) $3a^2$ (b) $16a^2$ (c) $\frac{3a^2}{16}$ (d) $\frac{16a^2}{3}$

43. $\int_0^{10}|x-5|dx$ এর মান কত?
(a) 5 (b) 25/2 (c) 25 (d) 50
সমাধান: (c); $\int_0^5 -(x-5)\,dx + \int_5^{10}(x-5)\,dx$
$= \left[5x - \frac{x^2}{2}\right]_0^5 + \left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_5^{10}$
$= 25 - \frac{25}{2} + 50 - 50 - \frac{25}{2} + 25 = 25$

এ.টি.এস.এম. মাসুদুল হাকিম স্যার

44. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$ হয়, তবে y এর মান কোনটি?
(a) $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} + c$ (b) $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + c$
(c) $\frac{-1}{1+x^2} + c$ (d) $2\tan^{-1}x + c$
সমাধান: (d); $\int\frac{dy}{dx}dx = \int\frac{2}{1+x^2}dx$
$\Rightarrow y = 2\tan^{-1}x + c$

45. $\int f(x)\,dx = x + e^{2x}$ হলে, f(x) কোনটি?
(a) $1 + 2e^{2x}$ (b) $1 + e^{2x}$
(c) $1 + \frac{1}{2^e}2x$ (d) $x^2 + e^{2x}$
সমাধান: (a); $f(x) = \frac{d}{dx}(x + e^{2x}) = 1 + 2e^{2x}$

46. $\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx =$ কোনটি?
(a) $\cos x + c$ (b) $e^{\cos x} + c$
(c) $\sin x + c$ (d) $e^{\sin x} + c$
সমাধান: (d); $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$
$= \int e^z\,dz$ [ধরি, $\sin x = z \Rightarrow \cos x\,dx = dz$]
$= e^z + c = e^{\sin x} + c$

47. $\int f(x)\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$ হলে, f(x) এর মান কত? [Ans: c]
(a) $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (c) $\frac{1}{a^2-x^2}$ (d) $\frac{1}{a^2+x^2}$

48. $\int f(x)dx = \frac{e^x}{x+1} + c$ হলে, $f(x) =$ কত?
(a) $\frac{e^x}{(x+1)^2}$ (b) $\frac{e^x}{(x+1)}$ (c) $\frac{xe^x}{(x+1)^2}$ (d) $\frac{xe^x}{(x-1)^2}$
সমাধান: (c); $f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{x+1}\right)$
$= \frac{(x+1)e^x - e^x.1}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$

49. $\int_0^x f(p)f'(p)\,dp$ এর মান কোনটি?
(a) $\frac{1}{2}f^2(x)$ (b) $\frac{1}{2}x^2$
(c) $\frac{1}{2}[\{f(x)\}^2 - \{f(0)^2\}]$ (d) $f(x) - f(0)$
সমাধান: (c); $\int_0^x f(p)f'(p)\,dp = \left[\frac{\{f(p)\}^2}{2}\right]_0^x$
$= \frac{1}{2}[\{f(x)\}^2 - \{f(0)\}^2]$

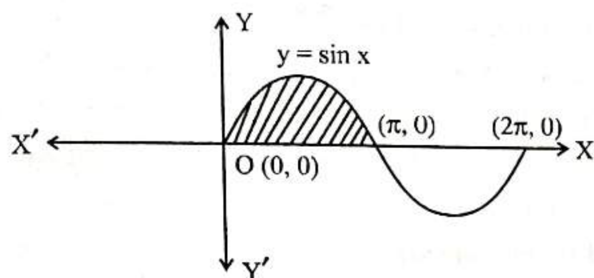
50. $\int_0^4 f(x)dx = 6$ হলে, $\int_{-1}^3 f(x+1)dx$ এর মান কত?
(a) 0 (b) 1 (c) 5 (d) 6
সমাধান: (d); ধরি, $x + 1 = z \therefore dx = dz$

x	−1	3
z	0	4

$\int_0^4 f(z)dz = \int_0^4 f(x)dx = 6$

MCQ: সম্ভাব্য নমুনা প্রশ্ন ও সমাধান

01.



লেখচিত্রটিতে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল কত?

(a) -2 (b) 2 (c) $\frac{\pi^2}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{1-\pi^2}}-1$

সমাধান: **(b)**; $\int_0^{\pi}\sin x\,dx = -[\cos x]_0^{\pi} = 2$

02. $\int\frac{dx}{9x^2-16} = ?$

(a) $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{3x+4}{3x-4}\right|$ (b) $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{3x-4}{3x+4}\right|$

(c) $\frac{1}{9}\tan^{-1}\frac{4}{3}$ (d) $\frac{1}{9}\sin^{-1}\sqrt{x-4}$

সমাধান: **(b)**; $\int\frac{dx}{9x^2-16} = \frac{1}{9}\int\frac{dx}{x^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2}$

$= \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2\times\frac{4}{3}}\ln\left|\frac{x-\frac{4}{3}}{x+\frac{4}{3}}\right| = \frac{1}{24}\ln\left|\frac{3x-4}{3x+4}\right|$

03. $\int e^x\sec x(1+\tan x)dx = f(x)+c, f(x) = ?$

(a) $e^x\sin x$ (b) $e^x\cos x$ (c) $e^x\tan x$ (d) $e^x\sec x$

সমাধান: **(d)**; $\int e^x\sec x(1+\tan x).dx$

$= \int e^x(\sec x + \sec x.\tan x).dx = e^x.\sec x + c$

04. $\int e^{5x}\left(5\ln x + \frac{1}{x}\right)dx = ?$

(a) $5e^{5x}\ln x + c$ (b) $\frac{e^{5x}\ln x}{5} + c$

(c) $e^{5x}\ln x + c$ (d) $25e^{5x}\ln x + c$

সমাধান: **(c)**; $\int e^{5x}\left\{5\ln x + \frac{d}{dx}(\ln x)\right\}.dx$

$= \int d(\ln x \times e^{5x}) = e^{5x}.\ln x + c$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = x$ এবং $g(x) = \sin^{-1}x$

05. $\int\frac{g(x)}{\sqrt{1-\{f(x)\}^2}}dx = ?$

(a) $\frac{\sin^{-1}x^2}{2} + c$ (b) $\sin^{-1}x^2 + c$

(c) $\frac{(\sin^{-1}x)^2}{2} + c$ (d) $(\sin^{-1}x)^2 + c$

সমাধান: **(c)**; $\int\frac{\sin^{-1}x.dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\sin^{-1}x.d(\sin^{-1}(x))$

$= \frac{(\sin^{-1}x)^2}{2} + c$

06. $\int f(x)\,dx = g(x) + c$ হলে, $g(x) = ?$ **[Ans: a]**

(a) $\frac{1}{2}x^2$ (b) $\frac{1}{3}x^3$ (c) 1 (d) 0

07. $\sin x = m, \cos x = n, \tan x = p$ হলে- **[Ans: b]**

(i) $\int m dx = -n + c$

(ii) $\int n dx = -m + c$

(iii) $\int p dx = -\ln|n| + c$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

08. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ এর মান কত?

(a) $\sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2+c}$

(b) $\sqrt{1-x^2} + c$

(c) $\sin^{-1}x + c$

(d) $\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$

সমাধান: **(d)**; $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$= \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$= \sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$

09. $u = e^{2x}, v = e^{-2x}$ হলে- **[Ans: d]**

(i) $\frac{d}{dx}(u+v) = 2(u-v)$

(ii) $\frac{d}{dx}(uv) = 0$

(iii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{u}{v}\right) = 1$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

10. $\int_0^1 x\left(1-\sqrt{x}\right)^2dx = ?$ **[Ans: a]**

(a) $\frac{1}{30}$ (b) $\frac{2}{15}$ (c) $\frac{1}{17}$ (d) $-\frac{1}{30}$

সমাধান: **(a)**; Use Calculator

11. $\int\tan x\sec^2x\,dx$ কত?

(a) $\frac{\tan^2x}{4} + c$ (b) $\frac{\sec^2x}{2} + c$

(c) $\tan x + c$ (d) $\sec x + c$

সমাধান: **(b)**; $\int\tan x.\sec^2x.dx$

$= \int\sec x.d(\sec x) = \frac{\sec^2x}{2} + c$

12. $\int\sqrt{(1-\sin 2x)}\,dx =$ কত?

(a) $-(\cos x - \sin x) + c$ (b) $\cos x + \sin x + c$

(c) $-\cos x + \sin x + c$ (d) $\cos x - \sin x + c$

সমাধান: **(b)**; $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$

$\therefore \int\sqrt{1-\sin 2x}.dx = \pm\int(\sin x - \cos x).dx$

$= \pm(-\cos x - \sin x) + c = \pm(\cos x + \sin x) + c$

13. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6} =$ কত?

(a) $\ln\left|\frac{x-2}{x-3}\right| + c$ (b) $\ln\left|\frac{x+2}{x-3}\right| + c$

(c) $\ln\left|\frac{x+3}{x-2}\right| + c$ (d) $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + c$

সমাধান: (d); $\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = -\frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-3)}$

$\int \frac{Dx}{x^2-5x+6} = \int \frac{1}{x-3}.dx - \int \frac{1}{x-2}.dx$

$= \ln|x-3| - \ln|x-2| + c = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + c$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}} =$ কত?

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

সমাধান: (d); $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x.dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{4-z^2}}$

$= \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

15. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} =$ কত?

(a) $\sqrt{16-x^2} + c$ (b) $-\sqrt{16-x^2} + c$

(c) $\sqrt{4-x^2} + c$ (d) $-\sqrt{4-x^2} + c$

সমাধান: (d); $\int \frac{1}{2} \frac{2x.dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{-1}{2} \int \frac{d(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$

$= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{4-x^2} + c$

16. $f(x) = 1 + x^2$, $g(x) = \tan^{-1} x$ হলে, $\int \frac{g(x)}{f(x)} dx$ এর মান কত? **[Ans: d]**

(a) $\tan^{-1} x^2 + c$ (b) $2\tan^{-1} x^2 + c$

(c) $(\tan^{-1} x)^2 + c$ (d) $\frac{1}{2}(\tan^{-1} x)^2 + c$

17. $\int 3dt =$? **[Ans: c]**

(a) 0 (b) 3 (c) $3t + c$ (d) $\frac{3t^2}{2} + c$

18. $\int \frac{3x^2}{1+x^6} dx = f(x) + c$ হলে, $f(x)$ এর সঠিক মান নিচের কোনটি? **[Ans: a]**

(a) $\tan^{-1} x^3$ (b) $\tan^{-1}(3x^3)$

(c) $\frac{1}{3}\tan^{-1} x^3$ (d) $3\tan^{-1} x^3$

19. $\int_2^3 \frac{2x-1}{x(x-1)} dx$ এর মান নিচের কোনটি?

(a) ln 4 (b) 2 ln 3 (c) ln 3 (d) ln 2

সমাধান: (c); $\int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-x} dx = \int_{x=2}^{x=3} \frac{d(x^2-x)}{x^2-x} dx$

$= [\ln|x^2-x|]_2^3 = \ln|9-3| - \ln|4-2|$

$= \ln\left(\frac{9-3}{4-2}\right) = \ln\left(\frac{6}{2}\right) = \ln 3$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$f(x) = \tan^2 x, g(x) = \sec^2 x$$

20. $\int f(x)dx$ এর মান কোনটি?

(a) $\sec^2 x + c$ (b) $\tan^3 x + c$

(c) $\tan x - x + c$ (d) $\sec x - x + c$

সমাধান: (c); $\int \tan^2 x.dx = \int(\sec^2 x - 1).dx$

$= \tan x - x + c$

21. $\int f(x)g(x)dx =$?

(a) $\tan^3 x + c$ (b) $\sec^3 x + c$

(c) $\frac{1}{3}\tan^3 x + c$ (d) $\frac{1}{2}\sec^3 x + c$

সমাধান: (c); $\int \tan^2 x.\sec^2 x.dx$

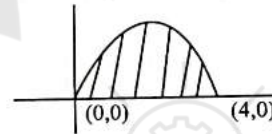
$= \int \tan^2 x.d(\tan x) = \frac{\tan^3 x}{3} + c$

22. x অক্ষ এবং $y = 4x - x^2$ বক্ররেখার দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

(a) $\frac{16}{3}$ বর্গ একক (b) $\frac{8}{3}$ বর্গ একক

(c) $\frac{32}{3}$ বর্গ একক (d) $\frac{4}{3}$ বর্গ একক

সমাধান: (c);



$Y = 4x - x^2$; $\int_0^4 y.dx = \left[\frac{4x^2}{2}\right]_0^4 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4$

$= \frac{32}{3}$ বর্গ একক

23. $\int e^x \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) dx$ এর মান–

(a) $e^x \cos\frac{x}{2} + c$ (b) $e^x \sin\left(\frac{x}{2}\right) + c$

(c) $e^x \tan\left(\frac{x}{2}\right) + c$ (d) $e^x \cot\left(\frac{x}{2}\right) + c$

সমাধান: (c); $\int e^x \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right).dx = \int e^x \left(\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}\right).dx = e^x.\tan\frac{x}{2} + c$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta} d\theta$ এর মান কোনটি?

(a) 1 (b) $1 - \frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) π

সমাধান: (b); $1 - \cos 2\theta = 2\sin^2\theta$

$1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta.d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2\theta - 1) d\theta$

$= [\tan\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} - [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$

25. $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ ও $y = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? **[Ans: b]**

(a) $\frac{1}{4}\pi a^2$ (b) $\frac{1}{2}\pi a^2$ (c) πa^2 (d) $\frac{1}{2}a^2$

26. $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} d\theta =$ কত?

(a) $\tan\theta + c$ (b) $-\text{cosec}\theta + c$
(c) $\text{cosec}\theta + c$ (d) $\cot\theta + c$

সমাধান: (b); $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}.d\theta = \int \cot\theta.\text{cosec}\theta.d\theta$
$= -\text{cosec}\theta + c$

27. $\int \ln ax\, dx =$?

(a) $ax(\ln ax - 1) + c$ (b) $x(\ln ax - a) + c$
(c) $x(\ln ax - 1) + c$ (d) $x(a\ln x - 1) + c$

সমাধান: (c); ধরি, $ax = z$; $dx = \frac{1}{a}dz$; $\int \ln ax dx$
$= \frac{1}{a}\int \ln z dz = \frac{1}{a}(z\ln z - z) + c$
$= \frac{1}{a}(ax\ln ax - ax) + c$
$x\ln ax - x + c = x(\ln ax - 1) + c$

28. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ কোন শর্তে প্রযোজ্য নয়? **[Ans: b]**

(a) $n = 1$ (b) $n = -1$ (c) $n = 2$ (d) $n \neq -2$

29. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$ এর মান কত? **[Ans: b]**

(a) $\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$ (b) $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$
(c) $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + c$ (d) $\ln\frac{a+x}{a-x}$

30. $xy = 10$ অধিবৃত্ত x-অক্ষ এবং $x = 1$ ও $x = 3$ রেখা দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

(a) $10\ln\frac{1}{3}$ (b) $10\ln 3$ (c) $5\ln 3$ (d) $2\ln 3$

সমাধান: (b); $xy = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{x}$
$\Rightarrow \text{Area} = \int_1^3 \frac{10}{x}.dx = 10 \times \ln 3$

31. $\int \sin x \cos x dx$ এর মান- **[Ans: d]**

(i) $\frac{\sin^2 x}{2} + c$ (ii) $-\frac{\cos 2x}{4} + c$
(iii) $-\frac{\cos^2 x}{2} + c$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

32. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ্য কর:

(i) $\frac{d}{dx}\{e^{2\ln(\sin x)} + \cos^2 x\} = 0$
(ii) $\int e^{2x}\left(2\ln x + \frac{1}{x}\right)dx = e^{2x}\ln x + c$
(iii) $\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{e^{2x}(\sin 3x + 2\cos 3x)}{13} + c$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); (i) $\frac{d}{dx}\left(e^{2\ln(\sin x)} + \cos^2 x\right)$
$= \frac{d}{dx}(e^{\ln(\sin^2 x)} + \cos^2 x)$
$= \frac{d}{dx}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{d}{dx}1 = 0$
(ii) $\int e^{2x}\left(2\ln x + \frac{1}{x}\right)dx$
$= \int e^{2x}\left(2\ln x + \frac{d}{dx}(\ln x)\right).dx = e^{2x}\ln x + c$
(iii) $\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x)}{13} + c$

33. $\int \frac{dx}{3 + 2x^2} =$?

(a) $\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right) + c$
(c) $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}} + c$ (d) $\frac{1}{\sqrt{6}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right) + c$

সমাধান: (d); $\int \frac{dx}{3+2x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\frac{3}{2} + x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}$
$\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{2}{3}}.\tan^{-1}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + c = \frac{1}{\sqrt{6}}\tan^{-1}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + c$

34. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2^2}} =$?

(a) $\sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$ (b) $\sin^{-1}\frac{x}{2} + c$
(c) $\frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$ (d) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

সমাধান: (c); $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1}}$
$= \frac{1}{2}.\sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

35. $\int \sec^2 x\, e^{2\tan x} dx =$ কত? **[Ans: b]**

(a) $e^{2\tan x} + c$ (b) $\frac{1}{2}e^{2\tan x} + c$
(c) $2e^{2\tan x} + c$ (d) $\frac{1}{2}e^{\tan x} + c$

36. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} dx =$ কত? **[Ans: c]**

(a) 1 (b) $\frac{\pi}{2} - 1$ (c) $\frac{\pi}{2} + 1$ (d) $\frac{\pi}{2}$

37. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin\theta}\, d\theta =$? **[Ans: a]**

(a) 2 (b) $\sqrt{2}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) π

38. $\int f(x)dx = F(x)$ হলে $\int_a^b f(x)dx -$ **[Ans: d]**

(i) নির্দিষ্ট যোগজ (ii) $[F(x)]_a^b$
(iii) $F(b) - F(a)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

39. $\int e^{-x^3}x^2 dx$ এর সমাকলন কোনটি?

(a) $-\frac{1}{3}e^{-x^3} + c$ (b) $\frac{1}{3}e^{x^3} + c$
(c) $-\frac{1}{3}e^{x^4} + c$ (d) $-\frac{1}{3}e^{x^6} + c$

সমাধান: (a); $\int e^{-x^3}x^2 dx = -\frac{1}{3}\int e^{-x^3} d(-x^3)$
$= -\frac{1}{3}e^{-x^3} + c$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:
$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ এবং $g(x) = \sin^{-1} x$ দুইটি ফাংশন

40. $\int \frac{g(x)}{f(x)} dx$ এর যোগজ নিচের কোনটি? **[Ans: c]**
(a) $\frac{1}{2}(\tan^{-1} x)^2 + c$ (b) $\tan^{-1} x + c$
(c) $\frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2 + c$ (d) $\sin^{-1} x + c$

41. $\int \sin ax\, dx = ?$ **[Ans: b]**
(a) $\frac{1}{ax}\cos ax + c$ (b) $-\frac{1}{a}\cos ax + c$
(c) $a\cos ax + c$ (d) $-a\cos ax + c$

42. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = ?$
(a) $\frac{14}{16}$ (b) $-\frac{14}{16}$ (c) 1 (d) 2
সমাধান: (d); $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2[\sqrt{x}]_1^4 = 2$

43. x এর কোন মানের জন্য $f(x) = \int_0^x \frac{t-3}{t^2+7} dt$ ন্যূনতম হবে?
(a) $-\sqrt{7}$ (b) 0 (c) $\sqrt{7}$ (d) 3
সমাধান: (d); $f'(x) = \frac{x-3}{x^2+7} = 0 \therefore x = 3$

44. $\int \frac{dx}{ay-bx} = f(x) + c$ হলে, f(x) কোনটি? [এখানে, y ধ্রুবক] **[Ans: a]**
(a) $-\frac{1}{b}\ln(ay-bx)$ (b) $\frac{1}{b}\ln(ay-bx)$
(c) $\ln(ay-bx)$ (d) $\frac{1}{a}\ln(ay-bx)$

45. $\int_0^4 f(x)\, dx = 6$ হলে, $\int_{-1}^3 f(x+1)\, dx = ?$
(a) 0 (b) 5 (c) 6 (d) 7
সমাধান: (c); ধরি, $x + 1 = z \therefore dx = dz; z = 0$ হলে, $x = -1$
$z = 4$ হলে, $x = 3 \therefore \int_{-1}^3 (x+1)\, dx = \int_0^4 f(z)dz = 6$

46. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-6x}} = f(x) + c$ হলে, $f(x) = ?$
(a) $\frac{1}{4}(1-6x)^{2/3}$ (b) $\frac{1}{4}(1-6x)^{\frac{3}{2}}$
(c) $-\frac{1}{4}(1-6x)^{2/3}$ (d) $-\frac{1}{4}(1-6x)^{3/2}$
সমাধান: (c); $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-6x}} = \int (1-6x)^{-\frac{1}{3}}dx$
$= \frac{(1-6x)^{-\frac{1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1} \times \frac{1}{-6} + c = \frac{-1}{4}(1-6x)^{\frac{2}{3}} + c$

47. $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \cos 3x\, dx$ এর মান-
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$
(c) $\frac{2}{5}$ (d) কোনটিই নয়
সমাধান: (d); $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x . \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 6x\, dx$
$= \frac{-1}{12}[\cos 6x]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{6}$

48. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2\, dx = ?$ **[Ans: d]**
(a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) π
সমাধান: (d); $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 dx$
$= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin 2x)\, dx = \left[x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$
$= \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cos\pi\right] = \pi$

49. $\int_{-1}^1 |x|\, dx$ এর মান কত?
(a) 2 (b) −1 (c) 1 (d) 0
সমাধান: (c); $\int_{-1}^1 |x|\, dx = \int_{-1}^0 -xdx + \int_0^1 xdx = 1$

50. $\int_1^2 \log x\, dx$ এর মান কোনটি?
(a) log2 (b) 2 log 2
(c) 2 log 2 − 1 (d) None
সমাধান: (c); $\int_1^2 \log x dx = [x\log x - x]^2$
$= 2\log 2 - 2 + 1 = 2\log 2 - 1$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
একটি বক্ররেখার ঢাল $\frac{dy}{dx} = \ln(2x)$; বক্ররেখাটি $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

51. বক্ররেখাটির সমীকরণ-
(a) $y = x\ln(x) - x$ (b) $y = \ln(2x) + 2$
(c) $y = x\ln(2x) - x + 1$ (d) $y = x\ln(2x) - x + 2$
সমাধান: (c); $y = \int \ln(2x)\, dx; z = 2x$ হলে,
$y = \frac{1}{2}\int \ln z\, dz$
$\therefore y = \frac{1}{2}[z\ln z - z] + c = \frac{1}{2}[2x\ln(2x) - 2x] + c$
$\therefore y = x\ln(2x) - x + c$ বক্ররেখাটি $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ বিন্দু দিয়ে গেলে $c = 1$

52. x এর কোন মানের জন্য বক্ররেখাটির ঢাল শূন্য হবে?
(a) $x = \frac{1}{2}$ (b) $x = 1$ (c) $x = 0$ (d) $x = \frac{1}{4}$
সমাধান: (a); $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \ln(2x) = 0$
$\Rightarrow \ln(2x) = \ln(1) \therefore x = \frac{1}{2}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$y = x^3$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ এবং $y = f(x)$

53. $\int x^2[\sin\{f(x)\}]dx = ?$
(a) $\frac{-1}{3}\cos(x^3) + c$
(b) $\frac{1}{3}\cos(x^3) + c$
(c) $\frac{1}{3}x^2 \sin x + x\cos x - \sin x + c$
(d) $\frac{1}{2}\cos^2 x + c$
সমাধান: (a); $\int x^2 \sin x^3\, dx = \frac{1}{3}\int \sin x^3 dx(x^3)$
$= -\frac{1}{3}\cos x^3 + c$

54. প্রদত্ত বক্ররেখা এবং $x = 1$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) 1 (d) $\frac{1}{3}$
সমাধান: (b); Area $= \int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{4}$

সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

◆ **CQ:** বিগত বছরসমূহের বোর্ড পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান

01. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \sin x$ **[DB'22]**

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = e^x$.

(খ) $\int g(x)f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$ এর যোগজ নির্ণয় কর। 4

(গ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)f(2x)dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. ধরি, $I = \int g(x)\, f(\frac{\pi}{2} - x)dx = \int e^x.\sin(\frac{\pi}{2} - x)\, dx = \int e^x \cos x\, dx$

$= \cos x \int e^x dx - \int [\frac{d}{dx}(\cos x) \int e^x\, dx]dx = \cos x.e^x - \int -\sin x.e^x dx$

$= e^x \cos x + \int \sin x\ e^x\, dx = e^x \cos x + \sin x \int e^x\, dx - \int [\frac{d}{dx}(\sin x).\int e^x\, dx]\, dx$

সুতরাং, $I = e^x \cos x + e^x \sin x - \int \cos x.e^x dx + c_1 \Rightarrow I = e^x(\cos x + \sin x) - I + c_1$

$\Rightarrow 2I = e^x(\sin x + \cos x) + c_1 \Rightarrow I = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + \frac{c_1}{2} \therefore I = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c$ [যেখানে, $c = \frac{c_1}{2}$] **(Ans.)**

গ. ধরি, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x).f(2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.\sin 2x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, 2 \sin x \cos x\, dx$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\, dx$$

$$\therefore I = 2\int_0^1 z^2\, dz = 2\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1^3}{3} - 0\right)$$

$\therefore I = \frac{2}{3}$ **(Ans.)**

ধরি, $\sin x = z \Rightarrow \cos x = \frac{dz}{dx} \therefore \cos x\, dx = dz$

x	z
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1

02. দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = \cos x, h(x) = x^4$. **[RB'22]**

দৃশ্যকল্প -২: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ একটি উপবৃত্ত

$x^2 + y^2 = 9$ একটি বৃত্ত

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{g(x)\}^2 dx + \int_0^1 \frac{x}{1+h(x)} dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর উপবৃত্ত এবং বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ১ম চতুর্ভাগের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $g(x) = \cos x, h(x) = x^4$

ধরি, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{g(x)\}^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + \cos 2x]\, dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2.\frac{\pi}{2}}{2} - 0 - 0\right] = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \therefore I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+h(x)} dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx = \int_0^1 \frac{x}{1+(x^2)^2} dx$

$\therefore I_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+z^2}.\frac{dz}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2}[\tan^{-1} z]_0^1$

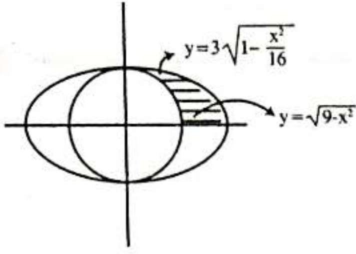
$= \frac{1}{2}(\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}$

$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{g(x)\}^2\, dx + \int_0^1 \frac{x}{1+h(x)} dx = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \therefore I = \frac{3\pi}{8}$ **(Ans.)**

ধরি, $x^2 = z \Rightarrow 2x = \frac{dz}{dx} \therefore x dx = \frac{dz}{2}$

x	z
0	0
1	1

গ. দৃশ্যকল্প-২:



$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{9}=1-\frac{x^2}{16} \therefore y=3\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}$ ……… (i)

$y=0$ হলে, (i) $\Rightarrow \frac{x^2}{16}+0=1 \Rightarrow x^2=16 \therefore x=\pm 4$

$\therefore$ ছেদবিন্দু $(4,0)$ এবং $(-4,0)$ এখন, (i)নং রেখা দ্বারা ১ম চতুর্ভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের- ক্ষেত্রফল, $A_1=\int_0^4 y\,dx$

$A_1=\int_{x=0}^{4}3\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}12\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}6\times 2\cos\theta.\cos\theta\,d\theta=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta\,d\theta$

$A_1=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+\cos 2\theta]\,d\theta=6\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=6\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)-\left(0+\frac{\sin 0}{2}\right)\right]=6\left[\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-0\right]$

$A_1=3\pi$

ধরি, $x=4\sin\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta}=4\cos\theta \therefore dx=4\cos\theta\,d\theta$

$\therefore A_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sqrt{1-\frac{(4\sin\theta)^2}{16}}.4\cos\theta\,d\theta$

x	0
0	0
4	$\frac{\pi}{2}$

আবার, বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2=9 \therefore y=\sqrt{9-x^2}$ ……… (ii)

আবার, $y=0$ হলে, $x^2=9 \therefore x=\pm 3 \therefore$ x অক্ষের ছেদবিন্দু $(-3,0)$ ও $(3,0)$

এখন, (ii) নং সমীকরণ দ্বারা ১ম চতুর্ভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$A_2=\int_{x=0}^{3}y dx=\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-(3\sin\theta)^2}.3\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9(1-\sin^2\theta)}.3\cos\theta\,d\theta$

$=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2 d\theta)=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{9}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{9}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)-(0+0)\right\}=\frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right) \therefore A_2=\frac{9\pi}{4}$

ধরি, $x=3\sin\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta}=3\cos\theta$

$\therefore dx=3\cos\theta\,d\theta$

এখানে, $A_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2\theta\,d\theta$

x	θ
0	0
3	$\frac{\pi}{2}$

সুতরাং উপবৃত্ত ও বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ১ম চতুর্ভাগের ক্ষেত্রফল-

$A=|A_1-A_2|=\left|3\pi-\frac{9\pi}{4}\right|$

$=\left|\frac{12\pi-9\pi}{4}\right|=\frac{3\pi}{4}$

03. $\mathbf{g(x,y)=16x^2+25y^2-400;}$ **[Ctg.B'22]**

$\mathbf{F(z)=z\ln z.}$

(ক) $\int\frac{\mathrm{cosec}^2x}{\sqrt{1-\cot^2x}}dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int_1^{\sqrt{e}}F(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) $g(x,y)=0$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের অর্ধাংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int \frac{\text{cosec}^2 x}{\sqrt{1-\cot^2 x}} dx$ [ধরি, $\cot x = z \therefore -\text{cosec}^2 x\, dx = dz$] $= \int \frac{-dz}{\sqrt{1-z^2}} = \cos^{-1}(z) + c = \cos^{-1}(\cot x) + c$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $F(z) = z \ln z \therefore F(x) = x \ln x$

এখন, $\int F(x)\, dx = \int x \ln x\, dx = (\ln x) \int x\, dx - \int \left(\frac{1}{x} \int x dx\right) dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$

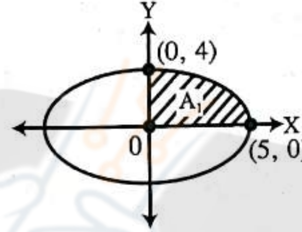
$\therefore \int_1^{\sqrt{e}} F(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^{\sqrt{e}} = \left\{\frac{(\sqrt{e})^2}{2} \ln \sqrt{e} - \frac{(\sqrt{e})^2}{4}\right\} - \left\{0 - \frac{1}{4}\right\} = \frac{e}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{e}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ **(Ans.)**

গ. $g(x,y) = 0 \Rightarrow 16x^2 + 25y^2 - 400 = 0 \Rightarrow 16x^2 + 25y^2 = 400 \Rightarrow \frac{16x^2}{400} + \frac{25y^2}{400} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$

$25y^2 = 400 - 16x^2 \Rightarrow y^2 = 16 - \frac{16}{25} x^2$ বর্গএকক।

$\Rightarrow y = \pm \sqrt{16 - \frac{16}{25} x^2}$

$\therefore y = \sqrt{16 - \frac{16}{25} x^2}$



১ম চর্তুভাগে ক্ষেত্রফল, $A_1 = \int_0^5 y dx$ বর্গএকক। $= \int_0^5 \sqrt{16 - \frac{16}{25} x^2} dx$

ধরি, $x = 5 \sin \theta \therefore dx = 5 \cos \theta\, d\theta$

x	0	5
θ	0	$\frac{\pi}{2}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16 - 16 \sin^2 \theta}\, 5 \cos \theta\, d\theta = 4 \times 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta\, d\theta = 20 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta\, d\theta$

[১ম চর্তুভাগে $x > 0, y > 0$]

$= 10 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 \theta\, d\theta = 10 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta = 10 \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 10 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{0}{2} - 0\right] = 5\pi$ বর্গএকক।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল, $A = 2A_1 = 2 \times 5\pi$ বর্গএকক $= 10\pi$ বর্গএকক।

04. বক্ররেখার সমীকরণ: $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$ এবং $P(x) = 2x + 5$. **[Ctg.B'22]**

(গ) $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{P(x)}}$ নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

গ. দেওয়া আছে, $P(x) = 2x + 5$

$\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{P(x)}} = \int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{2x+5}}$ [ধরি, $2x + 5 = z^2 \Rightarrow 2x = z^2 - 5 \Rightarrow x = \frac{z^2}{2} - \frac{5}{2} \Rightarrow dx = zdz$]

$= \int \frac{z\, dz}{(z^2-5+1)z} = \int \frac{dz}{z^2-4} = \int \frac{dz}{z^2-2^2} = \int \frac{dz}{(z+2)(z-2)}$

এখন, $\frac{1}{(z+2)(z-2)} \equiv \frac{1}{-4(z+2)} + \frac{1}{4(z-2)} = \int \left(\frac{1}{4(z-2)} - \frac{1}{4(z+2)}\right) dz = \frac{1}{4} \int \frac{1}{z-2} dz - \frac{1}{4} \int \frac{1}{z+2} dz$

$= \frac{1}{4} \ln|z-2| - \frac{1}{4} \ln|z+2| + c = \frac{1}{4} \ln \frac{z-2}{z+2} + c \left[z = \sqrt{2x+5}\right]$ **(Ans.)**

05. $P = (x-4)^2(x-3)$ এবং $g(x,y) = x^2 + y^2$. **[SB'22]**

(ক) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ নির্ণয় কর। **2**

(খ) $\int \frac{x}{p} dx$ নির্ণয় কর। **4**

(গ) $g(x,y) = 100$ এবং $x = 5$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতম অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

ক. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1^2-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1}$ $\left[\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]$ $= \frac{1}{2}\sin^{-1}2x$ **(Ans.)**

খ. $P = (x-4)^2(x-3) \therefore \int \frac{x}{p}dx = \int \frac{x}{(x-4)^2(x-3)}dx$

এখন, $\frac{x}{(x-4)^2(x-3)}$ ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর করে পাই, $\frac{x}{(x-4)^2(x-3)} \equiv \frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-3)}$

$\Rightarrow x \equiv A(x-4)(x-3) + B(x-3) + C(x-4)^2$

$x = 3$ বসিয়ে পাই, $\boxed{3 = C}$; $x = 4$ বসিয়ে পাই, $\boxed{4 = B}$

$x = 0$ বসিয়ে পাই, $0 = 12A - 3B + 26C \Rightarrow 12A = 3\times 4 - 16\times 3 = 12 - 48 \Rightarrow 12A = -36 \because \boxed{A = -3}$

$\frac{x}{(x-4)^2(x-3)} = -\frac{3}{x-4} + \frac{4}{(x-4)^2} + \frac{3}{x-3} \therefore \int \frac{x\,dx}{(x-4)^2(x-3)} = -3\int \frac{dx}{x-4} + 4\int \frac{dx}{(x-4)^2} + 3\int \frac{dx}{x-3}$

$= -3\ln|x-4| + 3\ln|x-3| - 4\frac{1}{x-4} + c = 3\ln\frac{x-3}{x-4} - \frac{4}{x-4} + c$ **(Ans.)**

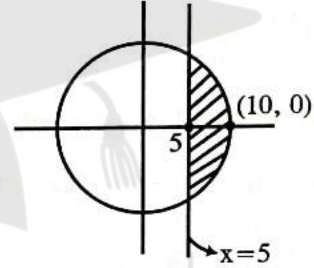
গ. $g(x,\ y) = 100 \Rightarrow x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow y^2 = 100 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{100-x^2}$

$\therefore$ ক্ষুদ্র অংশটির ক্ষেত্রফল, $2\times\int_5^{10} y\,dx = 2\int_5^{10}\sqrt{100-x^2}dx$

$= 2\left[\frac{x\sqrt{100-x^2}}{2} + \frac{100}{2}\sin^{-1}\frac{x}{10}\right]_5^{10}$

$= 2\cdot\left[\frac{10\sqrt{100-100}}{2} + 50\cdot\sin^{-1}(1) - \frac{5\sqrt{75}}{2} - 50\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

$= 2\cdot\left[\frac{50\pi}{2} - \frac{25\sqrt{3}}{2} - \frac{50\pi}{6}\right] = \left(\frac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3}\right)$ বর্গএকক। **(Ans.)**



06. দৃশ্যকল্প-১: $\mathbf{f(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x^2+5)}}$. **[BB'22]**

দৃশ্যকল্প-২: $\mathbf{y^2 = 8x, x - y = 0}$.

(ক) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে $\int f(x)dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত পরাবৃত্ত ও সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 05 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $f(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x^2+5)}$

ধরি, $\frac{x+3}{(x-1)(x^2+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+5} \Rightarrow x + 3 = A(x^2+5) + (Bx+C)(x-1)$

$\Rightarrow x + 3 = Ax^2 + 5A + Bx^2 - Bx + Cx - C \therefore x + 3 = (A+B)x^2 + (C-B)x + (5A-C)$ ……… (i)

(i) নং সমীকরণ হতে x^2, x ও ধ্রুবপদের সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + B = 0 \Rightarrow A = -B$; $C - B = 1 \Rightarrow C + A = 1$

$5A - C = 3 \Rightarrow 6A - (A + C) = 3 \Rightarrow 6A - 1 = 3 \therefore A = \frac{2}{3}$

আবার, $B = -A = -\frac{2}{3}, C = 1 - A = \frac{1}{3}$

এখন, $I = \int f(x)dx = \int \frac{x+3}{(x-1)(x^2+5)}dx = \int\left(\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+5}\right)dx = \int\left[\frac{2}{3(x-1)} + \frac{-2x+1}{3(x^2+5)}\right]dx$

$= \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\frac{2x}{x^2+5}dx + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+5}$; $I = \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\frac{dz}{z+5} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+(\sqrt{5})^2}$ [দ্বিতীয় পদে $x^2 = z$ ধরে]

$= \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|z+5| + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + c$; $I = \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x^2+5| + \frac{1}{3\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + c$

অথবা, $I = \frac{1}{15}\left\{10\ln|x-1| - 5\ln|x^2+5| + \sqrt{5}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}}\right\} + c$ **(Ans.)**

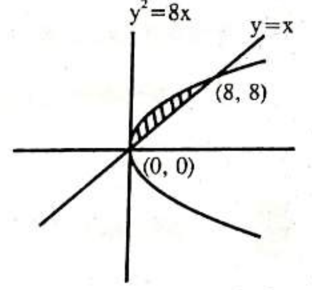
গ. দৃশ্যকল্প-২ হতে পাই, $y^2 = 8x$ ……… (i) ; $x - y = 0 \therefore x = y$ ……… (ii)

(i) হতে (ii) পাই, $x^2 = 8x \Rightarrow x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(x-8) = 0 \therefore x = 0, 8$

$x = 0$ হলে, $y = 0$; $x = 8$ হলে, $y = 8$

∴ পরাবৃত্ত ও সরলরেখার ছেদবিন্দু $(0,0)$ এবং $(8,8)$

∴ পরাবৃত্ত ও সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল;



$A = \int_{x=0}^{8}(y_1 - y_2)dx$, যখন, $y_1 = \sqrt{8x}$ এবং $y_2 = x$

$= \int_0^8 (\sqrt{8x} - x)dx, = \left[\sqrt{8}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^8 = \left[\frac{2\sqrt{8}}{3}(x)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^8 = \left(\frac{2\sqrt{8}}{3}\cdot(8)^{\frac{3}{2}} - \frac{8^2}{2}\right) - 0$

$A = \frac{128}{3} - 32 = \frac{32}{3}$ বর্গএকক। **(Ans.)**

07. (ক) $\int_1^2 \ln 2x\, dx$ **এর মান নির্ণয় কর।** **[BB'22]**

সমাধান

ক. ধরি, $I = \int \ln 2x dx = \int \ln 2x \cdot 1\, dx = \ln 2x \int dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\ln 2x)dx\right]dx = (\ln 2x).x - \int \frac{1}{2x}\cdot 2\cdot x dx$

$I = x\ln 2x - x + c$

এখন, $\int_1^2 \ln 2x\, dx = [x\ln 2x - x]_1^2 = (2\ln 4 - 2) - (\ln 2 - 1) = 4\ln 2 - 2 - \ln 2 + 1$

$\boxed{\int_1^2 \ln 2x\, dx = 3\ln 2 - 1}$ **(Ans.)**

08. দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = \cot^{-1} x$ **[JB'22]**

দৃশ্যকল্প-২: $y^2 = 2x.$

(ক) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে $\int_1^{\sqrt{3}} x\, g(x)\, dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এবং $x = 3y$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 05 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ

খ. দেওয়া আছে, $g(x) = \cot^{-1} x \therefore \int_1^{\sqrt{3}} g(x)dx = \int_1^{\sqrt{3}} x\cot^{-1} x dx$

$\therefore \int \underset{u}{x}\,\underset{v}{\cot^{-1}x}\, dx = \cot^{-1} x \int x\, dx - \int\left(\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x)\int x\, dx\right)dx$

$= \frac{x^2}{2}\cot^{-1} x - \int \frac{-x^2}{2(1+x^2)}dx = \frac{x^2}{2}\cot^{-1} x + \frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2-1)}{1+x^2}dx$

$= \frac{1}{2}x^2\cot^{-1} x + \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}x^2\cot^{-1}x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$

$\therefore \int_1^{\sqrt{3}} x\cot^{-1} x\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2\cot^{-1}x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\tan^{-1}x\right]_1^{\sqrt{3}}$

$\therefore \int_1^{\sqrt{3}} x\cot^{-1} x dx = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{3}\right)^2\cot^{-1}\sqrt{3} + \sqrt{3} - \tan^{-1}\sqrt{3} - 1^2\cot^{-1}(1) - 1 + \tan^{-1}1\right]$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{3.\pi}{6} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 1\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \therefore \int_1^{\sqrt{3}} x\cot^{-1} x\, dx = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$

গ. 06 নং প্রশ্নের (গ) উত্তর এর অনুরূপ।

09. দৃশ্যকল্প-১: $f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$ [JB'22]

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে $\int_0^{\ln 2} f(e^x)dx$ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. দেওয়া আছে, $f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2} \therefore f(e^x) = \frac{(e^x)^2}{\{1+(e^x)^2\}^2} = \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$, এখন, $\int \frac{e^{2x}dx}{(1+e^{2x})^2} = ?$

মনে করি, $e^{2x} = z \Rightarrow 2e^{2x}dx = dz \Rightarrow e^{2x}dx = \frac{1}{2}dz \therefore e^{2x}dx = \frac{1}{2}dz$

$\int \frac{e^{2x}dx}{(1+e^{2x})^2} = \int \frac{\frac{1}{2}dz}{(1+z)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{(1+z)^2} = \frac{1}{2} \times (-1)\frac{1}{1+z} + c = \frac{-1}{2(1+z)} + c = \frac{-1}{2(1+e^{2x})} + c$

আবার, $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}dx}{(1+e^{2x})^2} = \left[-\frac{1}{2(1+e^{2x})}\right]_0^{\ln 2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+e^{2\ln 2}} - \frac{1}{1+e^0}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+e^{\ln 4}} - \frac{1}{1+1}\right] = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{20}$

10. $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$, $h(x) = \tan x$ [CB'22]

(ক) $\int \frac{h'(x)}{\{1+h(x)\}^2}dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{30n'(x)dx}{[\{h(x)\}^2-9]\{h(x)-2\}}$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) যোগজীকরণের সাহায্যে $f(x,y) = 36$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $h(x) = \tan x \therefore h'(x) = \sec^2 x \therefore \int \frac{h'(x)}{\{1+h(x)\}^2}dx = \int \frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}dx$

ধরি, $1 + \tan x = z \Rightarrow \sec^2 x\, dx = dz = \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} + c = -\frac{1}{1+\tan x} + c$ (Ans.)

খ.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{30\, h'(x)dx}{[\{h(x)\}^2-9]\{h(x)-2\}}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{30\sec^2 x dx}{[\tan^2 x-9](\tan x-2)}$

$= \int_0^1 \frac{30}{(z^2-9)(z-2)}dz$

$h(x) = \tan x$ এবং $h'(x) = \sec^2 x$

ধরি, $\tan x = z \Rightarrow \sec^2 x\, dx = dz$

x	0	$\frac{\pi}{4}$
z	0	1

এখন, $\frac{30}{(z+3)(z-3)(z-2)} \equiv \frac{A}{z+3} + \frac{B}{z-3} + \frac{C}{z-2}$ .... (i)

$= \frac{1}{(z+3)} + \frac{5}{(z-3)} - \frac{6}{(z-2)} \therefore \int_0^1 \frac{30}{(z^2-9)(z-2)}dz = \int_0^1 \left[\frac{1}{z+3} + \frac{5}{z-3} - \frac{6}{z-2}\right]dz = [\ln|z+3| + 5\ln|z-3| - 6\ln|z-2|]_0^1$

$= \ln 4 + 5\ln 2 - 6\ln 1 - \ln 1 - \ln 3 - 5\ln 3 + 6\ln 2 = 2.41924$ (Ans.)

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

11. $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+4)(x-1)}$ এবং $g(x) = x^2$ দুটি ফাংশন। [Din.B'22]

(ক) $\int \ln(1+x)dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int f(x)dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) $y = 4g(x)$ ও $y = 2x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int \ln(1+x)\,dx = \int \ln z\, dz$ [ধরি, $1 + x = z \Rightarrow dx = dz$]

$= \int 1.\ln z\, dz = \int z^0 \ln z\, dz = \ln z \int z^0 dz - \int \left(\frac{d}{dx}(\ln z) \int z^0\, dz\right)dz$

$= \ln z - \int \left(\frac{d}{dx}(\ln z)\int z^0 dz\right)dz = z\ln z - z + c = z(\ln z - 1) + c = (1+x)\{\ln(1+x) - 1\} + c$

খ. 05 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. 06 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

12. (ক) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x} dx$ এর মান নির্ণয় কর। [Din.B'22]

সমাধান

ক. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{4-\cos^2 x}$

$= \int_1^0 \frac{-dz}{4-z^2} = \int_0^1 \frac{dz}{4-z^2} = \left[\frac{1}{4}\ln\frac{2+z}{2-z}\right]_0^1$

$= \frac{1}{4}[\ln 3 - \ln 1] = \frac{\ln 3}{4} = 0.2746$ (Ans.)

ধরি, $\cos x = z \Rightarrow -\sin x\, dx = dz \Rightarrow \sin x\, dx = -dz$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
z	1	0

13. $f(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 36, g(x) = \cos x.$ [MB'22]

(ক) $\int \sin^{-1} x\, dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int_1^5 \frac{1}{x}\sqrt{1-\{g(\ln x)\}^2}\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) $f(x, y) = 0$ কণিক দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int \sin^{-1} x\, dx = \sin^{-1} x \int dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)\int dx\right] dx$

$= x\sin^{-1} x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x\, dx$

$= x\sin^{-1} x - \int \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \left(-\frac{dz}{2}\right) = x\sin^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$

$= x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$ (Ans.)

ধরি, $1 - x^2 = z$

$\Rightarrow -2x dx = dz$

$\therefore x dx = -\frac{dz}{2}$

খ. $\int_1^5 \frac{1}{x}\sqrt{1-\{g(\ln x)\}^2} dx$

দেওয়া আছে, $g(x) = \cos x \therefore g(\ln x) = \cos(\ln x)$

এখন, $\int_1^5 \frac{1}{x}\sqrt{1-\{g(\ln x)\}^2} dx = \int_1^5 \frac{1}{x}\sqrt{1-\cos^2(\ln x)}\, dx = \int_1^5 \frac{1}{x}\sin(\ln x)\, dx$

ধরি, $\ln x = z$ এবং $\frac{1}{x}dx = dz$

x	1	5
z	0	ln 5

$\int_0^{\ln 5} \sin z\, dz = [-\cos z]_0^{\ln 5} = -\cos(\ln 5) + \cos 0 = 1.0386$ (Ans.) [In radian mode]

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

14. দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = \sin x.$ [DB'21]

দৃশ্যকল্প-২: $y^2 = 12x.$

(ক) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g'(x)dx}{\{1+g(x)\}\{2+g(x)\}}$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int_1^{c^3}\frac{dx}{x(1+\ln x)}$

$=\int_1^{1+3\ln c}\frac{dy}{y}=[\ln y]_1^{1+3\ln c}$

$=\ln(1+3\ln c)+k$ [যেখানে k ধ্রুবক] (Ans.)

ধরি, $1+\ln x=y\Rightarrow\frac{1}{x}dx=dy$

x	1	c^3
y	1	1+3lnc

খ. $g(x)=\sin x$; $g'(x)=\cos x$

$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{g'(x)dx}{\{1+g(x)\}\{2+g(x)\}}$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}=\int_0^1\frac{du}{(1+u)(2+u)}$

ধরি, $\sin x=g(x)=u$

$\therefore\cos x\,dx=du$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	1

$=\int_0^1\frac{du}{1+u}-\int_0^1\frac{du}{2+u}=\int_0^1\frac{d(1+u)}{(1+u)}-\int_0^1\frac{d(2+u)}{(2+u)}=[\ln|1+u|]_0^1-[\ln|2+u|]_0^1=\ln 2-\ln 3$ (Ans.)

গ. 06 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

15. দৃশ্যকল্প-১: $f(x)=\tan x$. **[DB'21]**

দৃশ্যকল্প-২: $9x^2+25y^2=225$

(ক) $\int\ln x^3\,dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) যোগজ নির্ণয় কর: $\int\frac{dx}{5+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$ 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর উপবৃত্ত ও $x-3=0$ সরলরেখা দ্বারা ১ম চতুর্ভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int\ln x^3\,dx=\ln x^3\int dx-\int\left[\frac{d}{dx}(\ln x^3)\int dx\right]dx=x\ln x^3-\int\frac{3}{x}\times x\,dx=x\ln x^3-3x+c$ (Ans.)

খ. $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$

$\therefore\int\frac{dx}{5+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\int\frac{dx}{5+\cot x}=\int\frac{dx}{5+\frac{\cos x}{\sin x}}=\int\frac{\sin x\,dx}{5\sin x+\cos x}$

$=\frac{5}{26}\int\frac{5\sin x+\cos x}{5\sin x+\cos x}dx-\frac{1}{26}\int\frac{5\cos x-\sin x}{5\sin x+\cos x}dx$

$=\frac{5x}{26}-\frac{1}{26}\ln|5\sin x+\cos x|+c$ (Ans.)

ধরি, $\sin x=a(5\sin x+\cos x)+b\frac{d}{dx}(5\sin x+\cos x)$

$=5a\sin x+a\cos x+5b\cos x-b\sin x$

$=(5a-b)\sin x+(5b+a)\cos x$

সহগ সমীকৃত করে পাই, $5b+a=0\Rightarrow a=-5b$

$5a-b=1\Rightarrow b=-\frac{1}{26}\therefore a=\frac{5}{26}$

গ. 05 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

16. $f(x)=\sin x-\cos x$ **[RB'21]**

$g(x)=x^4$

(ক) $\int\{f(x)\}^2dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int\frac{1-f(x)}{1+f(x)}dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রমাণ কর, $\int_0^{\frac{\pi}{4}}g(\cos\theta)d\theta=\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}$ 4

সমাধান

ক. $\int f\{x\}^2\,dx = \int(\sin x - \cos x)^2 dx = \int\{(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2\sin x\cos x\}\,dx$

$= \int(1 - \sin 2x)dx = x + \frac{1}{2}\cos 2x + c$ **(Ans.)**

খ. $\int \frac{1-f(x)}{1+f(x)}dx = \int \frac{1-(\sin x-\cos x)}{1+(\sin x-\cos x)}dx = \int \frac{\{1-(\sin x-\cos x)\}^2 dx}{\{1+(\sin x-\cos x)\}\{1-(\sin x-\cos x)\}}$

$= \int \frac{1-2(\sin x-\cos x)+(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin 2x)}{1-(\sin x-\cos x)^2}dx = \int \frac{2-\sin 2x-2\sin x+2\cos x}{(1-1)+\sin 2x}dx$

$= \int\{2\operatorname{cosec}2x - 1 - \sec x - \operatorname{cosec}x\}\,dx = \ln(\tan x) - x - \ln|\sec x + \tan x| - \ln\tan\frac{x}{2} + c$ **(Ans.)**

গ. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(\cos\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2\theta)^2 d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)^2 d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)d\theta$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{1 + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\}\,d\theta = \frac{1}{4}\left[\theta + \sin 2\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}[\frac{3\pi}{8} + 1 - 0] = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$ **(Proved)**

17. $f(x) = x^2$ **[RB'21]**

(ক) $\int \frac{5e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int\left[\frac{1+\{f(x)\}^2}{1+f(x)} + \frac{1}{f(x)+\sqrt{f(x)}+1}\right]dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) $\int_1^2\left[\sqrt{f(x)}e^{f(x)} + \frac{\{f(x)-1\}^2}{f(x)}\right]dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int \frac{5e^{2x}}{1+e^{4x}}dx = \int \frac{\frac{5}{2}du}{1+u^2}$ [ধরি, $e^{2x} = u$]$= \frac{5}{2}\int\frac{du}{1+u^2} = \frac{5}{2}\tan^{-1}u + c = \frac{5}{2}\tan^{-1}(e^{2x}) + c$ **(Ans.)**

খ. $\int\{\frac{1+\{f(x)\}^2}{1+f(x)} + \frac{1}{f(x)+\sqrt{f}(x)+1}\}dx = \int\{\frac{1+x^4}{1+x^2} + \frac{1}{x^2+x+1}\}\,dx$

$= \int\left\{\frac{x^4-1+2}{1+x^2} + \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\right\}dx = \int\left\{\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2+1)} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\right\}dx$

$= \int(x^2-1)\,dx + 2\int\frac{dx}{1+x^2} + \int\frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{x^3}{3} - x + 2\tan^{-1}x + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c$

$= \frac{x^3}{3} - x + 2\tan^{-1}x + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$ **(Ans.)**

গ. $\int\left[\sqrt{f(x)}e^{f(x)} + \frac{\{f(x)-1\}^2}{f(x)}\right]dx = \int\{xe^{x^2} + \frac{(x^2-1)^2}{x^2}\}\,dx$

$= \int xe^{x^2}dx + \int\frac{x^4-2x^2+1}{x^2}dx = \int xe^{x^2}dx + \int(x^2 - 2 + x^{-2})\,dx$

$= \frac{1}{2}\int e^u du + \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{x^{-1}}{-1} + c$ | ১ম সমাকলনে ধরি, $x^2 = u \therefore 2xdx = du$

$= \frac{e^u}{2} + \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + c = \frac{e^{x^2}}{2} + \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + c \therefore \int_1^2\left[\sqrt{f(x)}e^{f(x)} + \frac{\{f(x)-1\}^2}{f(x)}\right]dx$

$= \left[\frac{e^{x^2}}{2} + \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{e^4}{2} + \frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{2} - \frac{e}{2} - \frac{1}{3} + 2 + 1 = \frac{e^4-e}{2} + \frac{5}{6}$ **(Ans.)**

18. $f(x) = x\sin^{-1}x^2$ [Ctg.B'21]

$g(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$

(ক) সমাকলন কর: $\int 5\cos 4x \sin 3x\ dx$ 2

(খ) যোগজ নির্ণয় কর: $\int f(x)\,dx$ 4

(গ) $\int g(x)\,dx$ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int 5\cos 4x\sin 3x\ dx = \frac{5}{2}\int(2\sin 3x\cos 4x)\,dx = \frac{5}{2}\int(\sin 7x - \sin x)\,dx$

$= \frac{5}{2}\int \sin 7x\,dx - \frac{5}{2}\int \sin x\,dx = \frac{-5}{14}\cos 7x + \frac{5}{2}\cos x + c$ (**Ans.**)

খ. $f(x) = x\sin^{-1}x^2 \therefore \int f(x)\,dx = \int x\sin^{-1}x^2\,dx = \int \frac{1}{2}\sin^{-1}u\ du$ | Let, $x^2 = u \therefore 2x\,dx = du$

$= \frac{1}{2}\left[\sin^{-1}u\int du - \int\left\{\frac{d}{du}(\sin^{-1}u)\int du\right\}du\right] = \frac{1}{2}\left[u\sin^{-1}u - \int\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du\right]$

$= \frac{1}{2}\left[u\sin^{-1}u + \int\frac{dv}{2\sqrt{v}}\right]$ Let, $1-u^2 = v \Rightarrow -2udu = dv$ $= \frac{1}{2}\left[u\sin^{-1}u + \sqrt{v}\right] + c$

$= \frac{1}{2}\left[x^2\sin^{-1}x^2 + \sqrt{1-x^4}\right] + c$ (**Ans.**)

গ. $g(x) = \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{x^2-4+4}{x^2-4} = 1 - \frac{4}{4-x^2} \therefore \int g(x)\,dx = \int\left(1-\frac{4}{4-x^2}\right)dx = \int dx - 4\int\frac{1}{2^2-x^2}dx$

$= x - 4\int\frac{2\cos\theta\,d\theta}{4\cos^2\theta} = x - 2\int\sec\theta\ d\theta$ | Let, $x = 2\sin\theta \therefore dx = 2\cos\theta\ d\theta$

$= x - 2\ln|\sec\theta + \tan\theta| + c = x - 2\ln\left|\frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}\right| + c$

$= x - \ln\left|\frac{(x+2)^2}{4-x^2}\right| + c = x - \ln\left|\frac{(2+x)^2}{(2-x)(2+x)}\right| + c$

$= x - \ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + c$ (**Ans.**)

এখানে, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

19. $P(x) = \cos x, \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1.$ [Ctg.B'21]

(ক) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\cos 2x}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,P(x)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকের উপবৃত্ত এবং $x = 3$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\cos 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x}{2}dx = \frac{1}{2}[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}[1-0] = \frac{1}{2}$ (**Ans.**)

খ. $\int x^2 p(x)\,dx = \int x^2\cos x\ dx = x^2\int\cos x\ dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x^2)\int\cos x\ dx\right\}dx$

$= x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx = x^2\sin x - 2\left[x\int\sin x\,dx - \int\left\{\frac{dx}{dx}\int\sin x\,dx\right\}dx\right]$

$= x^2\sin x - 2[-x\cos x - \int(-\cos x)dx] = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,p(x)\,dx = [x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 - 0\right) = \frac{\pi^2}{4} - 2$ (**Ans.**)

গ. 05 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

20. $f(x) = 3 - 2x, g(x) = 3 + 4x - 4x^2, h(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$. [SB'21]

(ক) $\int \sin^{11} x \cos x\, dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $\int h(x)\, dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a}$. 4

সমাধান

ক. ধরি, $\sin x = z \therefore \cos x\ dx = dz \therefore \int \sin^{11} x \cos x\ dx = \int z^{11}\, dz = \frac{1}{12} z^{12} + c = \frac{1}{12} \sin^{12} x + c$ (Ans.)

খ. $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{g(x)}} = \int \frac{3-2x}{\sqrt{3+4x-4x^2}} dx = \int \frac{1-2x+2}{\sqrt{3+4x-4x^2}} dx = \int \frac{1-2x}{\sqrt{3+4x-4x^2}} dx + \int \frac{2dx}{\sqrt{2+4x-4x^2}}$

$= \frac{1}{4} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{z} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{-4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{4-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{3 + 4x - 4x^2} + \sin^{-1}\left(x - \frac{1}{2}\right) + c$ (Ans.)

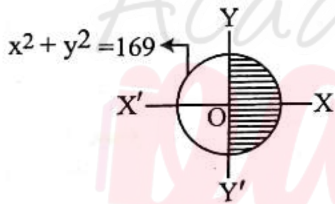
গ. ধরি, $x = a \sin\theta \Rightarrow dx = a\cos\theta\ d\theta \therefore \int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$

$= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2\theta}.\, a\cos\theta\ d\theta = \int a^2 \cos^2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2} \int 2\cos^2\theta\ d\theta = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2\theta)\ d\theta$

$= \frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^2}{4} \sin 2\theta = \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} \times 2 \times \frac{x}{a} \times \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

$= \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \times \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} \therefore \int h(x)\, dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$ (প্রমাণিত)

21. $P_1(x) = x\,; P_2(x) = \cot^{-1} x$ [SB'21]



(ক) $\int_2^5 \ln 2x\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} P_1(x)\, P_2(x) dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে চিত্রের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 07 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. $\int x \cot^{-1} x\, dx = \cot^{-1} x \int x\, dx - \int \left(-\frac{1}{1+x^2} . \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \cot^{-1} x + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$

$= \frac{x^2}{2} \cot^{-1} x + \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \cot^{-1} x + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \tan^{-1} x + c$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} P_1(x)\, P_2(x)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} \cot^{-1} x + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \tan^{-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -2.687$ (Ans.)

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

22. $f(x) = \sin x$ **[BB'21]**

(ক) $\frac{d}{dx}\left\{\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right\}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int \frac{d\theta}{1+3\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}^2}$ নির্ণয় কর। 4

(গ) দেখাও যে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{1 + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\}^2 f(x)dx = \frac{7}{3}$. 4

সমাধান

ক. $\frac{d}{dx}\left\{\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\ln\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\ln\tan\frac{x}{2}\right\} = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}.\sec^2\frac{x}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}$ **(Ans.)**

খ. $\int \frac{d\theta}{1+3\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}^2} = \int \frac{d\theta}{1+3\cos^2\theta} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{1+\tan^2\theta+3} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{4+\tan^2\theta} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{2}\right) + c$ **(Ans.)**

গ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{1 + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 f(x)dx\right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{1+\cos x\}^2 \sin x\, dx$

$= -\frac{1}{3}[(1+\cos x)^3]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}[1-8] = \frac{7}{3} = R.H.S$ (দেখানো হল)

23. $P(x) = 4x + 3, Q(x) = x$ **[BB'21]**

(ক) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{p(x)}}$ নির্ণয় কর। 4

(গ) ক্যালকুলাসের সাহায্যে $4\{Q(x)\}^2 + 9\{Q(y)^2\}^2 = 36$ বক্ররেখাটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \frac{1}{2} \times \sin\frac{x}{2} = 2 \times \frac{1}{2} \times \sin\theta = 0$ **(Ans.)**

খ. মনে করি, $4x + 3 = z^2 \Rightarrow 4dx = 2z\, dz \Rightarrow dx = \frac{z}{2}dz$

আবার, $(2x+1) = \frac{z^2-1}{2}$; $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{4x+3}} = \int \frac{\frac{z}{2}dz}{\frac{z^2-1}{2}.z} = \int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4x+3}-1}{\sqrt{4x+3}+1}\right| + c$ **(Ans.)**

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

24. দৃশ্যকল্প: $f(x) = \cos x, g(x) = 2x^2 + 2y^2$. **[JB'21]**

(ক) $\int xe^{2x^2}dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{8+\{f(x)\}^2}dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে $g(x) = 72$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int x\, e^{2x^2}\, dx = \int \frac{1}{4}e^y\, dy = \frac{1}{4}\, e^y + c = \frac{1}{4}\, e^{2x^2} + c$ | ধরি, $2x^2 = y \Rightarrow 4x\, dx = dy$ **(Ans.)**

খ.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{8+\{f(x)\}^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{8+\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{9-\sin^2 x}$

$= \int_0^1 \frac{du}{3^2-u^2} = \left[\frac{1}{2\times 3}\ln\left|\frac{3+u}{3-u}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{6}\left[\ln\frac{4}{2} - \ln\frac{3}{3}\right] = \frac{1}{6}\ln 2$ **(Ans.)**

ধরি, $\sin x = u \Rightarrow \cos x\; dx = du$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	1

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

25. দৃশ্যকল্প: $f(x) = x^2\sqrt{16-x^2}$, $g(x) = y^2 - 8x$ এবং $h(x) = x^2 - 8y$. [JB'21]

(ক) $\int x \ln 2x \, dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$ এর নির্ণয় কর। 4

(গ) $g(x) = 0$ এবং $h(x) = 0$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int x\ln 2x \, dx = \ln 2x \int x\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\ln 2x) \int x\, dx\right\}dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln 2x - \int \frac{2}{2x}\times\frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln 2x - \int\frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln 2x - \frac{x^2}{4} + c$ (Ans.)

খ. $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx = \int_{-2}^{2} x^2\sqrt{16-x^2}\, dx$

$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 16\sin^2\theta\left(\sqrt{16-16\sin^2\theta}\right)4\cos\theta\, d\theta$

$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 256\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 64\sin^2 2\theta\, d\theta$

ধরি, $x = 4\sin\theta$

$\therefore dx = 4\cos\theta\, d\theta$

x	-2	2
0	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$

$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 32(1-\cos 4\theta)\, d\theta = 32\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 32\left[\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 32\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{32\pi}{3} - 8\sqrt{3}$ (Ans.)

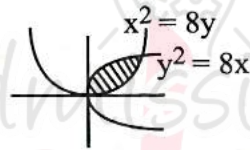
গ. $g(x) = 0 \Rightarrow y^2 - 8x = 0 \Rightarrow y^2 = 8x \cdots\cdots\cdots$ (i)

$h(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 8y \cdots\cdots\cdots$ (ii)

(i) ও (ii) এর ছেদবিন্দুতে $y^4 = 64x^2 = 64\times 8y$

$\Rightarrow y(y^3 - 8^3) = 0 \Rightarrow y = 0$ অথবা $y = 8$

$y = 0$ হলে $x = 0$ এবং $y = 8$ হলে $x = 8$



$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \int_0^8 (y_2 - y_1)\, dx = \int_0^8\left(\sqrt{8x} - \frac{x^2}{8}\right)dx = \left[\sqrt{8}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{24}\right]_0^8 = \frac{128}{3} - \frac{64}{3} = \frac{64}{3}$ বর্গ একক। (Ans.)

26. $h(\theta) = \tan^{-1}\theta$ এবং $x^2 + y^2 = 25$ একটি বৃত্তের সমীকরণ। [CB'21]

(ক) $\int\sqrt{1-\sin 2x}\, dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int x\, h(x) dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) যোগজীকরণের সাহায্যে উদ্দীপকে প্রদত্ত বৃত্তের প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

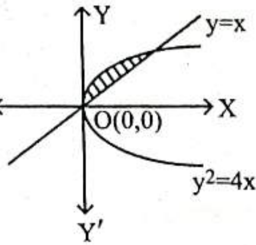
ক. $\int\sqrt{1-\sin 2x}dx = \int\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}dx = \int(\sin x - \cos x)\, dx$

$= -\cos x - \sin x + c = -(\cos x + \sin x) + c$ (Ans.)

খ. $\int xh(x)\, dx = \int x\tan^{-1}x\, dx = \tan^{-1}x\int x dx - \int\left(\frac{1}{1+x^2}\int x dx\right)dx$

$= \frac{x^2\tan^{-1}x}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$ (Ans.)

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

27. $f(x) = e^x$ এবং চিত্র: 

[CB'21]

(ক) যোগজ নির্ণয় কর: $\int xe^{x^2}dx$. 2

(খ) $\int_0^3 \frac{xf(x)}{(1+x)^2}dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

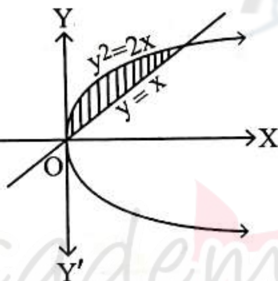
(গ) উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. ধরি, $x^2 = z \Rightarrow 2xdx = dz \therefore \int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^z dz = \frac{e^z}{2} + c = \frac{e^{x^2}}{2} + c$ (Ans.)

খ. $\int_0^3 \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx = \int_0^3 e^x\left\{\frac{1+x}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2}\right\}dx = \int_0^3 e^x\left\{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right\}dx = \left[\frac{e^x}{1+x}\right]_0^3 = \frac{e^3}{4} - 1$ (Ans.)

গ. 06 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

28. দৃশ্যকল্প-১: 

[Din.B'21]

দৃশ্যকল্প-২: $h(x) = \frac{1}{x(x-1)^2(x^2+1)}$.

(ক) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) সমাকলন কর: $\int h(x)\,dx$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-১ এ উল্লিখিত ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\sin^{-1}x]_0^1 = \frac{\pi}{2}$ (Ans.)

খ. 05 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. 06 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

29. $f(x) = \frac{1}{1+\sin x - \cos x}$, $g(x) = \frac{2+x}{1+x^2}$. [Din.B'21]

(ক) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) x এর সাপেক্ষে f(x) এর সমাকলন কর। 4

(গ) 0 থেকে 1 সীমার মধ্যে $\int g(x)\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = -[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -[0-1] = 1$ **(Ans.)**

খ. $\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x} = \int \frac{dx}{1+\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}-\frac{(1-\tan^2\frac{x}{2})}{\sec^2\frac{x}{2}}} = \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{1+\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}-1+\tan^2\frac{x}{2}} = \int \frac{dz}{z^2+z}$ [∵ $\tan\frac{x}{2} = z$ ধরে]

$= \int \frac{(z+1)-z}{z(z+1)}dz = \int \left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\right)dz = \ln\left|\frac{z}{z+1}\right| + c = \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right| + c$ **(Ans.)**

গ. $\int_0^1 \frac{2+x}{1+x^2}dx = 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \left[2\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}(\pi+\ln 2)$ **(Ans.)**

30. দৃশ্যকল্প: $g(x) = \cot^{-1}(x-1), f(x) = x$. **[MB'21]**

(ক) $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-36}}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int f(x)g(x)dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) $f\frac{f(x)}{\{f(x)-1\}\{f(x^2)+1\}}dx$ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 05 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. 08 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. 05 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

31. দৃশ্যকল্প: $f(y) = y, g(x,y) = x^2+y^2-225$. **[MB'21]**

(ক) $\int \ln 7x dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int_0^8 f(x^2)\sqrt{64-f(x^2)}\,dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) $g(x,y) = 0$ দ্বারা x অক্ষের উপরিভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 11 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. 25 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

32. $f(x) = \cos x, g(x,y) = 9x^2+25y^2$ **[DB'19]**

(ক) সমাকলন কর: $\int \frac{dx}{4f(\cos^{-1}x^2)+9}$. 2

(খ) $\int_1^3 \frac{1}{x}\sqrt{1-\{f(\ln x)\}^2}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) $g(x,y) = 225$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int \frac{dx}{4\cos(\cos^{-1}x^2)+9} = \int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)+c$ **(Ans.)**

খ. $\int_1^3 \frac{1}{x}\sqrt{1-\{f(\ln x)\}^2}\,dx = \int_1^3 \frac{1}{x}\sqrt{1-\cos^2(\ln x)}\,dx = \int_1^3 \frac{1}{x}\sin(\ln x)dx$

Let, $\ln x = z \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dz$.

x	1	3
z	0	ln 3

$\therefore \int_1^{\ln 3} \sin z\, dz = [-\cos z]_0^{\ln 3} = -\cos(\ln 3)+\cos 0 = 1-\cos(\ln 3)$ **(Ans.)**

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

33. $f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}$; একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2 = 6x$ ও একটি সরলরেখার সমীকরণ $y = x$. [RB'19]

(ক) $\int x \ln x^2 dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int f(x)dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকের পরাবৃত্ত ও সরলরেখার দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int x \ln x^2 dx = \frac{1}{2}\int \ln z dz = \frac{1}{2}\left[\ln z \int dz - \int\left\{\frac{d}{dz}\ln z \int dz\right\}dz\right]$

$= \frac{1}{2}\left[z\ln z - \int \frac{1}{z} z dz\right] = \frac{1}{2}[z\ln z - z] + c$

$= \frac{1}{2}(x^2\ln x^2 - x^2) + c$ (Ans.)

$x^2 = z \Rightarrow 2xdx = dz$

$\Rightarrow xdx = \frac{dz}{2}$

খ. 05 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. 06 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

34. $f(x) = x$ ……………. (i) [Ctg.B'19]

$g(x) = \cos^{-1} x^2$ …… (ii)

$y^2 = 7x$ ……………. (iii)

(ক) $\int(\cot^2 7x + \sec^2 9x)dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) যোগজ নির্ণয় কর: $\int f(x)g(x)dx$. 4

(গ) (i) নং সরলরেখার ও (iii) নং বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int (\cot^2 7x + \sec^2 9x)\, dx = \int (\text{cosec}^2 7x - 1 + \sec^2 9x)dx = -\frac{1}{7}\cot 7x - x + \frac{1}{9}\tan 9x + c$ (**Ans.**)

খ. ধরি, $x^2 = z \Rightarrow 2x\, dx = dz$; $xdx = \frac{dz}{2}$; $\int f(x)g(x)dx = \int x\cos^{-1} x^2 dx$

$\therefore \frac{1}{2}\int \cos^{-1} z\, dz = \frac{1}{2}\int 1.\cos^{-1} z\, dz = \frac{1}{2}\left[\cos^{-1} z \int 1dz - \int\left(\frac{-1}{\sqrt{1-z^2}} \times \int 1dz\right)dz\right]$

$= \frac{1}{2}\left[z\cos^{-1} z + \int \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}dz\right] = \frac{1}{2}\left[z\cos^{-1} z + \left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{-2z}{\sqrt{1-z^2}}dz\right]$

$= \frac{1}{2}\left[z\cos^{-1} z - \frac{1}{2}.2\sqrt{1-z^2}\right] + c = \frac{1}{2}\left[z\cos^{-1} z - \sqrt{1-z^2}\right] + c$ (**Ans.**)

গ. 06 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

35. $f(x) = \cos^{-1} 2x$. [SB'19]

(গ) $\int x\, f(x)dx$ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

গ. 34 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

36. $g(x) = \sin x,\ f(x, y) = x^2 + y^2 - 16$ [SB'19]

(খ) $\int_0^{\pi/2}\{g(x)\}^5\left\{\sqrt{1-\{g(x)\}^2}\right\}^4 dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) $f(x, y) = 0$ বক্ররেখা এবং $x = 2$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. $\int_0^{\pi/2}\{g(x)\}^5\left\{\sqrt{1-\{g(x)\}^2}\right\}^4 dx = \int_0^{\pi/2}\sin^5 x\cos^4 x\, dx$

$= \int_0^{\pi/2}\cos^4 x \times \sin^4 x \sin x\, dx = \int_0^{\pi/2}\cos^4 x\,(1-\cos^2 x)^2 \sin x\, dx$

$= \int_0^{\pi/2}\cos^4 x\,(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\sin x\, dx = -\int_0^{\pi/2}(\cos^4 x - 2\cos^6 x + \cos^8 x)d(\cos x)$

$= -\left[\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{2\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^9 x}{9}\right]_0^{\pi/2} = -\left[0 - 0 + 0 - \frac{1}{5} + \frac{2}{7} - \frac{1}{9}\right] = \frac{8}{315}$ (**Ans.**)

গ. 05 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

37. $y = 2x \ldots\ldots (i)$, $x^2 + y^2 = 8x \ldots\ldots (ii)$, $f(x) = \cos^4 x$. [BB'19]

(ক) $\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x} dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int_0^{\pi} xf(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) (i) নং ও (ii) নং বক্ররেখাদ্বয়ের সাধারণ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x} dx$ ধরি, $\cos x \equiv \lambda(\cos x + \sin x) + \mu(\cos x - \sin x)$

এখন, $\cos x$ ও $\sin x$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $1 = \lambda + \mu \;\therefore\; \lambda = 1 - \mu \ldots\ldots (i)$

আবার, $0 = \lambda - \mu \;\therefore\; \lambda = \mu$ এখন, (i) নং হতে পাই, $\lambda = 1 - \lambda \Rightarrow 2\lambda = 1 \;\therefore\; \lambda = \frac{1}{2} \;\therefore\; \mu = \frac{1}{2}$

এখন, $\int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)+\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)}{\cos x+\sin x} dx$

$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\cos x + \sin x| + c$ **(Ans.)**

খ. $\int_0^{\pi} xf(x)dx = \int_0^{\pi} x\cos^4 x\, dx = \int_0^{\pi} \frac{x}{4}.(2\cos^2 x)^2 dx$

$= \int_0^{\pi} \frac{x}{4}.(1+\cos 2x)^2 dx = \int_0^{\pi} \frac{x}{4}(1 + \cos^2 2x + 2\cos 2x)dx$

$= \int_0^{\pi} \frac{x}{8}(2 + 2\cos^2 2x + 4\cos 2x)\, dx = \int_0^{\pi} \frac{x}{8}(2 + 1 + \cos 4x + 4\cos 2x)dx$

$= \int_0^{\pi}\left(\frac{3x}{8} + \frac{x\cos 4x}{8} + \frac{x\cos 2x}{2}\right)dx$

এখন, $\int_0^{\pi}\frac{3x}{8}dx = \left[\frac{3}{8}\times\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{3\pi^2}{16}$; $\int_0^{\pi}\frac{x\cos 4x}{8}dx = \frac{1}{8}\int_0^{\pi} x\cos 4x dx = \frac{1}{8}\left[x\int \cos 4x\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int \cos 4x dx\right\}dx\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}x\sin 4x - \frac{1}{4}\int \sin 4x\, dx\right]_0^{\pi} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}x\sin 4x + \frac{1}{16}\cos 4x\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\pi\sin 4\pi + \frac{1}{16}\cos 4\pi - \frac{1}{16}\cos 0\right] = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right] = 0$

এবং $\int_0^{\pi}\frac{x\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cos 2x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi} = 0 \;\therefore\; \int_0^{\pi} x\, f(x)dx = \frac{3\pi^2}{16}$ **(Ans.)**

গ. 05 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

38. $x^2 + y^2 = 36 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$ [JB'19]

$f(y) = y - 1,\; g(y) = y^2 + 4 \ldots\ldots (ii)$

(ক) $\int \frac{1}{1+\cos 4x} dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) (i) এ বর্ণিত বৃত্তের x অক্ষের উপরের অংশের ক্ষেত্রফল সমাকলন পদ্ধতিতে নির্ণয় কর। 4

(গ) $\int \frac{f(y)+1}{f(y)g(y)} dy$ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int \frac{1}{1+\cos 4x} dx = \int \frac{1}{2\cos^2 2x} dx = \frac{1}{2}\int \sec^2 2x\, dx = \frac{1}{4}\int \sec^2 2x\, d(2x) = \frac{1}{4}\tan 2x + c$ **(Ans.)**

খ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

গ. 05 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

39. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = x + 1,\ g(x) = x - 1,\ h(x) = x^2 + 9$ [CB'19]

দৃশ্যকল্প-২: $y = \cos x$

(ক) $\int_1^2 x^3 e^{x^4} dx$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int \left\{\frac{f(x)}{g(x)\,h(x)} + \sqrt[3]{x}\right\} dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ উল্লিখিত ফাংশনটি দ্বারা x অক্ষের সাথে আবদ্ধ একটি চাপের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

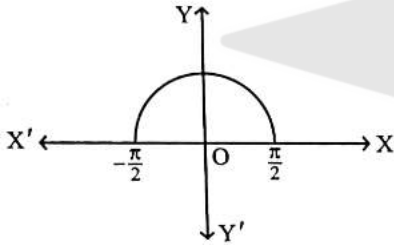
সমাধান

ক. ধরি, $x^4 = z \therefore 4x^3 dx = dz \quad \therefore x^3 dx = \frac{1}{4} dz$ যখন, $x = 1$, তখন $z = 1$; যখন, $x = 2$, তখন $z = 16$

এখন, $\int_1^2 x^3 e^{x^4} dx = \frac{1}{4}\int_1^{16} e^z dz = \frac{1}{4}(e^{16} - e)$ **(Ans.)**

খ. 05 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ.



ক্ষেত্রফল= $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 2[\sin x]_0^{\pi/2} = 2.\sin\frac{\pi}{2} = 2$ বর্গ একক

$\therefore$ একটি চাপের ক্ষেত্রফল $= 2$ বর্গ একক **(Ans.)**

40. $f(x, y) = 16x^2 + 25y^2 - 400,\ u = e^x.$ [Din.B'19]

(ক) $\int \ln x^4 dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int_0^{\ln 2} \frac{u^2}{1+u^2} dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) সমাকলনের সাহায্যে $f(x, y) = 0$ দ্বারা x অক্ষের উপরিভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int \ln x^4 dx = \ln x^4 \int dx - \int\left(\frac{d}{dx}\ln x^4 \int dx\right) dx = x\ln x^4 - \int \frac{4x^3}{x^4} \times x dx = x\ln x^4 - 4x + c$ **(Ans.)**

খ. $\int_0^{\ln 2} \frac{u^2}{1+u^2} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} \times 2dx}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} \frac{d(1+e^{2x})}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2}\,[\ln|1 + e^{2x}|]_0^{\ln 2}$

$= \frac{1}{2}(\ln|1 + e^{2\ln 2}| - \ln|1 + e^{o}|) = \frac{1}{2}\,(\ln 5 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$ **(Ans.)**

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

41. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = x + 6.$ [All.B'18]

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = x^2$

(খ) $\int \frac{xdx}{f(x)\{g(x)+4\}}$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) $g(x)$ বক্ররেখা এবং $f(x)$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. 05 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. 06 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

42. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}$. [DB'17]

দৃশ্যকল্প-২: $2x^2 + 2y^2 = 64$.

(ক) $\int \ln x dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে $\int f(x)dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ দ্বারা প্রথম চতুর্ভাগের আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 11 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. 05 নং প্রশ্নের (খ) এর অনুরূপ।

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

43. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1}$ ……… (i) [RB'17]

$g(x) = x^2 + 1$ ……… (ii)

(ক) $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$ নির্ণয় কর। 2

(গ) $\int_0^1 f(x).g(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right) dx = \int (1+\sin x)dx = (x - \cos x) + c$ **(Ans.)**

গ. 07 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

44. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1,\ x = 3;\ f(x) = xe^x, g(x) = (x+1)^3$ [RB'17]

(খ) $\int_0^3 \frac{f(x)}{\frac{d}{dx}\{g(x)\}} dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকের উপবৃত্ত এবং সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. ধরি, $I = \int_0^3 \frac{f(x)}{\frac{d}{dx}(g(x))} dx = \int_0^3 \frac{xe^x}{\frac{d}{dx}\{(x+1)^3\}} dx$ [মান বসিয়ে] $= \int_0^3 \frac{xe^x}{3(x+1)^2} dx = \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

এখন, $I_1 = \int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx = \int \frac{(x+1-1)e^x}{(x+1)^2} dx = \int \left\{\frac{(x+1)e^x}{(x+1)^2} - \frac{e^x}{(x+1)^2}\right\} dx$

$= \int \frac{e^x}{(x+1)} dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{x+1}\int e^x dx - \int \left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+1}\right)\int e^x dx\right\} dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2} dx$

$= e^x.\frac{1}{x+1} + \int \frac{e^x}{(x+1)^2} e^x dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2} e^x dx = \frac{e^x}{x+1}$

$\therefore I = \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{3}\left[\frac{e^x}{x+1}\right]_0^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3+1} - \frac{e^0}{0+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{4} - 1\right)$ **(Ans.)**

গ. 05 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

45. দৃশ্যকল্প: $g(x) = x\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$, $y = \cos(m\sin^{-1}p)$ [Ctg.B'17]

(খ) দৃশ্যকল্পের আলোকে x এর সাপেক্ষে g(x) এর যোগজ নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. $g(x) = x\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} \Rightarrow \int g(x)\,dx = \int x\,\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}dx = \text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}\int x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}\int x\,dx\right\}dx$

$= \text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2} - \int\frac{-1}{\frac{1}{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}} = \frac{x^2}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{x^2}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int\frac{-x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{x^2}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{x^2}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{1}{4}\sin^{-1}x - \frac{1}{2}\sin^{-1}x + c$

$= \frac{x^2}{2}\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} - \frac{1}{4}\sin^{-1}x + c$ **(Ans.)**

46. $\varphi(x,y) = 9x^2 + 16y^2 - 144;\ f(x) = x - 2$ **এবং** $g(x) = \sin^6 x$. **[SB'17]**

(ক) $\int\frac{xdx}{(x-1)}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) (i) $\int_0^2 f(x)\tan^{-1}(x-2)dx$ এর মান নির্ণয় কর। (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\cos x dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) $\varphi(x,y) = 0$ ও $f(x) = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int\frac{xdx}{x-1} = \int\frac{x-1+1}{x-1}dx = \int dx + \int\frac{dx}{x-1} = x + \ln(x-1) + c$ **(Ans.)**

খ. (i) $\int_0^2(x-2)\tan^{-1}(x-2)dx$

ধরি, $x - 2 = z,\ x = z + 2 \therefore dx = dz \therefore x = 2$ হলে, $z = 0 \ \therefore x = 0$ হলে, $z = -2$

$\therefore \int_{-2}^0 z\tan^{-1}z\,dz = \tan^{-1}z\int_{-2}^0 z\,dz - \int_{-2}^0\frac{z^2}{2}\times\frac{1}{1+z^2}dz$

$= -\frac{(-2)^2}{2}\tan^{-1}(-2) - \frac{1}{2}\int_{-2}^0\frac{1+z^2-1}{1+z^2}dz = 2\tan^{-1}(2) - \frac{1}{2}\int_{-2}^0 dz + \frac{1}{2}\int_{-2}^0\frac{dz}{1+z^2}$

$= 2\tan^{-1}2 - \frac{1}{2}[z]_{-2}^0 + \frac{1}{2}[\tan^{-1}z]_{-2}^0 = 2\tan^{-1}2 + \frac{2}{2} - \frac{\tan^{-1}(-2)}{2}$

$= 1 + 2\tan^{-1}2 + \frac{1}{2}\tan^{-1}(2) = 1 + \frac{5}{2}\tan^{-1}(2)$ **(Ans.)**

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\cos x dx$; $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\,.\cos x\,dx$

ধরি, $\sin x = z$

$\cos x dx = dz$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
z	0	1

$\therefore I = \int_0^1 z^6\,dz = \frac{1}{7}[z^7]_0^1 = \frac{1}{7}$

গ. 05 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

47. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{12-16x^2}}$ **এবং** $\Psi(x) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{5}\right)$ **[BB'17]**

(গ) উদ্দীপকের আলোকে নির্ণয় কর: (i) $\int\varphi(x)dx$; (ii) $\int\Psi(x)dx$. 4

সমাধান

গ. (i) $\int \emptyset(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{12-16x^2}}$ [মান বসিয়ে]

$= \int \frac{1}{\sqrt{16\left(\frac{12}{16}-x^2\right)^2}} dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)^2-(x)^2}} dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-x^2}} dx = \frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c = \frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}} + c$

(ii) $\int \Psi(x)dx$

$\int \tan^{-1}(\frac{x}{5})dx$ [মান বসিয়ে]

$= \int \tan^{-1}\left(\frac{x}{5}\right).1.dx = \tan^{-1}\frac{x}{5}\int 1\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{x}{5}\right)\int 1dx\right\}dx$

$= x\tan^{-1}\frac{x}{5} - \int\left\{\frac{1}{1+\frac{x^2}{25}}.\frac{1}{5}x\right\}dx = x\tan^{-1}\frac{x}{5} - \int\left(\frac{1}{\frac{25+x^2}{25}}.\frac{x}{5}\right)dx$

$= x\tan^{-1}\frac{x}{5} - \int\left(\frac{25}{25+x^2}.\frac{x}{5}\right)dx = x\tan^{-1}\frac{x}{5} - \int\frac{5x}{25+x^2}dx$

$= x\tan^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) - \frac{5}{2}\int\frac{2x}{25+x^2}dx = x\tan^{-1}\frac{x}{5} - \frac{5}{2}\int\frac{dz}{z}$ [ধরি, $25 + x^2 = z \therefore 2xdx = dz$]

$= x\tan^{-1}\frac{x}{5} - \frac{5}{2}\ln|z| + c = x\tan^{-1}\frac{x}{5} - \frac{5}{2}\ln|25 + x^2| + c$ **(Ans.)**

48. দৃশ্যকল্প-১: $f(\theta) = \cos^3\theta,\ g(\theta) = \sin\theta$ **[BB'17]**

দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + y^2 = 36.$

(ক) $\int\frac{dx}{1+e^x}$ নির্ণয় কর। **2**

(খ) দৃশ্যকল্প ১ হতে নির্ণয় কর: (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+g(\theta)}d\theta$; (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\theta)\sqrt[3]{g(\theta)}d\theta.$ **4**

(গ) দৃশ্যকল্প ২-এর আলোকে বৃত্তটি দ্বারা আবদ্ধক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমাকলন পদ্ধতিতে নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

ক. ধরি, $1 + e^{-x} = z \therefore e^{-x}dx = -dz$

$\int\frac{dx}{1+e^x} = \int\frac{e^{-x}}{e^{-x}(1+e^x)}dx = \int\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \int\frac{-dz}{z} = -\ln|z| + c = -\ln|1+e^{-x}| + c$ **(Ans.)**

খ. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+g(\theta)}\,d\theta = \int_0^{2}\sqrt{1+\sin\theta}\,d\theta$ [$\because g(\theta) = \sin\theta$]

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)d\theta$

$= \left[\frac{-\cos\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} - (\sin 0 - \cos 0)\right]$

$= 2\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (0-1)\right] = 2\times 1 = 2$

(ii) ধরি, $\sin\theta = z \therefore \cos\theta\,d\theta = dz$ আবার, $\theta = \frac{\pi}{2}$ হলে, $\sin\frac{\pi}{2} = z$ বা, $z = 1$

এবং $\theta = 0$ হলে, $\sin\theta = z$ বা, $z = 0$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\theta)\sqrt[3]{g(\theta)}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta\cos^2\theta\sqrt[3]{\sin\theta}\,d\theta$ [মান বসিয়ে]

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta\cos^2\theta\sqrt[3]{\sin\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\cos\theta(1-\sin^2\theta)\sqrt[3]{\sin\theta}\}\,d\theta$

$= \int_0^1(1-z^2)\sqrt[3]{z}\,dz = \int_0^1(1-z^2)z^{\frac{1}{3}}\,dz = \int_0^1\left(z^{\frac{1}{3}} - z^{\frac{7}{3}}\right)_{dz}$

$= \left[\frac{z^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{z^{\frac{7}{3}+1}}{\frac{7}{3}+1}\right]_0^1 = \left[\frac{z^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{z^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}}\right]_0^1 = \left[\frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{10}z^{\frac{10}{3}}\right]_0^1 = \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{10}\right) - 0 = \frac{15-6}{20} = \frac{9}{20}$ **(Ans.)**

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

49. $H(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$ [JB'17]

(গ) $\int_0^1 H(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

গ. $I = \int_0^1 H(x)\,dx = \int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$; $\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$ ∴ $I = \int_0^1 e^x\left\{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right\}dx$

$\frac{1}{x+1} = y$ হলে $y' = -\frac{1}{(x+1)^2}$ ∴ $I = \int_0^1 e^x\left\{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right\}dx = \left[\frac{e^x}{x+1}\right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1$ **(Ans.)**

50. $u = e^x$ এবং $4x^2 + 9y^2 = 36$ [CB'17]

(ক) দেখাও যে, $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$ 2

(খ) $\int_0^{\ln x} \frac{u}{1+u}dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) যোগজীকরণের সাহায্যে প্রদত্ত উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. 11 নং প্রশ্নের (ক) এর অনুরূপ।

খ. ধরি, $1 + e^x = z$ ∴ $e^x dx = dz$ আবার, $x = 0$ হলে, $1 + e^0 = z \Rightarrow z = 1 + 1 = 2$ এবং $x = \ln 2$ হলে, $1 + e^{\ln 2} = z$ $\Rightarrow 1 + 2 = z \Rightarrow z = 3$; $\int_0^{\ln 2} \frac{u}{1+u}dx = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int_2^3 \frac{dz}{z} = [\ln z]_2^3 = \ln 3 - \ln 2$ **(Ans.)**

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

51. $f(x) = \ln x$ এবং $g(x) = e^x$. [Din.B'17]

(গ) $\int_1^{e^2} \frac{f(x)}{x}dx + \int_1^2 g(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

গ. $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx + \int_1^2 e^x\,dx$; $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx$

ধরি, $\ln x = Z \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dz$

x	1	e^2
z	0	2

$\Rightarrow \int_0^2 Z dz = \frac{1}{2}[Z^2]_0^2 = 2$ আবার, $\int_1^2 e^x dx = [e^x]_1^2 = e^2 - e$ ∴ $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx + \int_1^2 e^x\,dx = 2 + e^2 - e$ **(Ans.)**

52. $g(z) = mz\sin^{-1}z$ একটি ফাংশন এবং $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ একটি বক্ররেখা। [Din.B'17]

(ক) $\int_1^2 \frac{1}{z}\cos(\ln z)\,dz$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int g(x)dx$ এর যোগজ নির্ণয় কর। 4

(গ) $b > a$ হলে উদ্দীপকে প্রদত্ত বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের অর্ধাংশের ক্ষেত্রফল বের কর। 4

সমাধান

ক. $\int_1^2 \frac{1}{z}\cos(\ln z)dz = \int_1^2 \cos(\ln z)d(\ln z) = [\sin(\ln z)]_1^2 = \sin(\ln 2) - \sin(0°) = \sin(\ln 2)$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $g(z) = mz\sin^{-1}z$ ∴ $g(x) = mx\sin^{-1}x$

$I = \int g(x)\,dx = \int mx\sin^{-1}x\,dx = m\int x\sin^{-1}x\,dx = m\int \sin^{-1}x.\,xdx$

$= m\left[\sin^{-1}\int x\,dx - \int\left[\left\{\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)\right\}\cdot\int x\,dx\right]dx\right] + c = m\left[\sin^{-1}x\frac{x^2}{2} - \int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{x^2}{2}\right)dx\right]dx + c$

$= m\left[\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\right] + c = m\left[\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\int\frac{(-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx\right] + c = m\left[\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx\right] + c$

$= m\left[\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] + c = m\left[\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\left(\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right) - \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right] + c$

$= m\left[\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{4}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4}\sin^{-1}x - \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right] + c$

$= m\left[\frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\sin^{-1}x\right] + c = \frac{mx^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{m}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{m}{4}\sin^{-1}x + c$

গ. 03 নং প্রশ্নের (গ) এর অনুরূপ।

◆ CQ: সম্ভাব্য প্রশ্ন ও সমাধান

01. $f(x) = e^x + 1, g(x) = x\sqrt{4-x}$ এবং $y^2 = 4ax$ ও $x^2 = 4ay$ দুটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

(ক) $\int \frac{dx}{f(x)}$ মান বের কর। 2

(খ) $\int_0^4 g(x)dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) পরাবৃত্তদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. বোর্ড প্রশ্ন 48 (ক) এর অনুরূপ।

খ. $\int_0^4 g(x)dx = \int_0^4 x\sqrt{4-x}\,dx = -\int_2^0 (4-z^2)\sqrt{z^2}\,(2z)dz$

$= -2\int_2^0 (4z^2 - z^4)\,dz$ ধরি, $4 - x = z^2; -dx = 2zdz$

x	0	4
z	2	0

$= -2\int_2^0 (4z^2 - z^4)dz = -2\left[\frac{4}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5\right]_2^0 = \frac{128}{15}$ (Ans.)

গ. বোর্ড প্রশ্ন 25 (গ) এর অনুরূপ।

02. $x^2 + y^2 = 16 \cdots\cdots\cdots (i), g(x) = x - 2$ এবং $f(x) = \ln x, x > 0$

(ক) $\int \sin^2 x \cos 2x\, dx = ?$ 2

(খ) $u = \{1 - f(x)\}e^{2f(x)}$ বক্ররেখাটির যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল তাদের ভুজ নির্ণয় কর। 4

(গ) (i) নং বৃত্ত এবং $g(x) = 0$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int \sin^2 x \cos 2x\, dx$

$\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x - \cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int\left\{\cos 2x - \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right\}dx$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\right\} + c = \frac{1}{4}\left(\sin 2x - x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c$

খ. $u = \{1 - f(x)\}e^{2f(x)} = (1-\ln x)e^{2\ln x} = (1-\ln x)e^{\ln x^2} = (1-\ln x)x^2 = x^2 - x^2\ln x$

$\frac{du}{dx} = 2x - x^2.\frac{1}{x} - \ln x.2x = x - 2x\ln x = x(1 - 2\ln x)$ স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল বলে $\frac{du}{dx} = 0 \therefore x = 0$

অথবা, $\ln x = \frac{1}{2} \therefore x = \sqrt{e}$ কিন্তু $x = 0$ হলে, $\ln x$ অসংজ্ঞায়িত। $\therefore x = \sqrt{e}$

গ. বোর্ড প্রশ্ন 05 (গ) এর অনুরূপ।

03. $f(x) = \sin x$

(ক) $\int e^x\{\sec x + \sec x \tan x\}\,dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int e^x f(x)$ এর যোগজীকরণ কর। 4

(গ) $y = f(x)$ বক্ররেখা x অক্ষের সাথে সৃষ্ট একটি চাপ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. ধরি, $g(x) = \sec x \therefore g'(x) = \sec x \tan x$; $\int e^x\{\sec x + \sec x \tan x\} dx$

$= \int e^x \{g(x) + g'(x)\}dx = e^x g(x) + c = e^x \sec x + c$ (Ans.)

খ. ধরি, $I = \int e^x f(x)dx$; $I = \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int \{\frac{d(e^x)}{dx} \int \sin x dx\} dx$

$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int\{\frac{d(e^x)}{dx} \int \cos x\, dx\} dx$

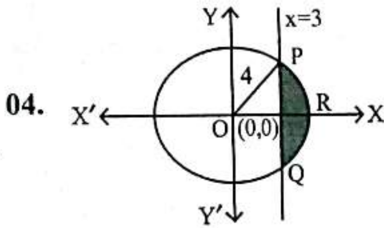
$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx \Rightarrow I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I + c_1 \Rightarrow 2I = e^x \sin x - e^x \cos x + c_1$

$\therefore I = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + c$ যেখানে $\left(c = \frac{c_1}{2}\right)$ (Ans.)

বিকল্প: $\underset{(+)\text{করে} \quad 2\sin x}{\overset{g(x)=\sin x-\cos x}{g'(x)=\cos x+\sin x}}$ $\int e^x f(x)dx = \int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}\int e^x 2\sin x\, dx = \frac{1}{2}\int e^x \left(g(x) + g'(x)\right) dx$

$= \frac{1}{2} e^x g(x) + c = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + c$

গ. বোর্ড প্রশ্ন 39 (গ) এর অনুরূপ।

04. 

(ক) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) যোগজীকরণের মাধ্যমে উল্লিখিত বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{e^x\, dx}{(e^x)^2+1} = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2+1^2} = \tan^{-1} e^x + c$ (Ans.)

খ. বোর্ড প্রশ্ন 05 (গ) এর অনুরূপ।

গ. বোর্ড প্রশ্ন 05 (গ) এর অনুরূপ।

05. $p = \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$ এবং $q = \cos^3 x\sqrt{\sin x}$

(ক) $\int(uv)dx =$ কত? [যেখানে u এবং v উভয়ই x এর ফাংশন।] 2

(খ) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} p dx =$ কত? 4

(গ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} q\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

সমাধান

ক. $\int(uv)dx = u\int v dx - \int\{\frac{du}{dx}\int v dx\} dx$

খ. $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} p\,dx = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} e^{\sin^{-1}x} d(\sin^{-1}x) = \left[e^{\sin^{-1}x}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} = e^{\sin^{-1}1} - e^{\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{3}}$ **(Ans.)**

গ. ধরি, $\sin x = z^2$; $\cos x dx = 2z dz$ হবে, $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
z	0	1

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} q\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sqrt{\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\sqrt{\sin x}\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sqrt{\sin x}\cos x\,dx$

$= \int_0^1 (1-z^4)\, z.2zdz = 2\int_0^1 (z^2-z^6)\,dz = 2\left[\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{7}z^7\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{7} = \frac{8}{21}$ **(Ans.)**

06. $\mathbf{f(x) = \sec x. \operatorname{cosec} x,\ g(x) = \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}}$ **এবং** $\mathbf{h(x) = \cot^{-1}x}$

(ক) $\int$ **f(x)dx নির্ণয় কর।** 2

(খ) $\int$ **g(x)dx নির্ণয় কর।** 4

(গ) $\int_1^{\sqrt{3}}$ **xh(x)dx নির্ণয় কর।** 4

সমাধান

ক. $\int f(x)\,dx = \int \sec x \operatorname{cosec} x\,dx = \int \frac{1}{\cos x \sin x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x \sin x}\,dx + \int \frac{\cos^2 x dx}{\cos x \sin x}$

$= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$; $= \ln|\sec x| - \ln|\operatorname{cosec} x| + c$ **(Ans)**

খ. ধরি, $xe^x = z$; $e^x(1+x)dx = dz$

$\int g(x)\,dx = \int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}\,dx = \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \int \sec^2 z\,dz = \tan z + c = \tan(xe^x) + c$ **(Ans.)**

গ. বোর্ড প্রশ্ন 08 (খ) এর অনুরূপ।

07. $\mathbf{f(x) = \int x\sin^{-1}x\,dx}$ **এবং** $\mathbf{g(x) = \int_8^{27} \frac{dx}{x - x^{\frac{1}{3}}}}$

(ক) $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}}$ **dx** 2

(খ) **f(x) এর যোগজীকরণ নির্ণয় কর।** 4

(গ) **g(x) এর মান নির্ণয় কর।** 4

সমাধান

ক. $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{(e^x)^2 - 1} = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2 - 1^2} = \frac{1}{2.1}\ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + c$ **(Ans.)**

খ. ধরি, $x = \sin\theta$; $dx = \cos\theta\,d\theta$ $\therefore \theta = \sin^{-1}x$

$\int f(x)dx = \int x\sin^{-1}x\,dx = \int \theta\sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int \theta\sin 2\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\theta.\cos 2\theta}{2} + \int \frac{\cos 2\theta}{2}\,d\theta\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{\theta}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\frac{\sin 2\theta}{2}\right] + c$

$= \frac{1}{8}\sin 2\theta - \frac{1}{4}\theta\cos 2\theta = \frac{1}{8}\,2\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{4}\theta\,(2\cos^2\theta - 1)$

$= \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\sin^{-1}x\left(2\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - 1\right) = \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\sin^{-1}x\,(1-2x^2)$ **(Ans.)**

বিকল্প: $\int x\sin^{-1}x\,dx = \sin^{-1}x\frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}\left(\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right) - \frac{1}{2}\sin^{-1}x = \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\sin^{-1}x(1-2x^2)$ **(Ans.)**

গ. ধরি, $x = z^3$; $dx = 3z^2dz$

$\int_8^{27} \frac{dx}{x - x^{\frac{1}{3}}} = \int_8^{27} F(x)\, dx$

এখন, $\int F(x)\, dx = \int \frac{dx}{x - x^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{3z^2dz}{z^3 - z}; = 3\int \frac{z^2dz}{z(z^2-1)}$

আবার, $z^2 - 1 = P$; $2zdz = dp$; $zdz = \frac{dp}{2}$

$3\int \frac{zdz}{z^2-1} = \frac{3}{2}\int \frac{dp}{p} = \frac{3}{2}\ln p + c = \frac{3}{2}\ln|z^2 - 1| + c$

$= \frac{3}{2}\ln|x^{\frac{2}{3}} - 1| + c \therefore \int_8^{27} \frac{dx}{x - x^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{2}\left[\ln\left|x^{\frac{2}{3}} - 1\right|\right]_8^{27} = \frac{3}{2}\ln\frac{8}{3}$ **(Ans.)**

08. $\mathbf{f(x) = x}$ **এবং** $\mathbf{g(x) = x^2 + 1}$

(ক) $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ নির্ণয় কর। **2**

(খ) মান নির্ণয় কর: (i) $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{g(x)} dx$ (ii) $\int_1^2 \frac{dx}{\{f(x)\}^2\sqrt{4 - \{f(x)\}^2}}$ **4**

(গ) $y = g(x)$ বক্ররেখা এবং $y = 10$ রেখা দ্বারা আবদ্ধক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

ক. ধরি, $x^2 + 1 = z \therefore 2xdx = dz$

$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln z + c = \frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| + c$

খ. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{g(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x^2+1} dx = [\tan^{-1}x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan^{-1}\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}0 = 1 - 0 = 1$

(ii)

$\int_1^2 \frac{dx}{\{f(x)\}^2\sqrt{4 - \{f(x)\}^2}} = \int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$

$= \int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{2^2 - x^2}} = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{-2\sin\theta\, d\theta}{4\cos^2\theta\sqrt{2^2 - 2^2\cos^2\theta}}$

$= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{-2\sin\theta d\theta}{4\cos^2\theta.2\sin\theta} = -\frac{1}{4}[\tan\theta]_{\frac{\pi}{3}}^0 = -\frac{1}{4}\left(\tan 0 - \tan\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ **(Ans.)**

ধরি, $x = 2\cos\theta$

$dx = -2\sin\theta\, d\theta$

x	1	2
θ	$\frac{\pi}{3}$	0

গ. বোর্ড প্রশ্ন 05 (গ) এর অনুরূপ।

09. $\mathbf{f(x) = (x - 1)^2}$ **এবং** $\mathbf{g(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2}}$

(ক) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-6x}} = ?$ **2**

(খ) $\int \frac{dx}{f(x)f(x-1)(x-2)} = ?$ **4**

(গ) $\int_0^3 e^x g(x)$ নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

ক. ধরি, $1 - 6x = z$; $-6dx = dz$

$I = \int \frac{1}{\sqrt[3]{1-6x}} dx = -\frac{1}{6}\int \frac{dz}{\sqrt[3]{z}} = -\frac{1}{6}\int z^{-\frac{1}{3}}dz = -\frac{1}{6}\frac{z^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = -\frac{1}{4}(1 - 6x)^{\frac{2}{3}} + c$

খ. ধরি, $z = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow zx - 2z = x - 1 \Rightarrow x - zx = 1 - 2z$

$\Rightarrow x(1-z) = 1 - 2z \quad \therefore x = \frac{1-2z}{1-z}$

$x - 2 = \frac{1-2z}{1-z} - 2 = -\frac{1}{1-z} \Rightarrow dx = -\frac{dz}{(1-z)^2}$

$\int \frac{Dx}{f(x)f(x-1)(x-2)} = \int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)^2(x-2)} = \int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)^3}$

$= \int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2(x-2)^5} = \int \frac{\frac{-dz}{(1-z)^2}}{z^2\frac{-1}{(1-z)^5}} = \int \frac{(1-z)^3\,dz}{z^2}$

$= \int \frac{1-3z+3z^2-z^3}{z^2}\,dz\,;\ \int\left(\frac{1}{z^2} - 3\frac{1}{z} + 3 - z\right)dz = -\frac{1}{z} - 3\ln|z| + 3z - \frac{z^2}{2} + c$

$= -\frac{x-2}{x-1} - 3\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + 3\left(\frac{x-1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 + c$ **(Ans.)**

গ. ধরি, $p(x) = \frac{x-1}{x+1}\,;\ p'(x) = \frac{2}{(1+x)^2}\,;\ \int_0^3 e^x g(x)dx = \int_0^3 e^x \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\,dx$

$= \int_0^3 e^x \frac{x^2-1+2}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^3 e^x \frac{(x+1)(x-1)+2}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^3 e^x\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}\right]dx$

$= \int_0^3 e^x\,\{p(x) + p'(x)\}\,dx = [e^x p(x)]_0^3 = \left[e^x\frac{x-1}{x+1}\right]_0^3 = \frac{e^3}{2} + 1$ **(Ans.)**

10. $\mathbf{f(\theta) = \sin\theta}$

(ক) $\int \frac{1}{1+\tan z}\,dz$ এর মান কত? 2

(খ) $\sqrt{1+f(\theta)}$ এর যোগজ নির্ণয় কর। 4

(গ) $\int f\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta$ এর মান বের কর। 4

সমাধান

ক. $\int \frac{dz}{1+\tan z} = \int \frac{dz}{1+\frac{\sin z}{\cos z}} = \int \frac{dz}{\frac{\cos z+\sin z}{\cos z}} = \int \frac{\cos z\,dz}{\sin z+\cos z}$

ধরি, $\cos z = l(\sin z + \cos z) + m(\cos z - \sin z)$

$\Rightarrow \cos z = (l+m)\cos z + (l-m)\sin z$

উভয়পক্ষ হতে $\cos z$ ও $\sin z$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$l + m = 1\,;\ l - m = 0$

(+) করে $\Rightarrow 2l = 1 \quad \therefore l = \frac{1}{2}$

(−) করে $\Rightarrow 2m = 1 \quad \therefore m = \frac{1}{2}$

$\therefore \int \frac{\cos z\,dz}{\sin z+\cos z} = \int \frac{\frac{1}{2}(\sin z+\cos z)+\frac{1}{2}(\cos z-\sin z)}{\sin z+\cos z}$

$= \frac{1}{2}\int dz + \frac{1}{2}\int \frac{\cos z-\sin z}{\sin z+\cos z}\,dz = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\ln|\sin z + \cos z| + c$ **(Ans.)**

খ. $\int\sqrt{1+f(\theta)}\,d\theta = \int\sqrt{1+\sin\theta}\,d\theta = \int\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\,d\theta$

$= \int\sqrt{\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\,d\theta = \int\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)d\theta = 2\sin\frac{\theta}{2} - 2\cos\frac{\theta}{2} + c$ **(Ans.)**

গ. $\int f\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta = \int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)d\theta$

$= \int \cos 2\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int 2\cos 2\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int\{\cos(2\theta+\theta) + \cos(2\theta-\theta)\}\,d\theta$

$= \frac{1}{2}\int(\cos 3\theta + \cos\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3\theta + \sin\theta\right) + c$ **(Ans.)**

বোর্ড প্রশ্ন ২০২২ শর্ট সিলেবাস

ঢাকা বোর্ড

পূর্ণমান: ৩০ + ১৫=৪৫ সময়: ২ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৩০ সময়: ১: ৪০ মিনিট

ক বিভাগ–বীজগণিত ও জ্যামিতি

01. $A = \begin{bmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -2 & x+1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}$

(ক) দেখাও যে, B একটি সমঘাতি ম্যাট্রিক্স। 2

(খ) $|A| = 0$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। 4

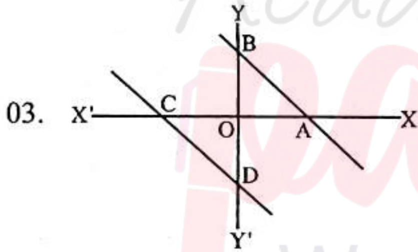
(গ) $(A^T)^{-1}$ নির্ণয় কর যখন, $x = 0$ হয়। 4

02. $M = \begin{bmatrix} p-q-r & 2q & 2r \\ 2p & q-r-p & 2r \\ 2p & 2q & r-p-q \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ এবং $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

(ক) $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 5 & x-2 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে, x এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $|M| = (p+q+r)^3$. 4

(গ) উদ্দীপকে $p = q = r = 1$ হলে, $MX = N$ কে ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর। 4

03. 

$AB = 4x + 3y - 12 = 0$ এবং $AB \parallel CD$

(ক) AB কে ঢাল আকারে প্রকাশ করে ইহার ঢাল নির্ণয় কর। 2

(খ) মূল বিন্দু হতে AB ও CD রেখার দূরত্ব সমান হলে CD রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) দেখাও যে, ABCD একটি রম্বস। 4

04. দৃশ্যকল্প-১: $f(x, y) = 3x - 4y - 5$ এবং $g(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9$.

দৃশ্যকল্প-২: $(5, 3)$ ও $(-5, 7)$ বিন্দুদ্বয় একটি বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু।

(ক) $g(x, y) = 0$ বৃত্ত দ্বারা y-অক্ষের খণ্ডিত অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর। 2

(খ) দেখাও যে, দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত $f(x, y) = 0$ রেখাটি $g(x, y) = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ অনুযায়ী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। নির্ণেয় বৃত্ত ও $f(x, y) = 0$ রেখার ছেদবিন্দু ও মূলবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণও নির্ণয় কর। 4

খ বিভাগ – ত্রিকোণমিতি এবং ক্যালকুলাস

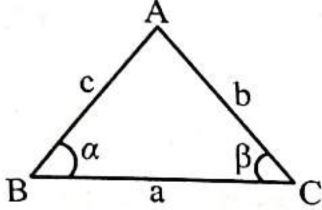
05. $\sin\theta = \frac{3}{5}$ এবং $A = \frac{\pi}{12}$.

(ক) দেখাও যে, $\cos 75° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ 2

(খ) $\frac{\cot\theta + \cos(-\theta)}{\operatorname{cosec}(-\theta) + \tan\theta}$ এর মান নির্ণয় কর; যখন $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হয়। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $\tan A \tan 3A \tan 5A \tan 7A \tan 11A = 1.$ 4

06.



(ক) দেখাও যে, $\frac{b+c}{b-c} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C}$ 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2.$ 4

(গ) $\alpha = 45°, \beta = 60°$ এবং $a = (\sqrt{3} + 1)$ সে.মি. হলে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

07. $f(x) = e^x$.

(ক) $f'(x)\log 2x\, f(2x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 2

(খ) মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $f(mx)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 4

(গ) $y = f(\sec^{-1} x)$ হলে দেখাও যে, $x^2(x^2 - 1)y_2 + x(2x^2 - 1)y_1 - y = 0.$ 4

08. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \sin x$

দৃশ্যকল্প-২: $g(x) = e^x$.

(ক) $\lim_{x \to 0} \frac{g(\sin x) - 1}{f(x)}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int g(x) f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$ এর যোগজ নির্ণয় কর। 4

(গ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) f(2x) dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ১৫ সময়: ২০ মিনিট

01. $x^2 + y^2 = 9$ এবং $x^2 + y^2 + 6x + 8y + c = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে c এর মান কত?

(a) -39 (b) -21 (c) 39 (d) 21

02. $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ বৃত্তটি-

(i) মূলবিন্দুগামী

(ii) x-অক্ষ থেকে 4 একক অংশ খণ্ডন করে

(iii) y-অক্ষকে $(0, -6)$ বিন্দুতে ছেদ করে

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

03. দ্বিতীয় বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের ছেদিত অংশের দৈর্ঘ্য কত?

(a) $2\sqrt{2}$ একক (b) $\sqrt{13}$ একক

(c) $\sqrt{2}$ একক (d) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ একক

04. বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ কোনটি?

(a) $x - y - 6 = 0$ (b) $x + y + 6 = 0$

(c) $x + y - 6 = 0$ (d) $x - y + 6 = 0$

05. ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ 10 একক। যদি $c = 10\sqrt{3}$ একক হয়, তবে C কোণের মান নিচের কোনটি?

(a) 60° (b) 120° (c) 30° (d) 90°

06. $\tan\theta = \sqrt{3}$ হলে-

(i) $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$

(iii) $\tan 2\theta = -\sqrt{3}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

07. $\sin 65° + \cos 65° = ?$

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40°$ (b) $\frac{1}{2}\sin 20°$
(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 40°$ (d) $\sqrt{2}\cos 20°$

08. $\tan\frac{\alpha}{2} = 7$ হলে $4\sin\alpha - 3\cos\alpha = ?$

(a) 5 (b) 4 (c) 3 (d) 6

09. x এর সাপেক্ষে $e^{\sin^2 x}$ এর অন্তরজ কোনটি?

(a) $e^{\sin^2 x}\sin 2x$ (b) $2\,e^{\sin^2 x}\sin x$
(c) $-e^{\sin^2 x}\sin 2x$ (d) $e^{\sin^2 x}$

10. $y = ax(1-x)$ বক্ররেখাটির মূলবিন্দুতে ঢাল কত?

(a) $-a$ (b) a (c) $a - 2ax$ (d) $a + 2ax$

11. $\frac{d}{dx}(\log_{10} x)$ এর মান কোনটি?

(a) $\frac{1}{x}$ (b) $\frac{1}{x}\log_{10} e$ (c) $\frac{1}{x}\log_e 10$ (d) $\log_{10} e$

12. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = ?$

(a) 0 (b) ∞ (c) 1 (d) -1

13. $I = \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ হলে I এর মান কত?

(a) e (b) e + 1 (c) ln e − 1 (d) ln 2

14. $f(x) = 4x$ হলে-

(i) $\int \frac{dx}{f(x)} = \frac{1}{4}\ln x + c$ (ii) $\int e^{f(x)}dx = \frac{1}{4}e^{4x} + c$
(iii) $\int_0^2 f(x)dx = 8$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

15. $-\int_2^1 \ln x\, dx$ এর মান কোনটি?

(a) $2\ln 2 - 1$ (b) $2\ln 2 + 1$
(c) $2\ln 2$ (d) $\ln 2$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\, d\theta = ?$

(a) $\frac{1}{2}\ln 2$ (b) $\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)$
(c) $\ln(\sqrt{2}+1)$ (d) $\ln(\sqrt{2}-1)$

17. A, B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলোর মাত্রা যথাক্রমে $4\times3, 3\times4$ এবং 7×4 হলে $(B + A^T).C^T$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা কত?

(a) 3×4 (b) 3×7 (c) 4×3 (d) 4×7

18. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ হলে, নিচের কোনটির A^{-1}?

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} a-3 & -1 \\ -8 & a+4 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে a =?

(a) 4, −5 (b) −4, 5 (c) −4, −5 (d) 4, 5

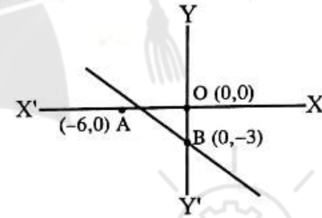
20. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+6x+7}{3x^2-4x+3}$ এর মান-

(a) $-\frac{5}{6}$ (b) $-\frac{2}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{5}$

21. $(1, 150°)$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নিচের কোনটি?

(a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
(c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (d) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



22. AB এর ঢাল কত?

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $-\frac{3}{4}$ (d) $-\frac{4}{3}$

23. মূলবিন্দু থেকে AB এর লম্ব দূরত্ব কত?

(a) 4 একক (b) 3 একক (c) $\frac{12}{5}$ একক (d) $\frac{12}{25}$ একক

24. $x + y - 2 = 0$ রেখাটির-

(i) সমান্তরাল রেখা $2x + 2y + 3 = 0$
(ii) মূলবিন্দু হতে লম্ব দূরত্ব $\sqrt{2}$ একক
(iii) উদ্দীপকের রেখাটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের সাথে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 2 বর্গ একক

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

25. $4y = 3(x-4)$ এবং $4y = 3(x-1)$ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব কত? [Ans: c]

(a) $\frac{9}{4}$ একক (b) $\frac{15}{9}$ একক
(c) $\frac{9}{5}$ একক (d) কোনোটিই নয়

উত্তরপত্র

1	d	2	a	3	a	4	c	5	a	6	b	7	d	8	b	9	a	10	b	11	b	12	c	13	d
14	d	15	a	16	c	17	b	18	c	19	a	20	c	21	b	22	a	23	No	24	d	25	c		

বোর্ড প্রশ্ন ২০২২ শর্ট সিলেবাস

রাজশাহী বোর্ড

পূর্ণমান: ৩০ + ১৫=৪৫ সময়: ২ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৩০ সময়: ১: ৪০ মিনিট

ক বিভাগ—বীজগণিত ও জ্যামিতি

01. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(ক) বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স ব্যাখ্যা কর। 2

(খ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $A^2 - 5A - 14I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স। 4

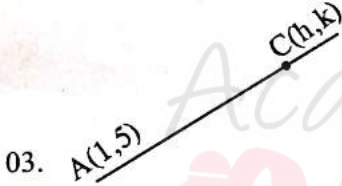
(গ) উদ্দীপকের আলোকে A^{-1} নির্ণয় কর। 4

02. $A = \begin{bmatrix} 3+x & 4 & 1 \\ 4 & 1+x & 3 \\ 1 & 3 & 4+x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2+x & b+x & c+x \\ 2+y & b+y & c+y \\ 4 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$

(ক) $b = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ হলে $B.B^t$ নির্ণয় কর। 2

(খ) দেখাও যে, $\det(B) = (2-b)(b-c)(c-2)(x-y)$ 4

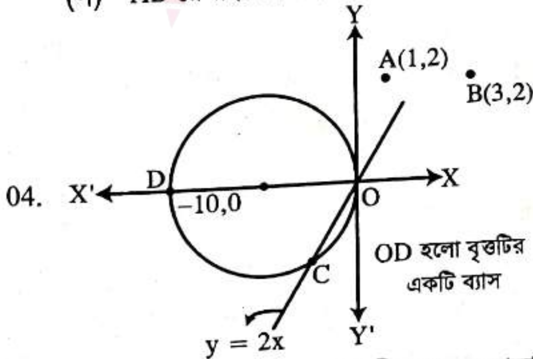
(গ) $\det(A) = 0$ সমীকরণের বাস্তব মূল নিয়ে A এর ট্রেস নির্ণয় কর। 4

03. 

(ক) $2x - 3y + k = 0$ এবং $2x - 3y = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $2\sqrt{13}$ একক হলে k এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) AC এবং BD রেখাদ্বয়ের ঢাল যথাক্রমে -2 এবং -1 হলে x- অক্ষকে CD রেখা যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

(গ) AB রেখাংশের লম্ব-দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

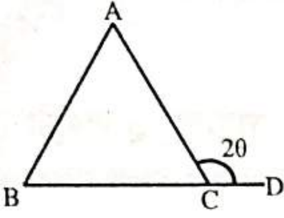
04. 

(ক) $r(1 + \cos\theta) = 2$ সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর। 2

(খ) OC জ্যাকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।। 4

(গ) A ও B বিন্দুগামী বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করলে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

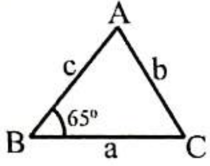
খ বিভাগ – ত্রিকোণমিতি এবং ক্যালকুলাস

05. 

(ক) $a = \sqrt{3}+1,\ b = \sqrt{3}-1, C = 60°$ হলে ΔABC এ c বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 2

(খ) $A + B = 120°$ হলে উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $\sin^2(\theta+\alpha) + \sin^2(\theta-\alpha) - \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$. 4

(গ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = -4\cos A \sin B \cos 2\theta$. 4

06. 

(ক) $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 1$ হলে দেখাও যে, $\sin\alpha\,\mathrm{cosec}\,\beta + \cos\alpha\sec\beta = 0$. 2

(খ) $C = 75°$ হলে উদ্দীপক হতে দেখাও যে, $\sec 2A - \sqrt{3}\,\mathrm{cosec}\,2A = 4$. 4

(গ) উদ্দীপক ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $\frac{a^2}{bc}\sin(B-C) + \frac{b^2}{ca}\sin(C-A) + \frac{c^2}{ab}\sin(A-B) = 0$ 4

07. $h(x) = \cos 3x\ ;\ u = \tan^{-1} 2x$

(ক) মান নির্ণয় কর: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$. 2

(খ) মূল নিয়মে $h(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 4

(গ) $\ln y = u$ হলে উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\sec^2 u.\, y_2 + 2y_1(2\tan u - 1) = 0$. 4

08. দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = \cos x, h(x) = x^4$. দৃশ্যকল্প -২: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ একটি উপবৃত্ত। $x^2 + y^2 = 9$ একটি বৃত্ত

(ক) x এর যে মানগুলোর জন্য $f(x) = x + \frac{4}{x}$ ফাংশনের চরমমান বিদ্যমান তা নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{g(x)\}^2dx + \int_0^1\frac{x}{1+h(x)}dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর উপবৃত্ত এবং বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ১ম চতুর্ভাগের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ১৫ সময়: ২০ মিনিট

01. $(1,1)$ বিন্দু হতে $2x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0$ বৃত্তের উপর অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কত?

(a) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ (b) $\sqrt{7}$ (c) $\sqrt{\frac{7}{2}}$ (d) $\sqrt{2}$

02. $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ বিন্দুর পোলার স্থানাংক কোনটি?

(a) $\left(2, -\frac{3\pi}{2}\right)$ (b) $\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$

(c) $\left(2, -\frac{5\pi}{4}\right)$ (d) $\left(2, \frac{5\pi}{4}\right)$

03. $\begin{bmatrix}7 & 6\\8 & 7\end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স কোনটি?

(a) $\begin{bmatrix}-7 & 8\\6 & -7\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}7 & -6\\-8 & 7\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}7 & -8\\-6 & 7\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}-7 & 6\\8 & -7\end{bmatrix}$

04. $y = x^3 - 8x^2 + 7$ বক্ররেখার $(1,1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ কোনটি?

(a) $13x - y + 12 = 0$ (b) $13x + y + 12 = 0$

(c) $x + 13y + 12 = 0$ (d) $x - 13y + 12 = 0$

05. $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

(a) 2 (b) $\sqrt{2}$ (c) 0 (d) 1

06. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3,5,7 একক হলে-

(i) ত্রিভুজটির পরিসীমা 15 একক

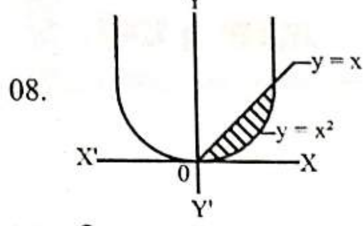
(ii) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $\frac{15}{2}\sqrt{3}$ বর্গএকক

(iii) ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ 120°

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

07. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ এর মান কোনটি?
(a) $2e^{-1}$ (b) $2(e-1)$ (c) $\frac{2}{e}-1$ (d) $1-\frac{1}{e}$

08. 

চিত্রে ছায়াঘেরা অংশের ক্ষেত্রফল কত বর্গএকক?
(a) $\frac{5}{6}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{6}{5}$

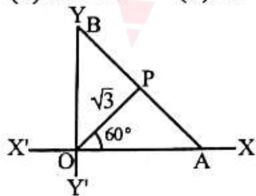
09. $A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ হলে $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos 2x}$ এর মান কোনটি?
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) 1 (d) 2

10. $\frac{1-\tan^2(45°+x)}{1+\tan^2(45°+x)}$ এর মান কোনটি?
(a) $-\cos 2x$ (b) $\sin 2x$ (c) $-\sin 2x$ (d) $\cos 2x$

11. $4x+3y=a$ রেখাটি $x^2+y^2-4x=0$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে –
(i) বৃত্তের কেন্দ্র (2,0) (ii) বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4
(iii) a এর মান 18 অথবা −2
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

12. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x}}$ এর মান কোনটি?
(a) $\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} - 2(1-x)^{\frac{1}{2}} + c$
(b) $-\frac{2}{3}(\sqrt{1-x})(x+2) + c$
(c) $\frac{1}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}} + c$
(d) $\frac{2}{3}(\sqrt{1-x})(x+2) + c$

13. A, B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলোর আকার যথাক্রমে $m \times n$, $n \times m$ এবং $m \times s$ হলে $(A^T + B)C$ ম্যাট্রিক্সের আকার হবে–
(a) $m \times s$ (b) $s \times n$ (c) $n \times m$ (d) $n \times s$

14. 

AB রেখার সমীকরণ নিচের কোনটি?
(a) $\sqrt{3}x - y = 2\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{3}x + y = 2\sqrt{3}$
(c) $x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}$ (d) $x - \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$A = \begin{bmatrix} x+4 & 8 \\ 2 & x-2 \end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স।

15. যদি A ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হয়, তবে x এর মান নিচের কোনটি?
(a) −4, 2 (b) −2, 4 (c) −4, 6 (d) −6, 4

16. প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সে $x = 3$ হলে A^2 নিচের কোনটি?
(a) $\begin{bmatrix} 65 & 64 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 49 & 46 \\ 41 & 43 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 40 & 48 \\ 52 & 64 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 64 & 49 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

17. $\int_1^e \ln x\, dx$ এর মান নিচের কোনটি?
(a) −1 (b) 0 (c) $\frac{1}{e}$ (d) 1

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x+y=3$ এবং $x-y=3$ দুটি রেখার সমীকরণ।

18. রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত?
(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

19. রেখাদ্বয় Y -অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল কত বর্গএকক?
(a) 6 (b) 9 (c) 12 (d) 18

20. $x^2+y^2-4x-6y=7$ বৃত্তের x- অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য কত?
(a) $2\sqrt{11}$ (b) $\sqrt{22}$ (c) 11 (d) 22

21. (−2,4) এবং (8,−10) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে 2:3 অনুপাতে বহির্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাংক কোনটি?
(a) (−22, 8) (b) (22, −8)
(c) (−22, 32) (d) (22, −32)

22. মূলবিন্দুতে $y = \sin^{-1}\frac{x}{3}$ এর স্পর্শকের সমীকরণ নিচের কোনটি?
(a) $x-3y=0$ (b) $x+3y=0$
(c) $3x+y=0$ (d) $3x-y=0$

23. $x^y = y^x$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$
(a) $\frac{x(y\ln y - y)}{y(x\ln y - x)}$ (b) $\frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}$
(c) $\frac{y(x\ln y + y)}{x(y\ln x + x)}$ (d) $\frac{x(y\ln x - y)}{y(x\ln y - x)}$

24. (1,2) বিন্দুগামী $2x-3y-9=0$ রেখার উপর লম্বরেখার সমীকরণ কোনটি?
(a) $3x+2y+7=0$ (b) $3x+2y-7=0$
(c) $2x-3y+4=0$ (d) $2x-3y-4=0$

25. $\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}+7^{n+1}}{5^n-7^n}$ এর মান নিচের কোনটি?
(a) −7 (b) −5 (c) 5 (d) 7

উত্তরপত্র

1	c	2	d	3	b	4	d	5	d	6	b	7	b	8	c	9	a	10	c	11	c	12	a	13	d
14	c	15	d	16	a	17	d	18	d	19	b	20	a	21	c	22	c	23	b	24	b	25	a		



বোর্ড প্রশ্ন ২০২২ শর্ট সিলেবাস

চট্টগ্রাম বোর্ড

পূর্ণমান: ৩০ + ১৫=৪৫ সময়: ২ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৩০ সময়: ১: ৪০ মিনিট

ক বিভাগ—বীজগণিত ও জ্যামিতি

01. $N = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

(ক) $\begin{pmatrix} c & -5 & -6 \\ 5 & 2c & 3 \\ a & -3 & c \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি বিপ্রতীসম হলে, $c + a = ?$ 2

(খ) $NX = B$ হলে ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে সমীকরণ জোটটি সমাধান কর। 4

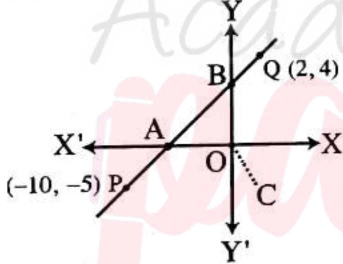
(গ) $MN = I_3$ (অভেদক ম্যাট্রিক্স) হলে M ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর। 4

02. $A = \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ a^4 - 2a & b^4 - 2b & c^4 - 2c \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $f(x) = 5x^2 - 11x$.

(ক) $(3, -11)$ বিন্দু থেকে সর্বদা 5 একক দূরত্বে অবস্থিত কোনো চলমান বিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) $f(p) + 6I_2$ নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $\det(A) = abc(abc - 2)(a - b)(b - c)(c - a)$. 4

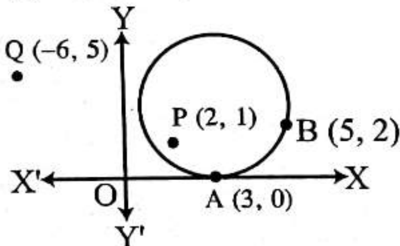
03. 

এবং OC রেখার ঢাল $= \frac{-4}{3}$

(ক) $(3, 6)$ বিন্দুগামী $\frac{1}{3}x + 5y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) ΔOAB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

(গ) দেখাও যে, OC রেখা ও x-অক্ষরেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব। 4

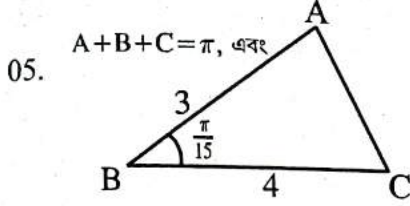
04. 

(ক) $x^2 + y^2 = 121$ বৃত্তের পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) P ও Q বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তটি কর্তৃক অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

(গ) 'O' মূলবিন্দু থেকে A ও B বিন্দুগামী বৃত্তের উপর অঙ্কিত অপর স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

খ বিভাগ – ত্রিকোণমিতি এবং ক্যালকুলাস

05. 

(ক) প্রমাণ কর: $\tan 35° + \tan 10° + \tan 35° \cdot \tan 10° = 1$ 2

(খ) প্রমাণ কর: $\cos^2 A - \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\sin A \cos B \sin C.$ 4

(গ) ABC ত্রিভুজটি সমাধান কর। 4

06. $x = \cos\alpha$; $f(x) = 2x$

(ক) t এর সাপেক্ষে $\frac{1+\sin t}{\sin t}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 2

(খ) $y = \sin(a\alpha)$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + a^2y = 0.$ 4

(গ) দেখাও যে, $f(x) + \frac{1}{f(x)}$ এর গুরুমান তার লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। 4

07. $g(x,y) = 16x^2 + 25y^2 - 400$; $F(z) = z\ln z.$

(ক) $\int \frac{\text{cosec}^2 x}{\sqrt{1-\cot^2 x}}dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int_1^{\sqrt{e}} F(x)dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) $g(x,y) = 0$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের অর্ধাংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

08. বক্ররেখার সমীকরণ: $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$ এবং $P(x) = 2x + 5.$

(ক) $y = x^{e^{3x}}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) বক্ররেখাটির $(1,-1)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{P(x)}}$ নির্ণয় কর। 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ১৫ সময়: ২০ মিনিট

01. $\cos 2A = \frac{3}{5}$ হলে, sin A এর মান কত?

(a) $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$ (b) $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ (c) $\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

(ত্রিভুজ ABC: AB = 8, AC = 6, BC = 4)

02. ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত?

(a) $\sqrt{15}$ বর্গ একক (b) $9\sqrt{15}$ বর্গ একক
(c) $3\sqrt{15}$ বর্গ একক (d) $2\sqrt{15}$ বর্গ একক

03. ∠C এর মান কত?

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{39}{12}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{12}{39}\right)$
(c) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$

04. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan bx}{\sin ax}$ এর মান কত?

(a) $\frac{a}{b}$ (b) ab (c) $\frac{b}{a}$ (d) ab^2

05. $\sec^{-1}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$ এর অন্তরক সহগ কত?

(a) $\frac{1}{(x\sqrt{x^2-1})}$ (b) $\frac{-2}{(\sqrt{1-x^2})}$ (c) $\frac{1}{(1+x^2)}$ (d) $\frac{2}{(1+x^2)}$

06. cos (ax + b) এর n-তম অন্তরক সহগ কত?

(a) $(-1)^n a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$

(b) $a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$

(c) $\cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$ (d) $a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$

07. যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ হয়, তবে-

(i) A একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স
(ii) $|A| = 15$
(iii) A একটি অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স নয়

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

08. $\begin{bmatrix}4 & 3\\3 & 2\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স কোনটি?

(a) $\begin{bmatrix}2 & -3\\-3 & 4\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}2 & 3\\-3 & -4\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}-2 & 3\\3 & -4\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}-4 & 3\\3 & -2\end{bmatrix}$

09. যদি $\begin{bmatrix}m-2 & 6\\2 & m-3\end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হয়, তবে $m = ?$

(a) $-2, -3$ (b) $1, -6$ (c) $6, -1$ (d) $2, -3$

10. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\1 & 5 & 7\end{vmatrix}$ নির্ণায়কের $(3, 2)$ তম সহগুণক কোনটি?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

$x + y + 4 = 0$ এবং $x - y - 2 = 0$ দুইটি সরল রেখার সমীকরণ।

11. রেখা দুইটির ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি?

(a) $(3, 1)$ (b) $(1, 3)$

(c) $(-3, -1)$ (d) $(-1, -3)$

12. x-অক্ষের সাথে রেখা দুইটি যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল কত?

(a) 9 বর্গ একক (b) 6 বর্গ একক

(c) 4 বর্গ একক (d) 3 বর্গ একক

13. $(-5, 10)$ বিন্দুগামী সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ কোণ উৎপন্ন করে। সরলরেখার সমীকরণ-

(a) $4x + 3y - 10 = 0$ (b) $3x - 4y + 55 = 0$

(c) $3x + 4y + 55 = 0$ (d) $4x + 3y + 30 = 0$

14. $A(-1, 0)$ বিন্দুটি $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ বক্ররেখার উপর হলে-

(i) A বিন্দুতে ঢাল $= 8$

(ii) A বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $8x - y + 8 = 0$

(iii) A বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $x - 8y - 1 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

15. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$ কত?

(a) $\frac{x^2}{2} + c$ (b) $-\sqrt{1-x^2} + C$

(c) $\sqrt{1-x^2} + C$ (d) $\sqrt{1+x} + C$

16. $\int e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right) dx =$ কত?

(a) $e^x \ln x + C$ (b) $e^x + \ln x + C$

(c) $e^x \cdot \frac{1}{x} + C$ (d) $e^x + \frac{1}{x} + C$

17. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx =$ কত?

(a) $\ln\frac{2}{3}$ (b) 2 (c) $\ln\frac{3}{2}$ (d) 3

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx =$ কত?

(a) 1 (b) -1 (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

19. $f(x) = 5$ হলে, $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = ?$

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) ∞

20. $4x - 3y - 51 = 0$ সরলরেখার উপর লম্ব রেখার ঢাল কত?

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $-\frac{4}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $-\frac{3}{4}$

21. $A(3, -2), B(4, 6)$ এবং $C(5, 7)$ কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে-

(i) ভরকেন্দ্র $\left(4, \frac{11}{3}\right)$

(ii) BC এর মধ্যবিন্দু $\left(\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$

(iii) AB এর সমীকরণ $8x - y - 26 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

22. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ বৃত্তটি স্পর্শ করে-

(a) x-অক্ষকে (b) y-অক্ষকে

(c) উভয় অক্ষকে (d) মূলবিন্দুকে

23. $x + y = 4$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 34 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শ বিন্দুর স্থানাংক কোনটি?

(a) $(1, 3)$ (b) $(3, 1)$ (c) $(3, 2)$ (d) $(2, 5)$

24. $x^2 + y^2 = 20$ বৃত্তের $(2,4)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি?

(a) $x + 2y + 10 = 0$ (b) $x + 2y + 10$

(c) $2x + y - 10 = 0$ (d) $2x - y - 10 = 0$

25. $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ এর মন কত?

(a) $1 - \sqrt{2}$ (b) $-1 + \sqrt{2}$

(c) $1 + \sqrt{2}$ (d) $-1 - \sqrt{2}$

উত্তরপত্র

1	b	2	c	3	d	4	c	5	d	6	d	7	c	8	c	9	c	10	a	11	d	12	a	13	b
14	a	15	b	16	a	17	c	18	d	19	b	20	d	21	d	22	a	23	b	24	b	25	b		

বোর্ড প্রশ্ন ২০২২ শর্ট সিলেবাস

সিলেট বোর্ড

পূর্ণমান: ৩০ + ১৫=৪৫ সময়: ২ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৩০ সময়: ১: ৪০ মিনিট

01. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & 2 & -2 \\ y & 5 & -4 \\ z & 7 & -5 \end{bmatrix}$

(ক) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ হলে $A + A^T$ নির্ণয় কর। 2

(খ) A^{-1} নির্ণয় কর। 4

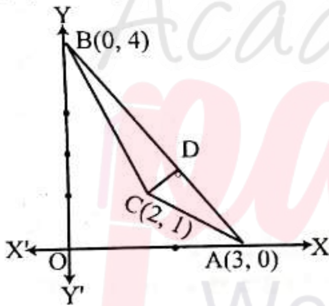
(গ) $AB = I_3$ থেকে ক্রেমারের সূত্রের সাহায্যে (x, y, z) নির্ণয় কর। 4

02. $P = \begin{vmatrix} 2x-5 & 2x & 2x \\ 2y & 2y-5 & 2y \\ 2z & 2z & 2z-5 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(ক) $2\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = x^2$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) B নির্ণায়কের ২য় সারির উপাদানগুলোর সহগুণক যথাক্রমে A_2, B_2 এবং C_2 হলে, $a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2$ এর মান নির্ণয় কর। 4

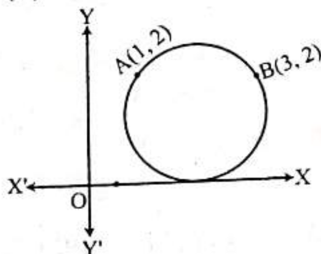
(গ) $x + y + z = S$ হলে, দেখাও যে, $P = S^3$. 4

03. 

(ক) $x^2 + y^2 - 3y = 0$ কে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর। 2

(খ) D বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

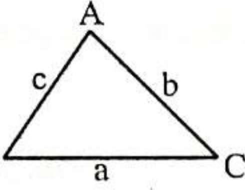
(গ) $\angle ACB$ এর সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

04. 

(ক) $2x^2 + 2y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$ বৃত্তটি দ্বারা y অক্ষের খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপকের আলোকে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) মূলবিন্দু থেকে বৃত্তটির অপর স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4



05. দৃশ্যকল্প-১:

দৃশ্যকল্প-২: $\sec\theta = \frac{m - m\cos Q}{m\cos Q - n}, m = \frac{P+Q}{2}, n = \frac{P-Q}{2}$.

(ক) $\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+\sin\theta}}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ থেকে দেখাও যে, $a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right) = (b+c)\sin\frac{A}{2}$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ থেকে প্রমাণ কর যে, $\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{P}} = \frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{Q}}$. 4

06. (i) $T = \sec x + \tan x$.

(ii) $M = \cos^3 x + \cos^3(60° - x) + \cos^3(60° + x)$

(ক) $3\tan\theta = 1$ হলে $\sin\left(\frac{\pi - 4\theta}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) (i) নং থেকে প্রমাণ কর যে, $T = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. 4

(গ) (ii) নং থেকে দেখাও যে, $4M = (6\cos x - \cos 3x)$. 4

07. (i) $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$.

(ii) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 30$.

(ক) $f(x) = \ln x$ হলে $f'(x)$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক (i) থেকে প্রমাণ কর যে, $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$. 4

(গ) $f(x)$ এর চরম মান নির্ণয় কর। 4

08. $P = (x-4)^2(x-3)$ এবং $g(x,y) = x^2 + y^2$.

(ক) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int \frac{x}{p}dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) $g(x,y) = 100$ এবং $x = 5$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতম অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

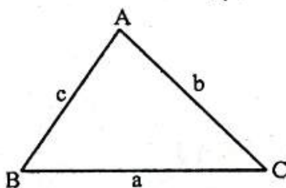
বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ১৫ **সময়: ২০ মিনিট**

01. $\frac{\cot 54°}{\tan 36°} + \frac{\tan 20°}{\cot 70°}$ এর মান কত?
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

02. যদি $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ হয়, তবে $\cos 3\theta$ এর মান-
(a) $\frac{1}{8}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$ (b) $\frac{1}{3}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$
(c) $\frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$ (d) $\frac{3}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



03. $\angle A = 60°, b = 2$ এবং $c = 4$ হলে, a-এর মান কত?
(a) $2\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{6}$

04. $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$ হলে $a : b : c =$ কত?
(a) $2 : \sqrt{3} : 1$ (b) $\sqrt{3} : 2 : 1$
(c) $2 : 3 : 1$ (d) $1 : \sqrt{3} : 2$

05. $y = x^3 + 2x^2 + 4$ বক্ররেখার $(1, 7)$ বিন্দুতে-
(i) স্পর্শকের ঢাল 7
(ii) স্পর্শকের সমীকরণ $7x - y + 5 = 0$
(iii) অভিলম্বের সমীকরণ $x + 7y = 50$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

06. দূরত্ব $S = 5t^3 - 9t^2 + 3t + 2$ হলে $t = 4$ সময় পর বেগ কত একক হবে?
(a) 71 (b) 171 (c) 243 (d) 343

07. বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর ক্ষেত্রে $A^2 = I$ হলে, $A^{-1} =$?
(a) 2A (b) A (c) 0 (d) A + I

08. $\begin{bmatrix}1 & 3 & \lambda+2\\2 & 4 & 8\\3 & 5 & 10\end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে, λ-এর মান-
(a) −2 (b) 2 (c) 4 (d) −4

09. $A^{-1} = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ হলে, $(AB)^{-1}$ এর মান কত?
(a) $\begin{bmatrix}0 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

10. A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং K একটি স্কেলার হলে-
(i) $(A')' = A$
(ii) $(KA)' = KA'$
(iii) যদি $|A| = 0$ হয়, তবে $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

11. $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\e & \pi & \sqrt{3}\\3 & 3 & 3\end{bmatrix}$ হলে, $|A| =$?
(a) e (b) π (c) $2(e-\pi+\sqrt{3})$ (d) 0

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$\sqrt{3}, 1$ বিন্দু হতে $\sqrt{3}x - y + 8 = 0$ সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য P এবং লম্ব রেখাটি x-অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে-

12. P-এর মান কত?
(a) 5 (b) 4 (c) 2 (d) $5\sqrt{2}$

13. θ-এর মান-
(a) 30° (b) 120° (c) 60° (d) 150°

14. $f(x) = x^2 - 2x$ ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান হওয়ার শর্ত-
(a) $x > 1$ (b) $x < 2$ (c) $x < 1$ (d) $x < 2$

15. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$ এর মান কত?
(a) $\frac{1}{2}$ (b) −2 (c) 2 (d) 1

16. $\int\frac{\cot x}{\sqrt{\sin x}}dx =$ কত?
(a) $\frac{-2}{\sqrt{\sin x}} + c$ (b) $\frac{-1}{2\sqrt{\sin x}} + c$
(c) $\frac{1}{2\sqrt{\sin x}} + c$ (d) $2\sqrt{\sin x} + c$

17. $\int e^x \cos x(1+\tan x)dx$ এর মান কত?
(a) $e^x\cos x + c$ (b) $e^x \tan x + c$
(c) $e^x \sec x + c$ (d) $e^x \sin x + c$

18. $\int_0^3 f(x) = 4$ হলে, $\int_2^5 f(x-2) =$ কত?
(a) 0 (b) 4 (c) 3 (d) 2

19. y-অক্ষ এবং $x = 4 - y^2$ পরাবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?
(a) $\frac{3}{32}$ বর্গ একক (b) $\frac{2}{33}$ বর্গ একক
(c) $\frac{32}{3}$ বর্গ একক (d) $\frac{33}{2}$ বর্গ একক

20. $5x + 3y - 7 = 0$ এবং $15x + 9y + 14 = 0$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব-
(a) $\frac{7}{\sqrt{34}}$ (b) $\frac{15}{2\sqrt{34}}$ (c) $\frac{35}{3\sqrt{34}}$ (d) $\frac{47}{4\sqrt{34}}$

21. $2x + 3y = 8$ রেখা দ্বারা-
(i) x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ 4
(ii) অক্ষদ্বয়ের সাথে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{16}{3}$ বর্গ একক
(iii) y-অক্ষকে (0, 8) বিন্দুতে ছেদ করে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে।

22. c-এর মান কত?
(a) 9 (b) 3 (c) 4 (d) 2

23. স্পর্শ বিন্দুর স্থানাংক কত?
(a) (3, 0) (b) (0, 3) (c) (2, 0) (d) (0, 2)

24. (−1, −3) বিন্দু হতে অংকিত $x^2+y^2 - 2x - y - 7 = 0$ বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কত?
(a) 4 (b) $2\sqrt{3}$ (c) $2\sqrt{2}$ (d) 8

25. $3x - 4y + 4 = 0$ এবং $6x - 8y - 7 = 0$ সরলরেখাদ্বয় একই বৃত্তের স্পর্শক হলে, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ-
(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{5}{7}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{5}{6}$

উত্তরপত্র

1	c	2	c	3	b	4	d	5	b	6	b	7	b	8	c	9	a	10	d	11	d	12	a	13	d
14	c	15	d	16	a	17	d	18	b	19	c	20	c	21	a	22	a	23	b	24	c	25	c		

বোর্ড প্রশ্ন ২০২২ শর্ট সিলেবাস

বরিশাল বোর্ড

পূর্ণমান: ৩০ + ১৫=৪৫ সময়: ২ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৩০ সময়: ১: ৪০ মিনিট

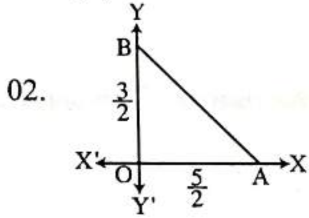
01. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^2 + 3x - 5I$.

(ক) বিস্তার না করিয়া প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1 & a & a-2 \\ 2 & b & b-4 \\ 3 & c & c-6 \end{vmatrix} = 0$. 2

(খ) $f(A)$ নির্ণয় কর। 4

(গ) A^{-1} নির্ণয় কর। 4

02.



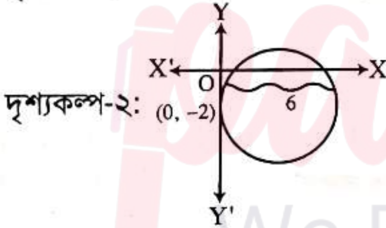
(ক) ΔOAB এর ক্ষেত্রফল ও তার ভরকেন্দ্র নির্ণয় কর। 2

(খ) AB এর সমীকরণ নির্ণয় কর এবং তার সমত্রিখণ্ডন বিন্দুদ্বয়ের স্থানাংক নির্ণয় কর। 4

(গ) AB কে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ ও B বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

03. দৃশ্যকল্প-১: $3x - 4x + 7 = 0,\ 4x - 3y + 2 = 0$

দৃশ্যকল্প-২:



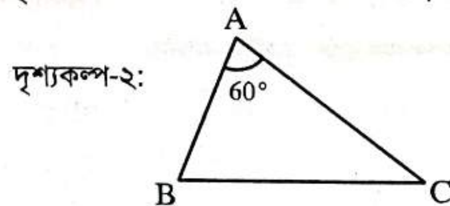
(ক) $r = b\sin 2\theta$ কে কার্তেসীয় সমীকরণে রূপান্তর কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী স্থূলকোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ প্রদর্শিত বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

04. দৃশ্যকল্প-১: $M = \cos^2 5\alpha + \cos^2 5\beta - \sin^2 5\gamma + 2\cos 5\alpha \cos 5\beta \cos 5\gamma$.

দৃশ্যকল্প-২:

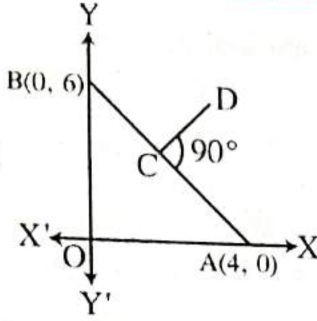


(ক) যে কোনো ABC ত্রিভুজে $b = 4cm, c = 3cm$ এবং $\angle C = 30°$ হলে $\angle B$ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $M = 0$ যেখানে $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $\frac{b-c}{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{B-C}{2}$. 4

05. দৃশ্যকল্প-১:



এখানে C, AB এর মধ্যবিন্দু

দৃশ্যকল্প-২: $4x - 3y = -4, \ 3x - 4y = -5.$

(ক) একটি বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাংক $(2, -4)$, উহা x-অক্ষকে স্পর্শ করিলে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে CD সরলরেখার সমীকরণ ও তার ঢাল নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রেফল নির্ণয় কর। 4

06. দৃশ্যকল্প-১: $y = a\cot(\ln x)$

দৃশ্যকল্প-২: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$

(ক) $7\cos^{-1}x$ কে x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে দেখাও যে $x^2y_2 + xy_1 = 2y\text{cosec}^2(\ln x).$ 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর ফাংশনটির লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর। 4

07. দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x^2+5)}.$

দৃশ্যকল্প-২: $y^2 = 8x, x - y = 0.$

(ক) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে $\int f(x)dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত পরাবৃত্ত ও সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

08. দৃশ্যকল্প-১: $\varphi(x)\frac{x\cos x}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}.$

দৃশ্যকল্প-২: $f(x, y) = x^3 - 2xy - y^3 - 3.$

(ক) $\int_1^2 \ln 2x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ হতে $\varphi(x)$ কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে $f(x, y) = 0$ বক্ররেখার $(1, 1)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ১৫ সময়: ২০ মিনিট

01. $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ হলে, Adj A = কোনটি?

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$

Solution: (d); $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$; adj $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$

02. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ নির্ণায়কটির $(1, 2)$ তম ভুক্তির সহগুণক কোনটি?

(a) −18 (b) −12 (c) 12 (d) 18

03. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$ হলে, AB এর ক্রম কত?

(a) 2×1 (b) 1×2 (c) 3×1 (d) 2×3

04. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x}$ = কত?

(a) −1 (b) 0 (c) 1 (d) $\frac{1}{2}$

05. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ হলে, Det (A) এর মান কত?

(a) −48 (b) 0 (c) 48 (d) 60

06. $y = \sqrt{\sec 2x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ কোনটি?

(a) $y \tan 2x$ (b) $2 \tan 2x$ (c) $\frac{\tan 2x}{2}$ (d) $y \cot 2x$

07. $(-4, 4\sqrt{3})$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি?

(a) $\left(4\sqrt{2}\ \frac{\pi}{3}\right)$ (b) $\left(4\sqrt{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

(c) $\left(8, \frac{2\pi}{3}\right)$ (d) $\left(8, \frac{4\pi}{3}\right)$

08. $4x - 8y + 23 = 0$ রেখার ঢাল কত?

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) -2 (d) 2

09. $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব এবং মূল বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ কোনটি?

(a) $4x - 3y = 0$ (b) $4x + 3y = 0$

(c) $3x + 4y = 0$ (d) $3x - 4y = 0$

10. যে সরলরেখা x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং মূলবিন্দু দিয়ে যায় তার সমীকরণ কোনটি?

(a) $x = \sqrt{3}y$ (b) $y = \sqrt{3}x$

(c) $y + \sqrt{3}\,x = 0$ (d) $\sqrt{3}y + x = 0$

11. $3x + \sqrt{3}y - 10 = 0$ রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে?

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{5\pi}{6}$

12. $(3, 1)$ বিন্দু হতে $2x^2 + 2y^2 = 18$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কত একক?

(a) 1 (b) $\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{19}$ (d) $\sqrt{38}$

13. $(8, -10)$ বিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত x- অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তের ব্যাস কত একক?

(a) 8 (b) 10 (c) 16 (d) 20

14. $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 20 = 0$ বৃত্ত দ্বারা y-অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য কত একক?

(a) $2\sqrt{5}$ (b) $6\sqrt{5}$ (c) 8 (d) $4\sqrt{14}$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 + y^2 - 12x + 8y + c = 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

15. C এর মান কত?

(a) -6 (b) 4 (c) 16 (d) 36

16. স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?

(a) $(0, -4)$ (b) $(0, 4)$ (c) $(6, 0)$ (d) $(-6, 0)$

17. $\frac{\sin(45° + A) + \sin(45° - A)}{\cos(45° - A) - \cos(45° + A)} =$ কত?

(a) $\cot A$ (b) -1 (c) 1 (d) $\tan A$

18. $A + B = \frac{\pi}{2}$ হলে $\cos^2 A - \cos^2 B =$ কত?

(a) $\sin(A - B)$ (b) $\sin(B - A)$

(c) $\cos(A - B)$ (d) 0

19. ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষেত্রে —

(i) $\cos 4A = \frac{1 - \tan^2 2A}{1 + \tan^2 2A}$

(ii) $\sin 6A = 2 \sin 3A \cos 3A$

(iii) $\tan 8\alpha = \frac{2 \tan 4\alpha}{1 - \tan^2 4\alpha}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii , iii

20. $\frac{d}{dx}\left(\cos\frac{x}{5}\right) =$ কত?

(a) $-\sin\frac{x}{5}$ (b) $\sin\frac{x}{5}$ (c) $-\frac{1}{5}\sin\frac{x}{5}$ (d) $\frac{1}{5}\sin\frac{x}{5}$

21. $\int e^{10x}\left[10 \ln x + \frac{1}{x}\right] dx =$ কত?

(a) $e^{10x} \ln|x| + C$ (b) $e^{10x} \times 10|x| + C$

(c) $10e^{x} \ln|x| + C$ (d) $\frac{1}{10} e^{10x} \ln|x| + C$

22. $\int 10^{5x} dx =$ কত?

(a) $\frac{10^{5x}}{\ln 10} + C$ (b) $\frac{10^{5x}}{5 \ln 10} + C$

(c) $5 \cdot 10^{5x} \ln 10 + C$ (d) $10^{5x} \ln 10 + C$

23. $\int x^{-9} dx =$ কত?

(a) $-9x^{-8} + C$ (b) $-9x^{-10} + C$

(c) $-\frac{1}{10}x^{-10} + C$ (d) $-\frac{x^{-8}}{8} + C$

24. $y = \frac{2}{3x}$ হলে, $y_3 =$ কত?

(a) $-\frac{4}{x^4}$ (b) $\frac{4}{x^4}$ (c) $4x^4$ (d) $-4x^4$

25. $\int \frac{1}{\sqrt{18 - 2x^2}} dx =$ কত?

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1}\frac{x}{3} + C$ (b) $\frac{1}{3\sqrt{2}} \tan^{-1}\frac{x}{3} + C$

(c) $\frac{1}{6\sqrt{2}} \ln\left|\frac{3 + x}{3 - x}\right| + C$ (d) $\frac{1}{6\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x - 3}{x + 3}\right| + C$

উত্তরপত্র

1	d	2	a	3	a	4	c	5	b	6	a	7	c	8	b	9	b	10	b	11	b	12	a	13	d
14	c	15	d	16	c	17	a	18	b	19	d	20	c	21	a	22	b	23	d	24	a	25	a		

বোর্ড প্রশ্ন ২০২২ শর্ট সিলেবাস

যশোর বোর্ড

পূর্ণমান: ৩০ + ১৫=৪৫ সময়: ২ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৩০ সময়: ১: ৪০ মিনিট

ক বিভাগ—বীজগণিত ও জ্যামিতি

01. $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(ক) দুইটি ম্যাট্রিক্সের গুণন যোগ্যতা ব্যাখ্যা কর। 2

(খ) $f(x) = x^2 - 3x$ হলে $f(p)$ নির্ণয় কর। 4

(গ) $P^T R = Q$ থেকে প্রাপ্ত সমীকরণ জোটকে নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর। 4

02. $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a^3+1 & 2b^3+1 & 2c^3+1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

(ক) বিস্তার না করে প্রমাণ কর $\begin{vmatrix} a & -x & a+x \\ b & -y & b+y \\ c & -z & c+z \end{vmatrix} = 0$. 2

(খ) দেখাও যে, $(ST)^{-1} - T^{-1}S^{-1}$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স। 4

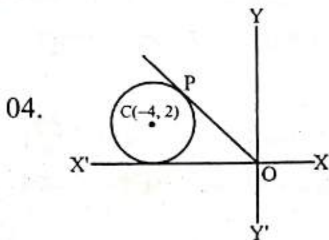
(গ) প্রমাণ কর যে, $|U| = -(2abc+1)(a-b)(b-c)(c-a)$. 4

03. $L(2,-1)$, $M(-3,3)$ এবং $2x - y + 1 = 0$.

(ক) $(1, 1)$ বিন্দু থেকে যে সকল বিন্দুর দূরত্ব সর্বদাই 5 একক, ঐ সকল বিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) L ও M বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্ব দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) L বিন্দুগামী এবং উদ্দীপকের সরলরেখাটির সাথে $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

04. 

(ক) (1, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত Y-অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

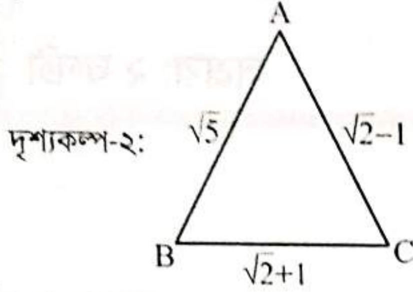
(খ) বৃত্তটির একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু $(-5, 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত। 4

(গ) OP স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

খ বিভাগ – ত্রিকোণমিতি এবং ক্যালকুলাস

05. দৃশ্যকল্প-১: $\angle P + \angle Q = \angle R$

দৃশ্যকল্প-২:



(ক) প্রমাণ কর যে, $\sin\theta + \sin(120° + \theta) + \sin(240° + \theta) = 0$. 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে দেখাও যে, $\cos^2\frac{P}{3} + \cos^2\frac{Q}{3} + \cos^2\frac{R}{3} = 1 + 2\cos\frac{P}{3}\cos\frac{Q}{3}\cos\frac{R}{3}$. 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সাহায্যে $\angle C$ এর মান নির্ণয় কর। অতঃপর দেখাও যে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $\frac{\sqrt{3}}{4}$ বর্গ একক। 4

06. $g(x) = x^3 - 3xy + y^3 - 15$

$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + 5.$

(ক) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক হতে $g(x) = 0$ বক্ররেখাটির $(2, 1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপক হতে $f(x)$ ফাংশনের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর। 4

07. দৃশ্যকল্প-১: $g(x) = \cot^{-1}x$

দৃশ্যকল্প-২: $y^2 = 2x$.

(ক) $\int\frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে $\int_1^{\sqrt{3}} x\, g(x)\, dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এবং $x = 3y$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

08. দৃশ্যকল্প-১: $f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$

দৃশ্যকল্প-২: $g(t) = e^{a\cos^{-1}(2t)}$

(ক) $y = 3x(1 + x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের ঢালের মান নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে $\int_0^{\ln 2} f(e^x)dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $(1 - 4x^2)g''(x) - 4xg'(x) - 4a^2g(x) = 0$. 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ১৫ সময়: ২০ মিনিট

01. যদি A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $A^2 = I$ হয়, তবে A কে বলে-

(a) শূন্যঘাতি ম্যাট্রিক্স (b) অভেদঘাতি ম্যাট্রিক্স (c) শূন্য ম্যাট্রিক্স (d) বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স

02. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ নির্ণায়কটির $(1, 2)$ তম ভুক্তির সহগুণক কোনটি?

(a) 4 (b) 2 (c) −2 (d) −4

03. কোনো বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাংক $(-1, \sqrt{3})$ হলে, বিন্দুর পোলার স্থানাংক কোনটি?

(a) $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ (b) $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$ (c) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ (d) $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$

04. যে কোনো ত্রিভুজের বাহু a, b, c এবং এর ক্ষেত্রফল Δ হলে, $\sin A =$ কত?

(a) $\frac{2\Delta}{ca}$ (b) $\frac{2\Delta}{bc}$ (c) $\frac{2\Delta}{ab}$ (d) $\frac{2\Delta}{abc}$

05. ΔABC এ, $\cos A = \sin B - \cos C$ হলে, $\angle A$ এর মান কোনটি?

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও।
$3x - 4y - 12 = 0$ সরলরেখাটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

06. B বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?
(a) $(4, 0)$ (b) $(0, 3)$ (c) $(0, -3)$ (d) $(0, 4)$

07. উদ্দীপকের সরলরেখার উপর লম্ব এবং $(1, 2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ কোনটি?
(a) $4x + 3y - 10 = 0$ (b) $4x + 3y - 12 = 0$ (c) $3x - 4y + 12 = 0$ (d) $4x - 3y - 10 = 0$

08. $r^2 + 2r\sin\theta = 3$ বৃত্তটির কেন্দ্র-
(a) $(1, 0)$ (b) $(-1, 0)$ (c) $(0, 1)$ (d) $(0, -1)$

09. $y = \sin^2 x^2$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত?
(a) $2\sin x^2$ (b) $2x\sin x^2$
(c) $2x\sin 2x^2$ (d) $2x^2\sin 2x^2$

10. $y = (x^2 + 1)\tan^{-1} x - x$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$
(a) $2\tan^{-1} x$ (b) $2x\tan^{-1} x$
(c) $x\tan^{-1} x$ (d) $\frac{2x}{1+x^2}$

11. $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের $(4, 3)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি?
(a) $3x + 4y - 25 = 0$ (b) $3x + 4y + 25 = 0$
(c) $4x + 3y - 25 = 0$ (d) $4x + 3y + 25 = 0$

12. $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন ক্রমবর্ধমান হবে যদি-
(a) $f'(a) = 0$ (b) $f'(a) < 0$
(c) $f'(a) \neq 0$ (d) $f'(a) > 0$

13. A, B ও C ম্যাট্রিক্সগুলোর মাত্রা যথাক্রমে $4 \times 3.3 \times 4$ এবং 7×4 হলে, $(B + A^T).C^T$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা কত?
(a) 3×4 (b) 4×3 (c) 3×7 (d) 4×7

14. $f(x) = x(2a - x)$ এর সর্বোচ্চ মান কোনটি?
(a) a (b) 2a (c) a^2 (d) $2a^2$

15. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$ বৃত্তটি দ্বারা x-অক্ষের খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য কত একক?
(a) $2\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{7}$ (c) $2\sqrt{10}$ (d) $2\sqrt{15}$

16. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = ?$
(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $-\frac{\pi}{2}$ (c) π (d) $-\pi$

17. $\int_0^1 \frac{e^{5x}+e^{3x}}{e^x+e^{-x}} dx$ এর মান কোনটি?
(a) $4(e^4 - 1)$ (b) $\frac{1}{5}(e^5 - 1)$
(c) $5(e^5 - 1)$ (d) $\frac{1}{4}(3^4 - 1)$

18. $\cos 2A =$
(i) $-2\sin^2 A + 1$ (ii) $2\cos^2 A - 1$
(iii) $\frac{1-\tan^2 A}{\sec^2 A}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

19. $y = mx + c$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত-
(a) $c = -25\sqrt{1 + m^2}$ (b) $c = 25\sqrt{1 + m^2}$
(c) $c = \pm 5\sqrt{1 + m^2}$ (d) $c = \pm 5\sqrt{1 - m^2}$

20. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$ একটি-
(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স
(iii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

21. $y - x = 4$ এবং $y = x$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব কত একক?
(a) 4 (b) 2 (c) $4\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{2}$

22. $2\sin^2 15°$ এর মান কত?
(a) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (d) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

23. $x + y - 4 = 0$ সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ তৈরি করে তার ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?
(a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 32

24. $f(x) = \sqrt{x}$ হলে-
(i) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (ii) $\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{3}$
(iii) $\int \frac{\sec^2 x}{f(\tan x)} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\tan x} + c$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8\theta \cos\theta \, d\theta$ এর মান-
(a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{1}{7}$ (d) 0

উত্তরপত্র

1	b	2	b	3	a	4	b	5	d	6	c	7	a	8	d	9	c	10	b	11	c	12	d	13	c
14	c	15	d	16	a	17	d	18	d	19	c	20	b	21	d	22	a	23	b	24	a	25	a		

বোর্ড প্রশ্ন ২০২২ শর্ট সিলেবাস

কুমিল্লা বোর্ড

পূর্ণমান: ৩০ + ১৫=৪৫ সময়: ২ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৩০ সময়: ১: ৪০ মিনিট

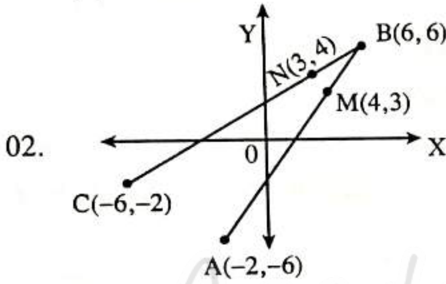
ক বিভাগ—বীজগণিত ও জ্যামিতি

01. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} a & 12 & 6 \\ b & 10 & 3 \\ 3 & 9 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}$

(ক) $A + B = C$ হলে a, b এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) B^{-1} নির্ণয় কর। 4

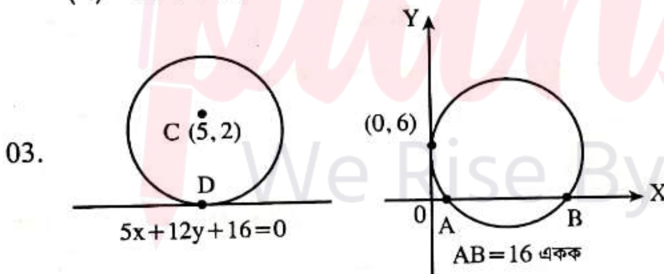
(গ) নির্ণায়কের সাহায্যে $AX = D$ এর সমাধান কর। 4

02. 

(ক) AM রেখাটি x- অক্ষ দ্বারা যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়, তা নির্ণয় কর। 2

(খ) B (6,6) বিন্দু হতে AC সরলরেখার লম্বদূরত্ব নির্ণয় কর। 4

(গ) দেখাও যে, ∠B এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব। 4

03. 

(ক) (2,2) বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 2

(খ) C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের স্পর্শবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 4

(গ) AB জ্যা বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

04. উদ্দীপকে-১: AB সরলরেখাটি প্রথম চর্তুভাগে $\frac{32}{\sqrt{3}}$ বর্গএকক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ΔOAB গঠন করে এবং মূলবিন্দু হতে AB এর উপর লম্ব OP যা x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $60°$ কোণে আনত।

উদ্দীপক-২: $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 1 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ।

(ক) (4,2) বিন্দুগামী এবং $6x + 8y + 17 = 0$ রেখার সাথে সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত AB এর সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপক-২ এ উল্লিখিত বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

খ বিভাগ – ত্রিকোণমিতি এবং ক্যালকুলাস

05. ABC একটি ত্রিভুজ এবং $f(x) = \sin x$

(ক) দেখাও যে, $f(A) = \sin B \cos C + \cos B \sin C.$ 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $C = (\cos B - \cos A) = 2(a-b)\cos^2\frac{C}{2}$ 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $f(A+B-C) + f(B+C-A) + f(C+A-B) = 4\sin A \sin B \sin C$ 4

06. $h(x) = \cos x$ এবং $p(x) = (x^2+1)\tan^{-1}x - x$

(ক) x-এর সাপেক্ষে p(x) এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $\lim_{x\to 0}\frac{h(0)-2h(x)+h(2x)}{x^2} = -1$ 4

(গ) $\sqrt{3}h\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3h(x)$ এর চরম মান নির্ণয় কর। 4

07. $g(x) = x$ এবং $y = x + \frac{1}{x}$

(ক) $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় কর। 2

(খ) প্রমাণ কর যে $\cos^4\left\{\cot^{-1}\sqrt{\frac{1-g(x)}{1+g(x)}}\right\} = \frac{1}{2}(x-1).$ 4

(গ) $y = \sqrt{4+3g(\sin x)}$ হলে, দেখাও যে, $2yy_2 + 2y_1^2 + y^2 - 4 = 0$ 4

08. $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2,\ \ h(x) = \tan x$

(ক) $\int\frac{h'(x)}{\{1+h(x)\}^2}dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{30h'(x)dx}{[\{h(x)\}^2-9]\{h(x)-2\}}$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) যোগজীকরণের সাহায্যে $f(x,y) = 36$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ১৫ সময়: ২০ মিনিট

01. $\sin 20° + \cos 20°$ এর মান কত?

(a) $\sqrt{2}\cos 25°$ (b) $\sqrt{2}\sin 25°$
(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 25°$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 25°$

02. ΔABC এর $AB = 6, AC = 8$ এবং $\angle BAC = 60°$ হলে ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত?

(a) $12\sqrt{3}$ (b) 24 (c) 48 (d) $48\sqrt{3}$

03. n একটি পূর্ণসংখ্যা হলে $\sin\left\{2n\pi + (-1)^{2n}\frac{\pi}{6}\right\}$ এর মান কত?

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

04. $\sin 10° = p$ হলে, $\sin 20°$ এর মান কোনটি?

(a) 2p (b) $2p\sqrt{1-p^2}$
(c) $2p\sqrt{p^2-1}$ (d) $2\sqrt{1-p^2}$

05. নিচের কোন শর্তে $ax^2 + by^2 = c$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে?

(a) $c = 0$ (b) $c = r^2$
(c) $a \neq b$ (d) $\frac{a}{b} = 1, b \neq 0$

06. $y^2 = x$ হলে y_1 নিচের কোনটি?

(a) 2y (b) 2x (c) $2\sqrt{x}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

07. $y = \sin x$ হলে–

(i) $y_1 = \cos x$ (ii) $y_2 = -\sin x$
(iii) $y_3 + y_1 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

08. $\int\frac{1}{3\sqrt{x}}dx =$ কত?

(a) $-\frac{2}{3}\sqrt{x} + c$ (b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} + c$
(c) $\frac{2}{3}\sqrt{x} + c$ (d) $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x} + c$

09. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} =$ কত?

(a) $\frac{\pi}{24}$ (b) $\frac{\pi}{12}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{3}$

10. $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx =$ কত?

(a) $2\ln 2$ (b) $\frac{1}{2}\ln 2$ (c) $2(\ln 2)^2$ (d) $\frac{1}{2}(\ln 2)^2$

11. $(-1,-1)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাংক কোনটি?

(a) $(\sqrt{2}, -45°)$ (b) $(\sqrt{2}, 45°)$ (c) $(\sqrt{2}, 135°)$ (d) $(\sqrt{2}, 225°)$

12. $3x - 5y + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব এবং $(2,1)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ কোনটি?

(a) $5x + 3y - 13 = 0$
(b) $5x + 3y + 13$
(c) $3x + 5y - 13 = 0$
(d) $5x - 3y - 13 = 0$

13. $4x - 5y + 9 = 0$ সরলরেখাটির –

(i) ঢাল $= \frac{4}{5}$
(ii) x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ $= \frac{9}{4}$
(iii) y-অক্ষের ছেদবিন্দু $= \left(0, \frac{9}{5}\right)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

14. $(\sqrt{2}, 1)$ বিন্দু হতে রেখাটির লম্ব দূরত্ব কত?

(a) $2\sqrt{3}$ (b) $3\sqrt{2}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{2}$

15. প্রদত্ত সরলরেখার দ্বারা y-অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য কোনটি?

(a) -5 (b) $-\frac{5}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (d) 5

16. $2x^2 + 2y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র কোনটি?

(a) $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ (c) $(-2, 1)$ (d) $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$

17. $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$ বৃত্তের y-অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য কোনটি?

(a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 32

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = \ln(1-x)$ এবং $g(x) = \tan x^2$

18. $g(x)$ এর অন্তরজ কোনটি?

(a) $\sec^2 x^2$ (b) $2x \sec x^2$ (c) $2x \sec^2 x^2$ (d) $2\tan x \sec^2 x$

19. $f''(2)$ এর মান কত?

(a) -2 (b) -1 (c) 1 (d) 2

20. $\frac{d}{dx}(\log_a 2x) =$ কত?

(a) $\frac{1}{x}$ (b) $\frac{1}{x}\log_e a$ (c) $\frac{1}{x}\log_a e$ (d) $\frac{1}{2x}\log a$

21. দুটি ম্যাট্রিক্স A ও B এর মাত্রা যথাক্রমে $p \times q$ এবং $n \times r$ হলে AB নির্ণয়ের শর্ত কোনটি?

(a) $p = r$ (b) $p = n$ (c) $q = r$ (d) $q = n$

22. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ একটি–

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স (ii) ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স
(iii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

23. নিচের কোনটি সমঘাতী ম্যাট্রিক্স?

(a) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ নির্ণায়কটির–

(i) মান = 0 (ii) (2, 3) তম ভুক্তির অনুরাশি = 5
(iii) (2, 1) তম ভুক্তির সহগুণক = 0

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

25. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ এর অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স কোনটি?

(a) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

উত্তরপত্র

1	a	2	a	3	b	4	b	5	d	6	d	7	d	8	c	9	b	10	d	11	d	12	a	13	d
14	a	15	d	16	a	17	b	18	c	19	b	20	c	21	d	22	a	23	b	24	b	25	c		

বোর্ড প্রশ্ন ২০২২ শর্ট সিলেবাস

দিনাজপুর বোর্ড

পূর্ণমান: ৩০ + ১৫=৪৫ সময়: ২ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৩০ সময়: ১: ৪০ মিনিট

01. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$; $\frac{x}{5} - \frac{2y}{5} + z = 1$

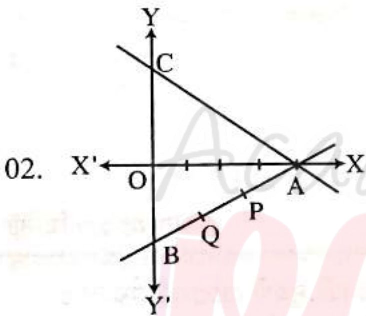
$x + \frac{y}{4} + \frac{3z}{4} = 1$

$\frac{x}{3} - y + \frac{2z}{3} = 1$

(ক) $B = \begin{bmatrix} K+4 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$, B ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে K এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) A নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকে বর্ণিত সমীকরণ জোটটি ক্রেমারের নিয়মে সমাধান কর। 4

02. 

চিত্রে $OA = 4, OB = 2$ এবং $OC = 3$

(ক) $(2, -3)$ বিন্দুগামী এবং x- অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 45° কোণ এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) $AP = PQ = QB$ হলে ΔOPQ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

(গ) A বিন্দুগামী এবং AC রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

03. $A(3, -2)$, $B(5, 6)$ দুটি বিন্দু $3x + 4y - 1 = 0$ ও $5x - 12y + 3 = 0$ দুটি সরলরেখার সমীকরণ

(ক) $(5, -5)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

(খ) AB এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক রেখাটি y- অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা নির্ণয় কর। 4

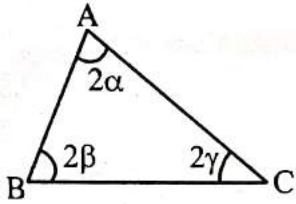
(গ) উদ্দীপকে বর্ণিত রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী স্থূল কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

04. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ ও $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ।

(ক) $r = 4\cos\theta$ বৃত্তটির কেন্দ্রের কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত প্রথম বৃত্তের একটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $3x + 4y - 1 = 0$ এর সমান্তরাল। 4

(গ) উদ্দীপকে বর্ণিত বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

05. 

(ক) প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos 6x}}} = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{3x}{2}$. 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta\ \sin\gamma = 1$ 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $(c-b)\sec\left(\frac{A}{2}+B\right) = a\sec\frac{A}{2}$ 4

06. $f(x) = \sin x$ এবং $g(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 30$ দুটি ফাংশন।

(ক) $\lim_{x\to 0}\frac{2e^{-\sin x}-2}{\sin x}$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) মূল নিয়মে x- এর সাপেক্ষে $\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{f(2x)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 4

(গ) g(x) এর চরম মানসমূহ নির্ণয় কর। 4

07. $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+4)(x-1)}$ এবং $g(x) = x^2$ দুটি ফাংশন।

(ক) $\int \ln(1+x)dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int f(x)dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) $y = 4g(x)$ ও $y = 2x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

08. $f(x) = \sin^{-1}x$ ও $g(x,y) = y(x-3)(x-5) + x - 10$ দুটি ফাংশন।

(ক) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{3+\sin^2 x}dx$ এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) $g(x,y) = 0$ বক্ররেখা যে বিন্দুতে x- অক্ষকে ছেদ করে সে বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) $y = e^{3f(x)}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 9y = 0$. 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ১৫ সময়: ২০ মিনিট

01. $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স কোনটি?

(a) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

02. $f(x) = \frac{x}{3}$ এবং $g(x) = x^2$ হলে–

(i) $\int f(x)dx = \frac{x^2}{6} + c$

(ii) $\int\frac{-1}{1+g(x)}dx = -\cot x + c$

(iii) $g''(0) = 2$

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

03. (−2,3) বিন্দুতে কেন্দ্র এবং y- অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ কোনটি?

(a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9=0$

(b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$

(c) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$

(d) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$2x - ky + 1 = 0$ ও $3x + 2y - 6 = 0$ দুইটি সরল রেখার সমীকরণ।

04. দ্বিতীয় রেখাটির লম্ব রেখার ঢাল কত?

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $-\frac{2}{3}$ (d) $-\frac{3}{2}$

05. রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হলে k এর মান কত হবে?

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $-\frac{3}{4}$ (d) $-\frac{4}{3}$

06. যদি $\begin{bmatrix}0 & 5 & -3\\ -5 & 0 & y\\ x & 4 & 0\end{bmatrix}$ বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে $(x,y) =$?

(a) (−3,−4) (b) (−3,4) (c) (3,−4) (d) (3,4)

07. $f(x) = 2x^2 - x + 3$ হলে–

(i) (1,4) বিন্দুতে ফাংশনটির স্পর্শকের ঢাল 3

(ii) $x < \frac{1}{4}$ এর জন্য ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান

(iii) $x = \frac{1}{4}$ এর জন্য ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

08. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & x \\ 6 & 2 & 8 \end{vmatrix}$ এর $(1,1)$ তম ভুক্তির অনুরাশি -4 হলে x এর মান কত?

(a) 6 (b) 2 (c) -2 (d) -6

09. $x^2 + y^2 = 13$ বৃত্তের $(-2, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি?

(a) $2x + 3y + 13 = 0$ (b) $2x + 3y - 13 = 0$
(c) $2x - 3y - 13 = 0$ (d) $2x - 3y + 13 = 0$

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$ ও $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 1 = 0$ দুটি বৃত্তের সমীকরণ।

10. প্রথম বৃত্তের কেন্দ্র কোনটি?

(a) $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ (b) $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$
(c) $\left(1, -\frac{2}{3}\right)$ (d) $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$

11. দ্বিতীয় বৃত্ত দ্বারা y- অক্ষের খণ্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য কত

(a) $2\sqrt{3}$ (b) $2\sqrt{5}$ (c) $2\sqrt{8}$ (d) $2\sqrt{10}$

12. ΔABC এর $a = 5, b = 4$ এবং $c = 3$ হলে-

(i) A কোণের মান $60°$
(ii) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক
(iii) ত্রিভুজটি সমকোণী

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

13. $\int \frac{5}{1-5x} dx$ এর মান কোনটি?

(a) $\ln(1 - 5x) + c$ (b) $-\ln(1 - 5x) + c$
(c) $\frac{\ln(1-5x)}{5}$ (d) $\frac{-\ln(1-5x)}{5}$

14. $\frac{d^n}{dx^n}(\sin 2x) = ?$

(a) $2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 2x\right)$ (b) $\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 2x\right)$
(c) $2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} - 2x\right)$ (d) $\sin\left(\frac{n\pi}{2} - 2x\right)$

15. $f(x) = x^2 + 1$ হলে

(i) $(1, 2)$ বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল $-\frac{1}{2}$
(ii) $\int_0^1 \frac{2x}{f(x)} dx = \ln 2$
(iii) ফাংশনটির চরম বিন্দুর স্থানাংক (0,1)

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

16. $\cos 15°$এর মান কত?

(a) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

17. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan^{-1} 2x}{3x}$ এর মান কত?

(a) 0 (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) 1

18. $\cot\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ হলে $\sec\theta$ এর মান কত?

(a) $\frac{-5}{3}$ (b) $\frac{-5}{4}$ (c) $\frac{5}{4}$ (d) $\frac{5}{3}$

19. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(6, -4)$ এবং বৃত্তটি x- অক্ষকে স্পর্শ করে, বৃত্তটির ব্যাসের মান কত?

(a) 12 (b) 8 (c) 6 (d) 4

20. $(3, -4)$বিন্দুগামী এবং y অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ কোনটি?

(a) $x - 3 = 0$ (b) $x + 3 = 0$
(c) $y - 4 = 0$ (d) $y + 4 = 0$

21. $\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}^{-1}x)$ এর মান কোনটি?

(a) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (b) $\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (c) $\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

22. $\begin{matrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \\ -1 & 7 & 10 \end{matrix}$ নির্ণায়কের $(2, 3)$ তম ভুক্তির সহগুণক কত?

(a) 114 (b) 19 (c) -19 (d) -114

23. $(-3\sqrt{3}, 3)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি?

(a) $\left(6, \frac{11\pi}{6}\right)$ (b) $\left(6, \frac{5\pi}{6}\right)$ (c) $\left(6, \frac{5\pi}{3}\right)$ (d) $\left(6, \frac{2\pi}{3}\right)$

24. $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ এবং $g(x) = \sin^{-1}(\sin\sqrt{x})$ হলে

(i) $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$ (ii) $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
(iii) $f(1) = \frac{\pi}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

25. $\mathrm{cosec}(-330°)$ এর মান কত?

(a) -2 (b) $\frac{-2}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) 2

উত্তরপত্র

1	a	2	c	3	a	4	b	5	d	6	c	7	a	8	c	9	d	10	c	11	d	12	c	13	b
14	a	15	c	16	b	17	c	18	a	19	b	20	a	21	b	22	c	23	b	24	c	25	d		

বোর্ড প্রশ্ন ২০২২ শর্ট সিলেবাস

ময়মনসিংহ বোর্ড

পূর্ণমান: ৩০ + ১৫=৪৫ সময়: ২ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৩০ সময়: ১: ৪০ মিনিট

ক বিভাগ—বীজগণিত ও জ্যামিতি

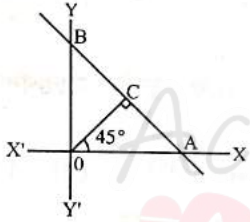
01. $f(x) = x^2 - 4x + 5$

$$B = \begin{bmatrix} a^2 & bc & ca + c^2 \\ a^2 + ab & b^2 & ca \\ ab & b^2 + bc & c^2 \end{bmatrix}$$

(ক) যদি $\begin{bmatrix} x+3 & 6 \\ 5 & x-4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হয়, তবে x এর মান বাহির কর। 2

(খ) যদি $A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে f(A) নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $|B| = 4a^2b^2c^2$. 4

02. 

(ক) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ রেখার উপর লম্ব এবং প্রদত্ত x -অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুগামী। 2

(খ) যদি $\Delta AOB = 8$ বর্গ একক হয়, তবে AB রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) $\angle BAX$ এর সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

03. A(1,1) বিন্দুটি $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের উপর অবস্থিত। রেখাত্রয়ের সমীকরণ $x = 0, y = 0, x = a$.

(ক) যদি $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে তবে c এর মান নির্ণয় কর। 2

(খ) A বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাংঙ্ক নির্ণয় কর। A বিন্দুগামী বস্তুটির স্পর্শকের সমীকরণও নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকে প্রদত্ত রেখাত্রয়কে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

04. দৃশ্যকল্প-১: $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ $4x + 3y + 26 = 0$.

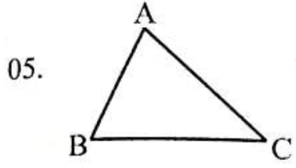
দৃশ্যকল্প-২: (1,2) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

(ক) $r = 4 \sin\theta$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর বৃত্তটির দুটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা প্রদত্ত জ্যা-এর উপর লম্ব। 4

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটি দ্বারা y-অক্ষের খণ্ডিত অংশের পরিমাণও নির্ণয় কর। 4

খ বিভাগ – ত্রিকোণমিতি এবং ক্যালকুলাস

05. 

(ক) $\cos 3A$ কে $\cos A$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। 2

(খ) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C$ এর মান কত? 4

(গ) $A = 60°$ হলে দেখাও যে, $\cos\frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{2a}$. 4

06. $z = \sin x$

(ক) $\frac{d}{dz}(z^x)$ নির্ণয় কর। 2

(খ) মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $\frac{1}{z}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 4

(গ) যদি $y = x^2$ হয়, তবে $(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - z\frac{dy}{dz} - 2$ এর মান নির্ণয় কর। 4

07. $f(x) = e^x,\ g(x,y) = x^2 - y^2 - 7.$

(ক) a এর মান কত হলে $y = ax(1-x)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে? 2

(খ) $g(x,y) = 0$ বক্ররেখার $(4,-3)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) $4f(x) + 9f(-x)$ এর লঘু মান কত? 4

08. $f(x,y) = 9x^2 + 4y^2 - 36, g(x) = \cos x.$

(ক) $\int \sin^{-1} x\, dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) $\int_1^5 \frac{1}{x}\sqrt{1-\{g(\ln x)\}^2}\, dx$ এর মান নির্ণয় কর। 4

(গ) $f(x,y) = 0$ কণিক দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ১৫ সময়: ২০ মিনিট

01. $A^2 = A$ হলে A ম্যাট্রিক্সটি–

(a) সমঘাতী (b) ব্যতিক্রমী

(c) প্রতিসম (d) অব্যতিক্রমী

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ একটি নির্ণায়ক।

02. (2,1) তম ভুক্তির অনুরাশি–

(a) −41 (b) −12 (c) 12 (d) 41

03. (3,2) তম ভুক্তির সহগুণক–

(a) −12 (b) −9 (c) 9 (d) 12

04. A, B, C ম্যাট্রিক্সত্রয়ের মাত্রা যথাক্রমে $3\times4, 4\times5$ ও 5×2 হলে, (AB)C এর মাত্রা–

(a) 4×5 (b) 3×2 (c) 2×3 (d) 3×5

05. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ মাট্রিক্সটি–

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স

(ii) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

(iii) অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

06. (−3, −4) ও (6,2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাটিকে y-অক্ষরেখা যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, তা হলো

(a) 2: 1 (b) 1: 2 (c) 2: 3 (d) 3: 2

07. $3x - 7y - 21 = 0$ সরলরেখাটি

(i) $+\frac{3}{7}$ ঢালবিশিষ্ট

(ii) $(-7, -6)$ বিন্দুগামী

(iii) x- অক্ষ হতে 7 একক দৈর্ঘ্য খণ্ডিত করে

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

08. $x + \sqrt{3}y + 2 = 0$ রেখাটি x–অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা হলো–

(a) 180° (b) 150° (c) 60° (d) 30°

09. $y \pm x = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ–

(a) 45° (b) 60° (c) 90° (d) 120°

10. $r - 4 = 0$ পোলার সমীকরণটি নির্দেশ করে–

(a) পরাবৃত্ত (b) বৃত্ত

(c) উপবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত

নিচের উদ্দীপকের সাহায্যে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

11. বৃত্তটি x- অক্ষকে যে বিন্দুতে স্পর্শ করে তা হলো

(a) (1,0) (b) (0,1) (c) (−1,1) (d) (1,1)

12. বৃত্তটির ব্যাসার্ধ–

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) 2 (d) 3

13. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0$ বৃত্তের $(-2,1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ–

(a) $x + 2y + 3 = 0$ (b) $2x - y + 3 = 0$

(c) $x - 2y + 3 = 0$ (d) $2x + y + 3 = 0$

14. ΔABC এর ক্ষেত্রে $c^2 + a^2 - b^2 - ca = 0$ হলে $\angle B$ এর পরিমাণ-

(a) 30° (b) 45°

(c) 60° (d) 120°

15. যে কোনো ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক?

(a) $c = a\cos B + b\cos A$

(b) $b = c\sin A + a\sin C$

(c) $\Delta = \frac{1}{2}ab\cos C$

(d) $\cos A = \frac{b^2+c^2+a^2}{2bc}$

16. $\tan\theta = \frac{1}{2}$ হলে $\sin 2\theta$ এর মান কোনটি?

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{5}{4}$ (d) $\frac{4}{5}$

17. $\sin^4\theta - \cos^4\theta$ সমান-

(a) $1 + 2\sin^2\theta$ (b) $1 + 2\cos^2\theta$

(c) $2\sin^2\theta - 1$ (d) $2\cos^2\theta - 1$

18. $y = \ln x$ বক্ররেখাটির $x = 1$ বিন্দুতে ঢাল–

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

19. $\lim_{x\to 0}\frac{x(\sin 2x+\sin 3x)}{\sin x}$ এর মান –

(a) −2 (b) −1 (c) 0 (d) 1

20. $\frac{d}{dx}(2^x) =$ কত?

(a) $x2^{x-1}$ (b) $x2^{x+1}$

(c) $2\ln x$ (d) $2^x \ln 2$

21. $\lim_{x\to 0}\{2\ln(1+x) - \ln(1-x)\}$ এর মান –

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) ∞

22. $\frac{d}{dx}(\ln x)$ এর যোগজ –

(a) $-\frac{1}{x} + c$ (b) $-\ln x + c$

(c) $\frac{1}{x} + c$ (d) $\ln x + c$

23. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx =$ কত?

(a) $2\sqrt{\cos x} + c$ (b) $2\sqrt{\sin x} + c$

(c) $\frac{1}{2}\sqrt{\cos x} + c$ (d) $\frac{1}{2}\sqrt{\sin x} + c$

24. $x^2 + y^2 = 1$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল-

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) π (d) 2π

25. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ এর মান –

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

উত্তরপত্র

1	a	2	c	3	b	4	b	5	d	6	b	7	d	8	b	9	c	10	b	11	a	12	b	13	d
14	c	15	d	16	c	17	c	18	a	19	c	20	d	21	a	22	d	23	b	24	c	25	c		

শর্ট সিলেবাস ২০২৩

মডেল টেস্ট-০১

পূর্ণমান: ৫০ + ২৫=৭৫ সময়: ৩ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

পূর্ণমান: ৫০ সময়: ২: ৩৫ মিনিট

01. $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, R=\begin{bmatrix}4\\6\\5\end{bmatrix}$ এবং $f(x)=x^3-3x^2+2x$.

(ক) $\begin{bmatrix}1&7\\P&4\end{bmatrix}$ প্রতিসম হলে P এর মান কত? 2

(খ) $AX=R$ সমীকরণটি ক্রেমারের নিয়মের সাহায্যে সমাধান কর। 4

(গ) $f(A)=I$ হলে সমীকরণটি হতে A^{-1} নির্ণয় কর। 4

02. OABC একটি সামান্তরিক। OA রেখা x অক্ষ বরাবর অবস্থিত। OC রেখার সমীকরণ $y=2x$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4,2)।

(ক) C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। 2

(খ) AC কর্ণের সমীকরণ ও তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 4

(গ) OB কর্ণের দৈর্ঘ্য এবং OABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

03. একটি বৃত্ত (1,2) ও (3,2) বিন্দু দিয়ে যায়।

(ক) প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখাকে ব্যাস ধরে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) প্রদত্ত বৃত্তটি যদি X-অক্ষকে স্পর্শ করে তাহলে এর সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রদত্ত বৃত্তটির কেন্দ্র $2x+y=5$ রেখার উপর অবস্থিত হলে এর সমীকরণ এবং এর X-অক্ষের খন্ডিতাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। 8

04. দৃশ্যকল্প-১: $\tan\alpha : \tan\beta = x : y$

দৃশ্যকল্প-২: $\tan\theta = k\tan\emptyset$

(ক) $\tan 20° + \tan 25° + \tan 20° \tan 25° =$ কত? 2

(খ) $\theta=\alpha+\beta$ হয়, তবে দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $\sin(\alpha-\beta)=\frac{x-y}{x+y}\sin\theta$ । 4

(গ) $\theta=\alpha-\emptyset$ হয়, তবে দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $\sin(\theta-\emptyset)=\frac{k-1}{k+1}\sin\alpha$ 4

05. $y=\cos(\sin x)$, $f(x)=x^3-3x^2-45x+13$

(ক) মূল নিয়মে $\cos 2x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। 2

(খ) উদ্দীপক থেকে প্রমাণ কর, $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\tan x + y\cos^2 x = 0$ 4

(গ) উদ্দীপকের $f(x)$ ফাংশনটির বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর। 4

06. $\ln y = \tan^{-1} x$ একটি ফাংশন এবং একটি বক্ররেখার সমীকরণ $x^2+2ax+y^2=0$

(ক) $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{2\sqrt{x}}{1-x}\right)$ এর মান বের কর। 2

(খ) উদ্দীপকের ফাংশনটির ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)y_2+(2x-1)y_1=0$ 4

(গ) বক্ররেখাটির যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক X অক্ষের উপর লম্ব সে সকল বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

07. $f(x) = e^x + 1, g(x) = x\sqrt{4-x}$ এবং $y^2 = 4ax$ ও $x^2 = 4ay$ দুটি পরাবৃত্তের সমীকরণ।

(ক) $\int \frac{dx}{f(x)}$ মান বের কর। 2

(খ) $\int_0^4 g(x)dx$ নির্ণয় কর। 4

(গ) পরাবৃত্তদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

08. $f(x) = \int x\sin^{-1} x dx$ এবং $g(x) = \int_8^{27} \frac{dx}{x - x^{\frac{1}{3}}}$

(ক) $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$ 2

(খ) $f(x)$ এর যোগজীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) $g(x)$ এর মান নির্ণয় কর। 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ২৫ সময়: ২৫ মিনিট

01. A^{-1} = কত?

(a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ (d) $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

02. A, B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলোর আকার যথাক্রমে $4 \times 5, 5 \times 4$ এবং 5×2 হলে, $(B^T + A)C$ ম্যাট্রিক্সের আকার হবে-

(a) 5×4 (b) 4×2

(c) 5×2 (d) 2×4

03. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ হলে, A একটি-

(i) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (ii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

(iii) 3×3 ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

04. $\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$ এর মান কত?

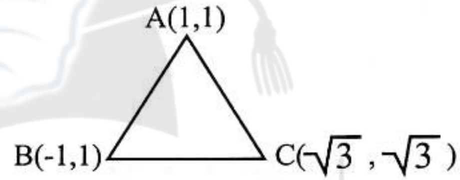
(a) $abc(a+b)(b+c)(c+a)$ (b) 0

(c) $(a+b)(b+c)(c+a)$ (d) abc

05. দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হলে তাদের ঢালদ্বয়ের-

(a) গুণফল 1 (b) গুণফল −1

(c) যোগফল 1 (d) যোগফল −1

06. 

ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র কত?

(a) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2+\sqrt{3}}{3}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{3}\right)$ (d) $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)$

07. মূলবিন্দুগামী রেখা–

(i) $y = mx$ (ii) $x = 0$ (iii) $x = y$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

08. $4x + 6y + c = 0$ এবং $2x + 3y + 1 = 0$ সমীকরণদ্বয় একই রেখা নির্দেশ করলে c এর মান কোনটি?

(a) 1 (b) 2

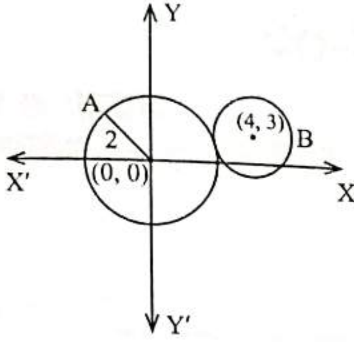
(c) 3 (d) $\frac{2}{3}$

09. $x^2 + (y-1)^2 + 2(y-1) = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র কত?

(a) $(0, -1)$ (b) $(0, 0)$

(c) $(0, 1)$ (d) $(0, 2)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



10. B বৃত্তের ব্যাসার্ধ নিচের কোনটি?
(a) 7 একক (b) 6 একক
(c) 8 একক (d) 3 একক

11. B বৃত্তের সমীকরণ নিচের কোনটি?
(a) $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$
(b) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0$
(c) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$
(d) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 16 = 0$

12. পরিধিস্থ $p(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ–
(a) $y_1 = \frac{1}{x_1}$ (b) $y = \frac{1}{x_1}$
(c) $y = \frac{x_1}{y_1}$ (d) $y = \frac{y_1 x}{x_1}$

13. $\cos(180° + \theta) =$?
(a) $\cos\theta$ (b) $-\cos\theta$
(c) $\sin\theta$ (d) $-\sin\theta$

14. $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং θ সূক্ষ্মকোণ হলে-
(i) $\sin\theta = \frac{5}{13}$ (ii) $\cos\theta = -\frac{12}{13}$
(iii) $\sec\theta + \tan\theta = \frac{3}{2}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

15. $\sin A = \frac{3}{5}$ হলে $\cos 2A$ এর মান কোনটি?
(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{7}{5}$ (c) $\frac{7}{25}$ (d) $\frac{16}{25}$

16. $\sin 27° + \cos 27°$ এর মান কত?
(a) $\cos 18°$ (b) $2\cos 18°$
(c) $\sqrt{2}\cos 18°$ (d) $\sqrt{2}\sin 18°$

17. $\lim_{x\to a} \frac{x^{\frac{7}{2}} - a^{\frac{7}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}} =$ কত?
(a) $\frac{7}{2}a^2$ (b) $\frac{7}{3}a^2$
(c) $7a^{\frac{5}{2}}$ (d) $\frac{7}{2}a^{5/2}$

18. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x) =$?
(a) $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) 0 (c) $-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) 2

19. $y = x^3 + 2$ সমীকরণের ক্ষেত্রে $\frac{d^3y}{dx^3} =$ কত?
(a) $6x$ (b) $3x^2$ (c) 2 (d) 6

20. $\int x^{-1}\,dx$ এর মান কোনটি?
(a) $\ln x$ (b) ∞ (c) 0 (d) $\frac{1}{x^2}$

21. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল–
(a) 16π (b) 25π
(c) 20π (d) 400π

22. $\int e^x \sec x(1 + \tan x)dx = f(x) + c, f(x) =$?
(a) $e^x \sin x$ (b) $e^x \cos x$
(c) $e^x \tan x$ (d) $e^x \sec x$

23. $\int_0^1 x\left(1 - \sqrt{x}\right)^2 dx =$?
(a) $\frac{1}{30}$ (b) $\frac{2}{15}$ (c) $\frac{1}{17}$ (d) $-\frac{1}{30}$

24. $\int_e^1 \frac{1}{x}dx =$?
(a) e (b) 1 (c) −e (d) −1

25. $\int e^{-x^3}x^2 dx$ এর সমাকলন কোনটি?
(a) $-\frac{1}{3}e^{-x^3} + c$ (b) $\frac{1}{3}e^{x^3} + c$
(c) $-\frac{1}{3}e^{x^4} + c$ (d) $-\frac{1}{3}e^{x^6} + c$

উত্তরপত্র

1	d	2	b	3	b	4	b	5	b	6	a	7	d	8	b	9	b	10	d	11	c	12	d	13	b
14	b	15	c	16	c	17	b	18	b	19	d	20	a	21	c	22	d	23	a	24	d	25	a		

শর্ট সিলেবাস ২০২৩

মডেল টেস্ট-০২

পূর্ণমান: ৫০ + ২৫=৭৫ সময়: ৩ ঘণ্টা

সৃজনশীল প্রশ্ন

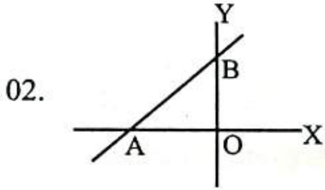
পূর্ণমান: ৫০ সময়: ২: ৩৫ মিনিট

01. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স।

(ক) প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} = p(p-1)^2(p^2-1)$ 2

(খ) A এর বিপরীত বর্গ ম্যাট্রিক্স B নির্ণয় কর। 4

(গ) প্রমাণ কর যে, $AB = I_3$ 4

02. 

AB রেখাংশের সমীকরণ $3x - y + 7 = 0$

(ক) AB রেখাংশকে বর্গের বাহু ধরে ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 2

(খ) রেখাটির সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং $(-1,2)$ বিন্দুগামী এরূপ রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) $(2,-1)$ বিন্দু হতে রেখাটির উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর। 4

03. দৃশ্যকল্প-১: $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 8 = 0$ এবং দৃশ্যকল্প-২: $x^2 + y^2 + 6x + 12y + 8 = 0$

(ক) $(1,-3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত X- অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 2

(খ) দৃশ্যকল্প-১ একটি বৃত্ত নির্দেশ করে। উক্ত বৃত্তের যে যে স্পর্শক $3x + 2y - 6 = 0$ রেখার উপর লম্ব তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকের বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। 4

04. (i) $16\cos 2A \cos 4A \cos 8A \cos 14A$

(ii) $\sin^3 A + \sin^3(120° + A) + \sin^3(240° + A) = B$

(ক) $\frac{1}{\sin 10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°} = ?$ 2

(খ) $A = \frac{\pi}{15}$ হলে দেখাও যে, (i) এর মান 1 । 4

(গ) (ii) এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $B = -\frac{3}{4}\sin 3x$ । 4

05. $P = e^x$ এবং $y = \sin(m \sin^{-1} x)$

(ক) $\frac{d}{dx}(e^{\tan^{-1} x})$ কত? 2

(খ) মূল নিয়ম P এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। 4

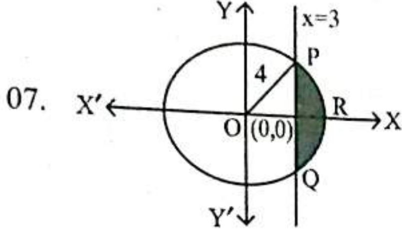
(গ) প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$ 4

06. $g(x) = 9e^x + 16e^{-x}$ এবং $y = \sqrt{2 + 5\sin x}$

(ক) x এর সাপেক্ষে $(1+x)^x$ এর অন্তরক নির্ণয় কর। 2

(খ) প্রমাণ কর যে, $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 2$ 4

(গ) প্রমাণ কর যে, g(x) এর ক্ষুদ্রতম মান 24। 4

07. 

(ক) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ নির্ণয় কর। 2

(খ) যোগজীকরণের মাধ্যমে উল্লিখিত বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

(গ) উদ্দীপকের ছায়াঘেরা অংশটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 4

08. $f(\theta) = \sin\theta$

(ক) $\int \frac{1}{1+\tan z} dz$ এর মান কত? 2

(খ) $\sqrt{1 + f(\theta)}$ এর যোগজ নির্ণয় কর। 4

(গ) $\int f\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta$ এর মান বের কর। 4

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

পূর্ণমান: ২৫ সময়: ২৫ মিনিট

01. $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির ট্রেস হলো-

(a) 5 (b) 11

(c) 9 (d) 7

02. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ এবং AX = B হলে, x + y = কত?

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 7

03. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ হলে-

(i) A একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স

(ii) A একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স

(iii) A একটি অভেদক ম্যাট্রিক্স

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
দুইটি সরলরেখা (4, −5) বিন্দুগামী এবং তারা যথাক্রমে x অক্ষের সমান্তরাল ও তার উপর লম্ব।

04. x-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণের কোনটি?

(a) $y - 5 = 0$ (b) $y + 5 = 0$

(c) $x + 4 = 0$ (d) $x - 4 = 0$

05. x-অক্ষের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ কত?

(a) $y + 5 = 0$ (b) $y - 5 = 0$

(c) $x - 4 = 0$ (d) $x + 4 = 0$

06. $y^2 = 4(x+1)$ সমীকরণটির পোলার আকৃতি কোনটি?

(a) $r(1 - \cos\theta) = 2$

(b) $r(1 + \cos\theta) = 2$

(c) $r(1 - \sin\theta) = 2$

(d) $r(1 + \sin\theta) = 2$

07. AD মধ্যমার ভরকেন্দ্র $(-1,1)$। $D(-3,-1)$ হলে, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক কোনটি?
(a) $(3,5)$ (b) $(1,3)$
(c) $(7,9)$ (d) $(-7,-5)$

08. $3x^2+3y^2-x+\frac{y}{2}-5=0$ বৃত্তের কেন্দ্র-
(a) $\left(\frac{1}{6},-\frac{1}{12}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)$
(c) $\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ (d) $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x-y-5=0$ রেখাটি $(3,2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের একটি স্পর্শক।

09. বৃত্তটি কর্তৃক x অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ কত?
(a) $\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{2}$ (c) 4 (d) $\sqrt{4}$

10. নিচের কোন বিন্দুটি বৃত্তটির ভিতরে অবস্থিত?
(a) $(7,2)$ (b) $(5,1)$
(c) $(7,1)$ (d) $(8,8)$

11. $x^2+y^2=37$ কোন বিন্দু দিয়ে যায়?
(a) $(-5,3)$ (b) $(6,2)$
(c) $(5,2\sqrt{3})$ (d) কোনটিই নয়

12. $\tan A=\frac{a}{b}$ হলে, $\sin 2A=$?
(a) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ (b) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
(c) $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ (d) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$

13. $\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}$ এর মান কত?
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

14. $\frac{1-\cos2\theta+\sin2\theta}{1+\cos2\theta+\sin2\theta}$ এর মান কত?
(a) $\cot\theta$ (b) $\tan\theta$
(c) $\sin\theta+\cos\theta$ (d) $\sin\theta-\cos\theta$

15. $\sqrt{\frac{1-\cos2\theta}{1+\cos2\theta}}=$ কত?
(a) $\tan\theta$ (b) $\cot\theta$
(c) $\tan^2\theta$ (d) 1

16. $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$?
(a) e (b) $\frac{1}{e}$ (c) $\sqrt{e}$ (d) e^2

17. $y=x^2$ এবং $z=x^3$ হলে $\frac{dz}{dy}$ নিচের কোনটি?
(a) $\frac{3}{2}x$ (b) $\frac{3}{2x}$
(c) $3x^2$ (d) $6x^3$

18. $\frac{d}{dx}\{\ln(\sqrt{x})\}$ এর অন্তরক কত?
(a) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (b) $\frac{1}{x}$
(c) $\frac{1}{2x}$ (d) $\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}$

19. $s=6+4t-t^2$ হলে 2 sec পর ত্বরণ-
(a) $4\ ms^{-2}$ (b) $-4\ ms^{-2}$
(c) $2\ ms^{-2}$ (d) $-2\ ms^{-2}$

20. $y^2=4x$ পরাবৃত্ত এবং $y=x$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?
(a) $\frac{8}{3}$ বর্গ একক (b) $\frac{32}{3}$ বর্গ একক
(c) $\frac{24}{3}$ বর্গ একক (d) $\frac{40}{3}$ বর্গ একক

21. $\int e^{5x}\left(5\ln x+\frac{1}{x}\right)dx=$?
(a) $5e^{5x}\ln x+c$ (b) $\frac{e^{5x}\ln x}{5}+c$
(c) $e^{5x}\ln x+c$ (d) $25e^{5x}\ln x+c$

22. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\cos2x}$ এর মান নিচের কোনটি?
(a) 0 (b) $\frac{3}{2}$ (c) 1 (d) $\frac{1}{2}$

23. $\int_0^1\frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$ এর মান কত?
(a) $2(e-1)$ (b) $(e+1)$
(c) $2(e+1)$ (d) $(e-1)$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta.\cos\theta\, d\theta=$?
(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{6}$

25. নির্ণায়কের দুইটি সারি বা কলাম সদৃশ হলে ঐ নির্ণায়কের মান হবে-
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

উত্তরপত্র

1	a	2	c	3	d	4	b	5	c	6	a	7	a	8	a	9	c	10	b	11	c	12	c	13	b
14	b	15	a	16	c	17	a	18	c	19	d	20	a	21	c	22	d	23	a	24	d	25	a		

২০২১ বুয়েট সেরাদের দৃষ্টিতে উদ্ভাস



BUET ১ম : আসীর

আমি ইঞ্জিনিয়ারিং ভর্তি প্রস্তুতির জন্য শুরু থেকে শেষ পর্যন্ত শুধু উদ্ভাস-এর সাথেই যুক্ত ছিলাম। উদ্ভাস-এর সময়োপযোগী কোর্স প্ল্যান, ক্লাস, পরীক্ষা এবং স্টাডি ম্যাটেরিয়ালস আমাকে দারুণভাবে সাহায্য করেছে।



BUET ২য় : হাসনাইন

আমার একাডেমিক লাইফের অন্যতম সহযোগী ছিল উদ্ভাস। পরবর্তীতে এডমিশন প্রস্তুতির সময়ও উদ্ভাস ছিল আরো হেল্পফুল। আমার এই যাত্রায় উদ্ভাস-এর ভূমিকা ছিল অতুলনীয়।



BUET ৩য় : রেজোয়ান

এডমিশন প্রস্তুতির পুরোটা সময়ই আমি উদ্ভাস-এর উপর অনেকাংশে নির্ভর ছিলাম। উদ্ভাস এর দিকনির্দেশনাগুলো নিয়মিত অনুসরণ করতাম। উদ্ভাস পরিবারের জন্য শুভকামনা।



BUET ৪র্থ : সিদ্ধার্থ

করোনা মহামারীতে আমাদের পড়াশোনা চলমান রাখার সুযোগ দিয়েছিল উদ্ভাস। ফিজিক্যালি ও অনলাইনে নিয়মিত ক্লাস-পরীক্ষা নিয়ে আমাদের প্রস্তুতিকে মসৃণ রেখেছিল উদ্ভাস।



BUET ৫ম : নাহিদ

বুয়েটে চান্স পাওয়ার কঠিন এই পথচলাকে সহজ করতে উদ্ভাস অনন্য অবদান রেখেছে। উদ্ভাস-এর কনসেপ্ট বুক, প্র্যাকটিস বুক অনুশীলন করে নিজের প্রস্তুতিকে ঝালাই করে নিয়েছিলাম।



BUET ৬ষ্ঠ : তুহিন

উদ্ভাস-এর ভাইয়াদের আন্তরিকতা ও সহযোগিতা খুবই মনোমুগ্ধকর। শুরু থেকেই উদ্ভাস-এর ক্লাস পরীক্ষায় নিয়মিত অংশগ্রহণ করে এডমিশন টেস্টের প্রস্তুতিকে সুদৃঢ় করেছিলাম।



BUET ৭ম : ইফতেখার

উদ্ভাস-এর কনসেপ্ট বুকের মাধ্যমে বিষয়ভিত্তিক টপিকগুলোর কনসেপ্ট মজবুত করেছিলাম, আর তথ্যবহুল স্টাডি ম্যাটেরিয়ালস এর মাধ্যমে ভর্তি প্রস্তুতিকে আরো বেগবান করেছিলাম।



BUET ৮ম : ফাহিম

উদ্ভাস-এর ক্লাসগুলো বেশি ইফেক্টিভ ছিল। নিয়মিত পরীক্ষায় অংশগ্রহণ করতাম, যা আমার আত্মবিশ্বাস বাড়ানোর ক্ষেত্রে বিশেষ ভূমিকা পালন করেছিল।



BUET ৯ম : নিলয়

উদ্ভাস-এ কোচিং শুরুর পর থেকেই প্রতিদিনের পড়া প্রতিদিন পড়তাম। বাকি সময়গুলোতে উদ্ভাস-এর প্রশ্নব্যাংক থেকে বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের বিগত বছরের প্রশ্ন সলভ করতাম।



BUET ১০ম : সিয়াম

উদ্ভাস-এর বুয়েট স্ট্যান্ডার্ড MCQ ও Written পরীক্ষাগুলোতে নিয়মিত অংশগ্রহণ করতাম। পরীক্ষার পর সম্মিলিত মেধাতালিকা আমার প্রস্তুতির অবস্থা জানার ক্ষেত্রে সাহায্য করেছিল।

উদ্ভাস-এর ঢাকার শাখাসমূহ

শাখা	ফোন নং	ঠিকানা
মিরপুর	০১৭১৩২৩৬৭০৫	প্লট-৪ (৪র্থ তলা), ব্লক-বি, সেকশন-৬ (শেরেবাংলা স্টেডিয়ামের ৫নং গেটের বিপরীতে)।
রূপনগর	০১৭১৩২৩৬৭৩৪	বাড়ী নং-২০ (৪র্থ তলা), রোড নং-১২, রূপনগর, মিরপুর।
ক্যান্টনমেন্ট	০১৭১৩২৩৬৭২৪	সিবি ২১১/৪, কচুক্ষেত মেইন রোড, ঢাকা ক্যান্টনমেন্ট (বেসিক ব্যাংক-এর ৪র্থ তলা)।
ফার্মগেট	০১৭১৩২৩৬৭১১	মালেক টাওয়ার (৬ষ্ঠ তলা, ২য় লিফটের ৫), ফার্মগেট (ফার্মগেট পুলিশ বক্সের বিপরীতে)।
	০১৭১৩২৩৬৭১০	৭৮ গ্রীন রোড (২য় তলা) হোটেল গ্রীন প্যালেস-এর পাশের বিল্ডিং।
	০১৭৮৭৬৮৭৫০১	কনকর্ড টাওয়ার (৫ম তলা) ফার্মগেট পুলিশ বক্সের বিপরীতে।
মোহাম্মদপুর	০১৭১৩২৩৬৭০১	বাড়ী নং-১৪/১৭ (২য় তলা), ইকবাল রোড, মোহাম্মদপুর (পোস্ট অফিসের গলি)।
সাইন্স ল্যাব.	০১৭১৩২৩৬৭০৬	হ্যাপী আর্কেড শপিং মল (৩য় তলা), বাড়ী নং- ৩, রোড নং- ৩ মিরপুর রোড, ধানমন্ডি।
বকশিবাজার	০১৭১৩২৩৬৭১২	হেলিকন সেন্টার (৪র্থ তলা), ১৯/১, ১৯/২ (১৮ তলা ভবন), বকশিবাজার মোড় (ঢাকা মেডিকেল কলেজ সংলগ্ন)।
লক্ষীবাজার	০১৭১৩২৩৬৭২০	১৫, লক্ষীবাজার (৪র্থ তলা), সেন্ট গ্রেগরী স্কুলের বিপরীতে, পুরান ঢাকা।
যাত্রাবাড়ী	০১৭১৩২৩৬৭১৯	বাড়ী নং-১০১, শহীদ ফারুক সড়ক (৩য় তলা), যাত্রাবাড়ী (অগ্রণী ব্যাংকের পাশের বিল্ডিং)।
দনিয়া	০১৭১৩২৩৬৭১৮	বাড়ী নং-৫৯৪ (২য় তলা), দনিয়া বাজার রোড, দনিয়া (দনিয়া মাজার-এর পাশের বিল্ডিং)।
ডেমরা (কোনাপাড়া)	০১৭১৩২৩৬৭৫৭	আজিজ টাওয়ার (৩য় তলা), ফার্মের মোড়, কোনাপাড়া, ডেমরা (UCB ব্যাংকের উপরে)।
বনশ্রী	০১৭১৩২৩৬৭২৩	বাড়ী নং-১৩, ব্লক-বি (৪র্থ তলা), রামপুরা (মেইন রোড, বনশ্রী প্রজেক্ট)।
বাসাবো	০১৭১৩২৩৬৭২২	বাড়ী নং-১১৪/এ (২য় তলা), সবুজবাগ, বাসাবো (বৌদ্ধ মন্দির-এর বিপরীতে)।
খিলগাঁও	০১৭১৩২৩৬৭৬৮	বাড়ি নং ১৪১৪/১/এ ন্যাশনাল আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজের ১নং বিল্ডিং গেইট এর বিপরীতে।
মতিঝিল	০১৭১৩২৩৬৭০৮	বাড়ী নং-১৬৭, ইডেন বিল্ডিং (২য় তলা), মতিঝিল (নটর ডেম কলেজের বিপরীতে)।
শান্তিনগর	০১৭১৩২৩৬৭০৩	১ নং সিদ্ধেশ্বরী লেন, মৃধা ভবন (৪র্থ তলা, লিফটের ৩), শান্তিনগর (সিদ্ধেশ্বরী গার্লস স্কুলের পূর্ব পাশে)।
মালিবাগ	০১৭১৩২৩৬৭০২	হোসাফ শপিং কমপ্লেক্স (৪র্থ তলা), মালিবাগ মোড় (মেডিনোভা ডায়াগনস্টিক সেন্টার বিল্ডিং)।
টংগী	০১৭১৩২৩৬৭৫৯	হোল্ডিং- ১৮৬/৯, এস. এস. একাডেমী রোড (২য় তলা), আউচপাড়া, টংগী।
উত্তরা	০১৭১৩২৩৬৭০৭	সেক্টর নং-৬, রোড নং-১২, হাউজ নং-৭ (৫ম তলা), হাউজ বিল্ডিং, উত্তরা।
সাভার	০১৭১৩২৩৬৭২১	বি-২ জালেশ্বর, ওয়াইএমসিএ বিল্ডিং, রেডিও কলোনী, সাভার, (সিঙ্গার শো-রুম এর ২য় তলা)।

উদ্ভাস-এর ঢাকার বাইরের শাখাসমূহ

গাজীপুর	০১৭১৩২৩৬৭৪৬	ও কে টাওয়ার, স্বপ্ন শপিং এর ৩য় তলা (সরকারি মহিলা কলেজের উত্তর পার্শ্বে), জয়দেবপুর।
নারায়ণগঞ্জ	০১৭১৩২৩৬৭১৭	এলাহী ভিলা, ৩৯/এ (২য় তলা), আল্লামা ইকবাল রোড (জামে মসজিদের দক্ষিণে), চাষাড়া।
ময়মনসিংহ	০১৭১৩২৩৬৭১৬	বাড়ী নং-১৯/এ (২য় তলা), সাহেব আলী রোড, নতুন বাজার, ময়মনসিংহ।
ময়মনসিংহ (কে.বি.)	০১৭১৩২৩৬৭৬৯	বাড়ী নং-৯৯ সরকার প্লাজা (২য় তলা), কেওয়াটখালি, ওয়াপদা মোড়, কে.বি. ইসমাইল রোড।
জামালপুর	০১৭১৩২৩৬৭৪০	বাড়ী নং- ৪৮ (৩য় তলা), আমলাপাড়া (জিলা স্কুল-এর বিপরীতে), জামালপুর।
শেরপুর	০১৭১৩২৩৬৭৪৯	বাড়ী নং-২৫১, ওয়ালটন প্লাজা (২য় তলা), খরমপুর, শেরপুর।
কিশোরগঞ্জ	০১৭১৩২৩৬৭৩৯	বুলবুল ভিলা (৩য় তলা), বকুলতলা মোড়, খরমপট্টি, কিশোরগঞ্জ।
নেত্রকোণা	০১৭১৩২৩৬৭৬৭	বাড়ী নং-৬৪১ (৩য় তলা), পৌরসভার বিপরীতে, নেত্রকোণা।
নরসিংদী	০১৭১৩২৩৬৭৩৮	বাড়ী নং-২০৫/০৪, নুসরাত ভিলা (২য় তলা), বালুর মাঠ, পশ্চিম ব্রাহ্মন্দী, নরসিংদী।
ব্রাহ্মণবাড়িয়া	০১৭১৩২৩৬৭৪৩	বাড়ী নং- ৯৬৩, খালেক মঞ্জিল (২য় তলা), মৌলভীপাড়া, ব্রাহ্মণবাড়িয়া।
সিলেট	০১৭১৩২৩৬৭২৯	জুবায়ের বাণিজ্যিক ভবন (২য় তলা), চৌহাট্টা (সিভিল সার্জন কার্যালয়-এর বিপরীতে)।
টাঙ্গাইল	০১৭১৩২৩৬৭৩৭	বাড়ী নং-২৮৭, জেলা সদর রোড, আকুরটাকুর পাড়া, টাঙ্গাইল (ধলেশ্বরী হাসপাতাল-এর ৪র্থ তলা)।
সিরাজগঞ্জ	০১৭১৩২৩৬৭৪২	বাড়ী নং- ৪, এস কে ভবন (৪র্থ তলা), বিএ কলেজ রোড (কাগজ বিতান সংলগ্ন), সিরাজগঞ্জ।
পাবনা	০১৭১৩২৩৬৭৩৬	আলিয়া মদ্রাসা মার্কেট (২য় তলা), রাধানগর, পাবনা।
কুষ্টিয়া	০১৭১৩২৩৬৭৩৫	বাড়ী নং-৩/১ (২য় তলা), বিচারপতি মাহবুব মোর্শেদ সড়ক, পেয়ারাতলা, কুষ্টিয়া।
ঝিনাইদহ	০১৭১৩২৩৬৭৬১	কে সি কলেজের পশ্চিমে (এস এ পরিবহন সংলগ্ন), ঝিনাইদহ।
চুয়াডাঙ্গা	০১৭১৩২৩৬৭৬৪	বাড়ী নং- ২৯৫৭ (৩য় তলা), কলেজ রোড (গণপূর্ত অফিসের সামনে), চুয়াডাঙ্গা।
রাজশাহী	০১৭১৩২৩৬৭১৩	বাড়ী নং-১৫৪/২ (৩য় তলা), কাদিরগঞ্জ (নগর ভবনের পশ্চিম পাশে), রাজশাহী।
নওগাঁ	০১৭১৩২৩৬৭৫৬	আফিয়া গার্ডেন (৩য় তলা), কেডি মোড়ের উত্তর পার্শ্বে (পিএম স্কুল সংলগ্ন), উকিল পাড়া, নওগাঁ।
নাটোর	০১৭১৩২৩৬৭৫১	কাজী টাওয়ার (৪র্থ তলা), বই পট্টি, স্টেশন রোড, আলাইপুর, নাটোর।
চাঁপাইনবাবগঞ্জ	০১৭১৩২৩৬৭৪৭	বাড়ী নং-৫২, গাবতলা মোড় (নর্থ ব্রীজ স্কুলের ৪র্থ তলা), চাঁপাইনবাবগঞ্জ।
বগুড়া	০১৭১৩২৩৬৭২৭	বাড়ী নং-২৯২/৩০৪, ফজল কটেজ (২য় তলা), জলেশ্বরীতলা (কালী মন্দির সংলগ্ন), বগুড়া।
জয়পুরহাট	০১৭১৩২৩৬৭৫৪	প্রফেসর পাড়া, সূর্যের হাসি ক্লিনিক এর ৪র্থ তলা, জয়পুরহাট।
গাইবান্ধা	০১৭১৩২৩৬৭৫৫	আরশী প্লাজা (৩য় তলা), ডাক বাংলো মোড়, ডিবি রোড, গাইবান্ধা।
রংপুর	০১৭১৩২৩৬৭২৬	বাড়ী নং-৩৭ (৪র্থ তলা), মেডিকেল মোড় (রংপুর ক্যান্ট. পাবলিক কলেজ গেটের বিপরীতে)।
কুড়িগ্রাম	০১৭১৩২৩৬৭৫৩	এম আর জেড প্লাজা (২য় তলা), ঘোষ পাড়া (সেবা ক্লিনিক-এর সামনে), কুড়িগ্রাম।
সৈয়দপুর	০১৭১৩২৩৬৭৪১	বাড়ী নং- ২০২ (৩য় তলা), দিনাজপুর রোড, নতুন বাবু পাড়া (সিঙ্গার শো-রুমের উপরে)।
দিনাজপুর	০১৭১৩২৩৬৭৩৩	নার্গিস প্লাজা (৩য় তলা), চারুবাবুর মোড় (সেবা ফার্মেসীর উপরে), দিনাজপুর।
ঠাকুরগাঁও	০১৭১৩২৩৬৭৪৮	ইসলাম প্লাজার পশ্চিম পার্শ্বে, আলিম এন্টারপ্রাইজের (৩য় তলা) আমতলী মোড়।
মানিকগঞ্জ	০১৭১৩২৩৬৭৬৩	মানিকগঞ্জ প্লাজা (২য় তলা), শহীদ রফিক সড়ক, মানিকগঞ্জ।
ফরিদপুর	০১৭১৩২৩৬৭৩২	বাড়ী নং-৫৫ (২য় তলা), সারদা সুন্দরী মহিলা কলেজ রোড (অম্বিকা সড়ক), ঝিলটুলি।
গোপালগঞ্জ	০১৭১৩২৩৬৭৬০	হোল্ডিং- ২৮১/৩ (৪র্থ তলা), বটতলা, গোপালগঞ্জ।
মাগুরা	০১৭১৩২৩৬৭৫২	বাড়ী নং- ৪৫/৪৬ (৩য় তলা), কাউন্সিল পাড়া (পৌরসভার পিছনে), মাগুরা।
যশোর	০১৭১৩২৩৬৭৩১	মতি শপিং কমপ্লেক্স (৩য় তলা), জজ কোর্ট মোড় (প্রেস ক্লাবের পাশের বিল্ডিং), যশোর।
খুলনা	০১৭১৩২৩৬৭১৫	বাড়ী নং-৪৬/১ (৫ম তলা), মশিউর রহমান রোড, শান্তিধাম মোড়, খুলনা।
সাতক্ষীরা	০১৭১৩২৩৬৭৫০	সরকারি কলেজ রোড (২য় তলা), মুনজিতপুর (করিম মেসের বিপরীতে), সাতক্ষীরা।
বরিশাল	০১৭১৩২৩৬৭৩০	বাড়ী নং-৩১/৩২, রোজ-বে (নিচ তলা), উত্তর আলেকান্দা, বগুড়া রোড, বটতলা, বরিশাল।
মুন্সিগঞ্জ	০১৭১৩২৩৬৭৬২	বাড়ী নং-৫৪/১ (৩য় তলা), বঙ্গবন্ধু সড়ক (কাচারি চত্ত্বর), শিল্পকলার দক্ষিণ পাশে, মুন্সীগঞ্জ।
কুমিল্লা	০১৭১৩২৩৬৭২৮	বাড়ী নং-২০৩/১৮৭, গার্ডেন সিটি (৪র্থ তলা), ঝাউতলা, (পুলিশ লাইন মোড় সংলগ্ন), কুমিল্লা।
চাঁদপুর	০১৭১৩২৩৬৭৬৫	দোহা প্লাজা (৩য় তলা), স্টেডিয়াম রোড, চাঁদপুর।
ফেনী	০১৭১৩২৩৬৭৪৪	শাহজাহান টাওয়ার (২য় তলা), মিজান রোড-এর মাথায় (সোনালী ব্যাংকের পশ্চিম পাশে), ট্রাংক রোড, ফেনী।
নোয়াখালী	০১৭১৩২৩৬৭৪৫	বাড়ী নং ২০৮, আলিফ প্লাজা (৪র্থ তলা), পৌর বাজার (কৃষি ব্যাংকের উপরে), প্রধান সড়ক, মাইজদী কোর্ট, নোয়াখালী।
চট্টগ্রাম (চকবাজার)	০১৭১৩২৩৬৭১৪	গুলজার টাওয়ার (৪র্থ তলা), গুলজার মোড়, চকবাজার, চট্টগ্রাম।
চট্টগ্রাম (হালিশহর)	০১৭১৩২৩৬৭৫৮	মমতাজ হাইটস (৪র্থ তলা), বড়পুল মোড় (ইসলামী ব্যাংকের বিপরীতে), হালিশহর।
কক্সবাজার	০১৭১৩২৩৬৭৬৬	সৈকত টাওয়ার (৫ম তলা), বার্মিজ মার্কেট, কক্সবাজার।

জেলা কো-অর্ডিনেটর

সুনামগঞ্জ	০১৩১৩৩৬৮৬৭১	রাঙামাটি	০১৩১৩৩৬৮৬৬৬	মেহেরপুর	০১৩১৩৩৬৮৬৭০	বরগুনা	০১৩১৩৩৬৮৬৫৮
হবিগঞ্জ	০১৩১৩৩৬৮৬৫৬	খাগড়াছড়ি	০১৩১৩৩৬৮৬৬৩	নড়াইল	০১৩১৩৩৬৮৬৫০	পটুয়াখালী	০১৩১৩৩৬৮৬৬১
মৌলভীবাজার	০১৩১৩৩৬৮৬৫৫	শরীয়তপুর	০১৩১৩৩৬৮৬৪৮	বাগেরহাট	০১৩১৩৩৬৮৬৫৪	ভোলা	০১৩১৩৩৬৮৬৬২
লক্ষীপুর	০১৩১৩৩৬৮৬৪৭	মাদারীপুর	০১৩১৩৩৬৮৬৬৮	পিরোজপুর	০১৩১৩৩৬৮৬৬০	লালমনিরহাট	০১৩১৩৩৬৮৬৪৬
বান্দরবান	০১৩১৩৩৬৮৬৬৫	রাজবাড়ী	০১৩১৩৩৬৮৬৬৯	ঝালকাঠি	০১৩১৩৩৬৮৬৫৯	পঞ্চগড়	০১৩১৩৩৬৮৬৫৩
						ঠাকুরগাঁও (পীরগঞ্জ)	০১৩১৩০০৩৬৩৪২